

# ELECTROSTÁTICA DE DIELECTRICOS

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

**TOPICS:** dipolo eléctrico, Dieléctricos, Polarización, Carga de polarización, Vector desplazamiento, Medios lineales

# Programa. (último tema de PEI 1 , del 5 de Abril de 2024

<i>Elc.Conde</i>	<i>26-febre.</i>	<i>1-marzo</i>	<i>2+(2+1prob)*</i>	<i>46</i>
<i>Elc.Dielc</i>	<i>4-marzo</i>	<i>8-marzo</i>	<i>4+1</i>	<i>41</i>
<i>Elc.Dielc</i>	<i>11-marzo</i>	<i>15-marzo</i>	<i>0+5prob*</i>	<i>36</i>
<i>Cond.Elct</i>	<i>18-marzo</i>	<i>18-marzo</i>	<i>2+0</i>	<i>31</i>
<i>Mag.Vacío I</i>	<i>20-marzo</i>	<i>22-marzo</i>	<i>2+1</i>	<i>29</i>
<i>Santa SEMANA</i>	<i>Del 23-marzo</i>	<i>al 1 abril</i>		

## Tema 5. ELECTROSTÁTICA DE DIELECTRICOS

5.1 Polarización de la Materia. 5.2 Potencial y Campo de un Dipolo Eléctrico. 5.3 Vector Polarización. 5.4 Densidades de Carga de Polarización. 5.5 Desplazamiento Eléctrico. 5.6 Ecuaciones de la Electroestática de Dielectricos. 5.7 Susceptibilidad y Constante Dielectrica. 5.8 Campo en la Interfase de Medios. 5.9 Energía Electroestática.

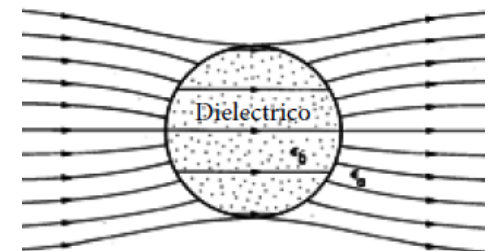
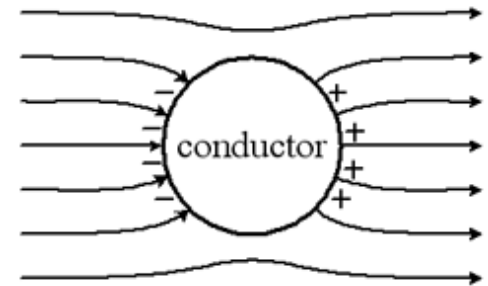
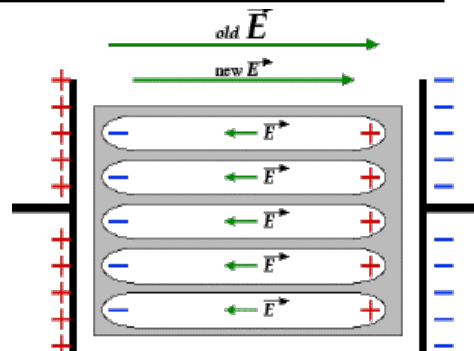
$$V(\vec{r}) = - \int_{vol.} \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_p(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Energía electrostática almacenada:

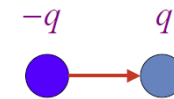
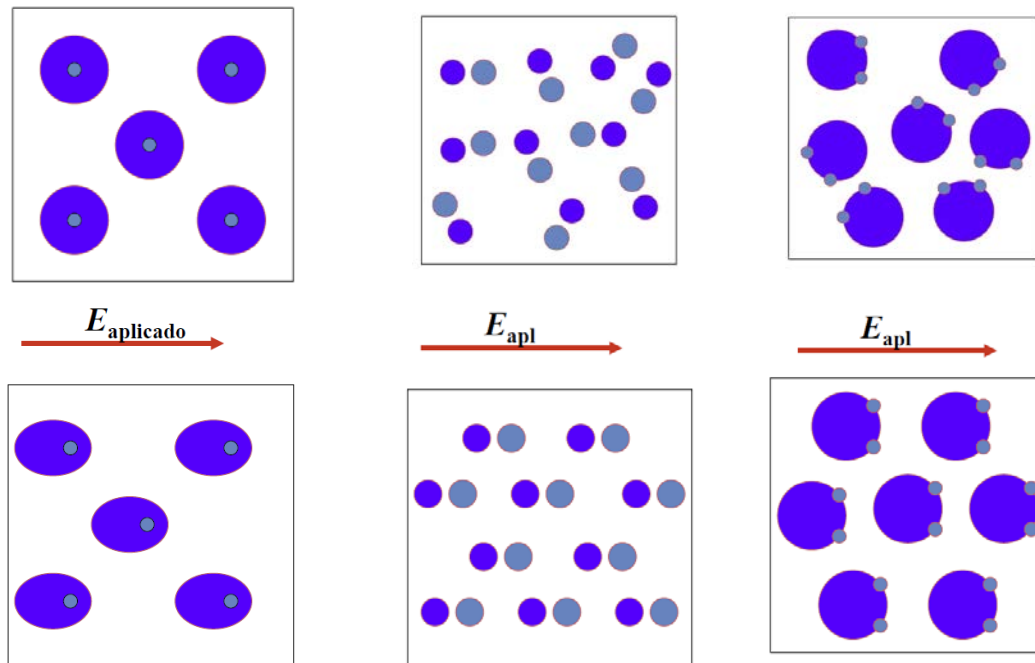
$$U_e = \frac{1}{2} \int dqV(r) = \frac{1}{2} \int_v dv \rho V$$

$$= \frac{1}{2} \int_v dv V \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

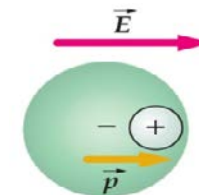


# Material Dieléctrico:

- Un *dieléctrico* o aislante, es un medio en el que en la práctica NO hay cargas libres capaces de originar corrientes ante la acción de campos.
- Aun sin movimiento neto macroscópico de carga, la acción de un campo  $E$  produce *desplazamientos microscópicos* a nivel atómico-molecular, apareciendo dipolos inducidos (incluso si las especies químicas son apolares, el campo induce dipolo o si son polares los orienta).
- El **medio** se dice **polarizado** si surgen dipolos inducidos orientados o se orientan los existentes: *el campo interior y exterior al medio se modifica.*



Efecto: (posible inducción) orientación de dipolos de carga

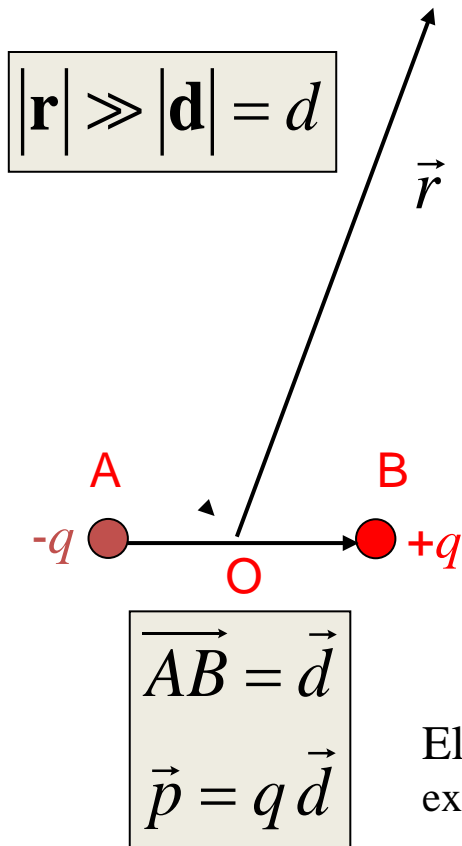


$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{apl} + \mathbf{E}_{ind} \rightarrow$$

$$E = E_{apl} - E_{diel} < E_{apl}$$

# Potencial creado por un dipolo a gran distancia

- Dipolo: dos cargas de signo opuesto con vector de posición relativo  $\mathbf{d}$  de la negativa a la positiva. El potencial creado por el dipolo a gran distancia en su **aproximación dipolar** es:



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_B|} + \frac{(-q)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_A|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{d}/2|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{d}/2|} \right)$$

$$|\vec{r} \pm \vec{d}/2|^2 = r^2 \pm \vec{r} \cdot \vec{d} + d^2/4 \approx r^2 (1 \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2}) \quad \text{si } d \ll r$$

Taylor a primer orden en  $\frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2}$ :  $\frac{1}{|\vec{r} \pm \vec{d}/2|} \approx \frac{1}{(r^2 \pm \vec{r} \cdot \vec{d})^{1/2}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \mp \frac{1}{2} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \right)$

$$V_{dip.} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{r} \propto \frac{1}{r^2}$$

El **momento dipolar** es: (vector de  $-q$  a  $q$ , medido en C m, expresión extensible y válida para sistemas con N cargas  $j=1,2,\dots,N$  con carga total nula)

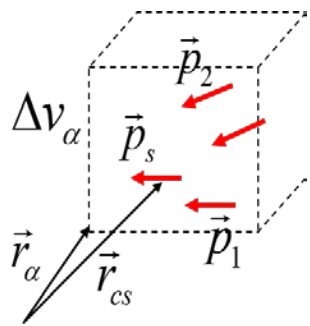
$$\vec{p} \equiv \sum_j q_j \vec{r}_j = q(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = q\vec{d} \quad (\text{C m})$$

# Modelo clásico de dieléctrico. Campo.

- El medio dieléctrico se puede modelizar como un conjunto de  $N$  dipolos con centros en  $O_j$  y momentos dipolares  $\vec{p}_j$ , el potencial  $V$  será la suma de los potenciales  $V_j$  de cada dipolo:

$$V_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{\vec{p}_j \cdot (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \vec{p}_j \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

- Paso al continuo:** Si en un volumen elemental con centro en posición  $\mathbf{r}'$  hay  $n \ll N$  dipolos, se define la densidad de dipolos por unidad de volumen, que da el **vector de polarización**  $\mathbf{P}$  del medio en  $\mathbf{r}'$  (posición promedio de los  $\mathbf{r}_j$  de ese elemento de volumen)



$$\mathbf{P} \equiv \vec{P}(\vec{r}') = \frac{\sum_{j=1, n} \vec{p}_j}{\Delta v} \text{ (en C/m}^2\text{)}, \text{ si } \Delta v \rightarrow dv' \ll v \rightarrow \begin{cases} r_\alpha = r_j \rightarrow r', & V \rightarrow dV \\ \sum_{n \ll N} \vec{p}_j \Big|_{r_j \rightarrow r'} \approx \vec{P}(\vec{r}') dv' \end{cases}$$

- Finalmente, el potencial inducido por el dieléctrico polarizado, en un punto  $\mathbf{r}$  del espacio, se aproxima como:

$$V(\vec{r}) = \int_{r'} dV = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{vol.} dv' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{vol.} dv' \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

# Potencial inducido por dieléctrico polarizado

- Puede reescribirse usando “integración por partes” en términos de integrales en volumen del medio polarizado y a sobre su superficie aplicando:

$$\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ; \quad d\vec{S}' = \vec{n} \, dS' \quad (\vec{n} \text{ unitario normal a } S \text{ del material al exterior})$$

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Con el Teorema de la divergencia,  $V$  se descompone en dos sumandos, uno de superficie y otro de volumen, que responden a superposición de potenciales creados por *distribuciones superficial y volumétrica de carga real no libre, o ligada,, de polarización*, debidas a la polarización del medio:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v dv' \nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v dv' \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s dS' \frac{\vec{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v dv' \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \equiv \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_s \frac{\overbrace{\sigma_p(\vec{r}') dS'}^{dq' \text{ en Superficie}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\overbrace{\rho_p(\vec{r}') dv'}^{dq' \text{ en volumen}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

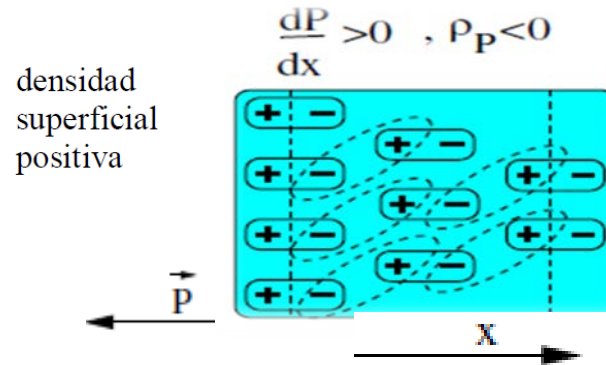
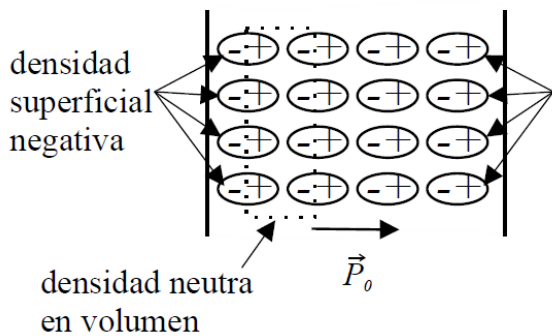
# Potencial inducido por dieléctrico polarizado

- Las *fuentes del campo* son densidades de carga de polarización en superficie y en volumen (carga ligada también se dice) definidas como:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_p(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Def.  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_p(\vec{r}) = \vec{n} \cdot \vec{P}(r) \rightarrow \text{densidad superficial de carga de polarización en } S \\ \rho_p(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P}(r) \rightarrow \text{densidad volumétrica de carga de polarización en } v \\ \vec{n} \text{ va del material dieléctrico a su exterior} \end{array} \right.$

- Significado físico: la proyección de  $\mathbf{P}$  sobre la superficie da lugar a densidad de carga en ella. El flujo de  $\mathbf{P}$  por unidad de volumen en el interior ( $\text{div } \mathbf{P}$ ) puede ser no nulo, originado carga efectiva de polarización. La *carga total de polarización* es **NULA**.



$$\begin{aligned} Q_p &= \oint_S \sigma_p dS + \int_v \rho_p dv = \\ &= \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS + \int_v (-\nabla \cdot \vec{P}) dv = \\ &= \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

# Ecuaciones de Maxwell en medio dieléctrico. Energía $U_e$ del material

- En el **interior de un volumen** con dieléctrico, en el que además puede alojarse carga libre de densidad  $\rho$ , la carga neta por unidad de volumen será  $\rho + \rho_p$ , lo que lleva a las ecuaciones de Maxwell para la electrostática de medios:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad y \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

- Conviene expresar la *Ley de Poisson en términos sólo de la carga libre*, para ello se reescribe como

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho$$

- El término entre paréntesis define un vector, llamado *vector desplazamiento* electrostático  $\mathbf{D}$ , cuya divergencia es la densidad de carga libre: sus **fuentes** son las cargas libres (controlables en laboratorio)

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Así, las **ecuaciones de Maxwell** anteriores se reescriben (formas diferencial e integral):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv = Q_{\text{int}} \text{ (Ley de Gauss)} \\ \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \end{cases}$$

Nótese que, en general,  $\text{rot}(\vec{D}) = \nabla \wedge \vec{D} = \nabla \wedge (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \nabla \wedge \vec{P} \neq 0$

**Energía electrostática almacenada:**

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \int dqV(r) = \frac{1}{2} \int_V dv \rho V = \\ &\text{con } \nabla \cdot (\vec{D} V) = V \nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} \cdot \nabla V = \rho V - \vec{D} \cdot \vec{E} \\ &\text{(Gauss int. como se hizo para el vacío, } D \nabla S \rightarrow 0 \text{ a } R \rightarrow \infty) \\ &= \frac{1}{2} \int_V dv V \nabla \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv \end{aligned}$$



## Medios lineales (homogéneos e isótropos)

- En general  $\mathbf{P}$  es función del campo  $\mathbf{E}$ , para muchos dieléctricos no hay polarización sin campo,  $\mathbf{P}(\mathbf{E}=\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  (medios sin polarización permanente), lo que sugiere dependencia lineal de  $\mathbf{P}$  con  $\mathbf{E}$ :

$$\vec{P}(\vec{E}) = \vec{P}(0) + \left( \frac{D\vec{P}}{D\vec{E}} \right)_{E=0} \cdot \vec{E} + O(E^2) = 0 + \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot \vec{E} + \dots$$

- Para *medios isótropos homogéneos*, la matriz adimensional  $\chi$  (matriz o tensor) es diagonal de elementos iguales, queda:

$$\vec{P}(\vec{E}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 \underbrace{(\epsilon_r - 1)}_{>0} \vec{E} + \dots \quad \text{con } \epsilon = \epsilon(\vec{r}) = \epsilon_r \epsilon_0$$

$\chi_e =$  susceptibilidad  
 $\epsilon_r =$  constante dieléctrica  
o permitividad relativa del medio  
es  $> 1$  (para el agua es 80)

- Por lo que el desplazamiento  $\mathbf{D}$  queda aproximadamente proporcional a  $\mathbf{E}$  y el campo ( $\epsilon_r \mathbf{E}$ ) en el medio juega el papel de  $\mathbf{E}$  en el vacío: (*ley constitutiva del medio, no es ley general*)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}; \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

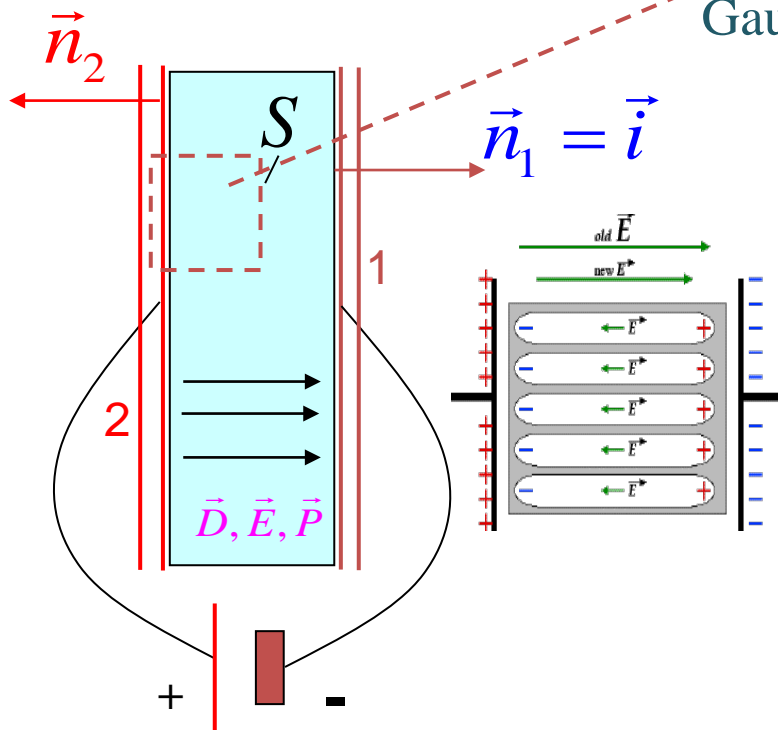
- Para resolución de *problemas, conviene operar con  $\mathbf{D}$*  (para aplicar ley de Gauss, p.e. en casos con simetrías definidas) que tiene por fuente la carga libre y de él obtener  $\mathbf{E}$  y el potencial  $V$ . En algunos medios lineales  $\epsilon_r$  puede depender de  $\mathbf{r}$ .

# Ejemplos

CONDENSADOR PLANO de separación entre placas  $d$ , diferencia de potencial  $\Delta V$  y dieléctrico  $\epsilon_r$ . Capacidad y carga de polarización:

$$DS = \sigma S \rightarrow \mathbf{D} = \sigma \vec{i}$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$



Gaussiana

$$\Delta V = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dl = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} d$$

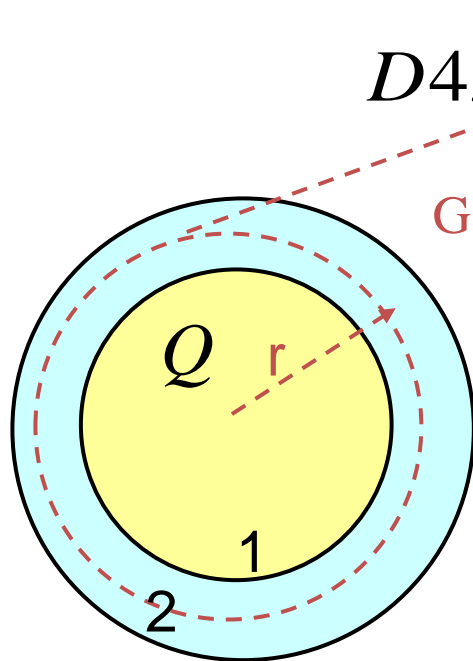
$$\sigma = \frac{Q}{S} = \Delta V \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{d}; C = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S}{d} > C(\epsilon_r = 1)$$

Observad que el vector normal se elige saliente del dieléctrico.

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{P} &= (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)\sigma}{\epsilon_r} \vec{i} \Rightarrow \rho_p = -\frac{dP}{dx} = 0 \\ \sigma_{p2} &= \vec{P} \cdot \vec{n}_2 = \frac{(\epsilon_r - 1)\sigma}{\epsilon_r} \vec{i} \cdot (-\vec{i}) = -\frac{(\epsilon_r - 1)\sigma}{\epsilon_r} < 0 \\ \sigma_{p1} &= \vec{P} \cdot \vec{n}_1 = \frac{(\epsilon_r - 1)\sigma}{\epsilon_r} \vec{i} \cdot \vec{i} = \frac{(\epsilon_r - 1)\sigma}{\epsilon_r} > 0 \end{aligned} \right.$$

## Problemas. Ejemplos:

CONDENSADOR ESFÉRICO de Radios  $R_1$  y  $R_2$ , carga  $Q$  y dieléctrico interpuesto  $\epsilon_r$   
Por ley de Gauss al vector  $D$  :



$$D4\pi r^2 = Q \quad E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r}$$

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} E dr = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0 \epsilon_r} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$C = C(\epsilon_r) = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r R_2 R_1}{(R_2 - R_1)} = \epsilon_r C(1) > C(1)$$

$$\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \rightarrow \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$$

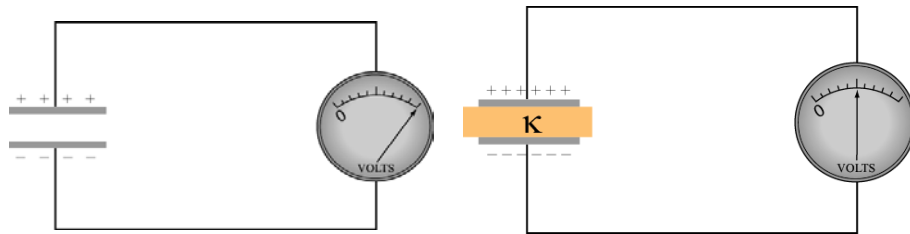
$$\sigma_p(R_1) = \vec{P}(R_1) \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow 1} = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_1^2}, \sigma_p(R_2) = \vec{P}(R_2) \cdot \vec{n}_{2 \rightarrow \text{ext}} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

# Aplicación: Capacidad de un condensador con dieléctrico (Problemas 5.5 y 5.6)

- **Condensador con carga fija** ( $Q = cte$ , aislado): El dieléctrico disminuye el campo eléctrico y, como consecuencia, **disminuye la diferencia de potencial** entre placas y **aumenta la capacidad** del condensador en un factor  $\epsilon_r$

$\epsilon_r > 1$ , (y supuesto uniforme en medio homogéneo)

$$\oint \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}' \cdot d\vec{S} = Q = \oint \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} \rightarrow \epsilon_r |\vec{E}'| = |\vec{E}| \Rightarrow$$



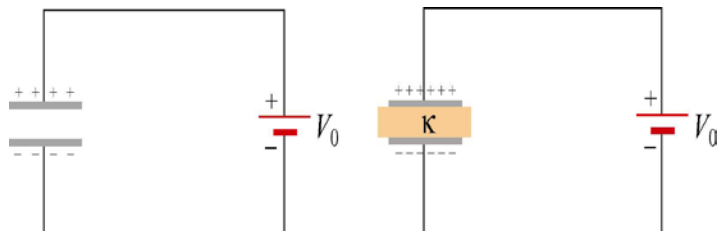
$$V' = \frac{V}{\epsilon_r}$$

$$C' = \frac{Q}{V'} = \epsilon_r \frac{Q}{V} = \epsilon_r C > C$$

- **Condensador a potencial fijo** ( $V_0 = V = cte.$ ): El dieléctrico **aumenta la carga** del condensador y, como consecuencia, **aumenta la capacidad** del condensador en un factor  $\epsilon_r$

$$\oint \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q' = \epsilon_r Q \rightarrow Q' = \epsilon_r Q \text{ (y } E' = E = \Delta V / \Delta x)$$

$$C' = \frac{Q'}{V} = \epsilon_r \frac{Q}{V} = \epsilon_r C > C$$



**El resultado es general: el dieléctrico aumenta la capacidad.** ¿Y la energía que puede almacenar?

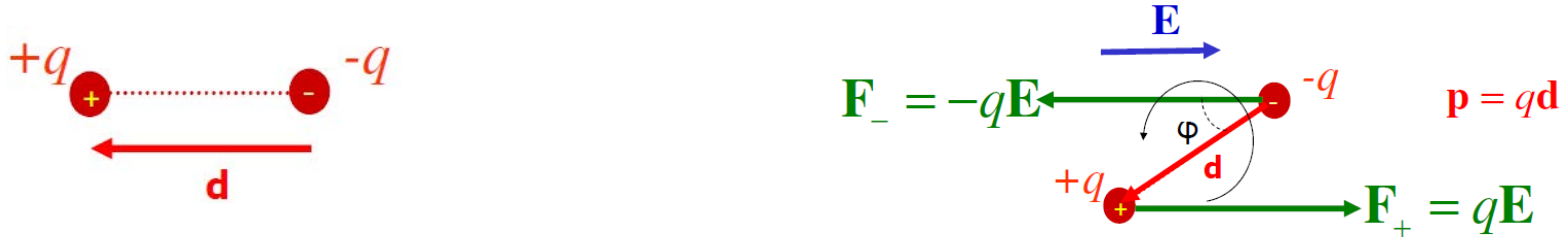
Energía electrostática almacenada (mayor que la del vacío):

$$U_e = \frac{1}{2} \int dqV(r) = \frac{1}{2} \int_v dv \rho V = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int_v \epsilon_r \vec{E} \cdot \vec{E} dv > \frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 dv$$

# NOTA: Acción de campo externo sobre un dipolo

- Un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  aplicado a un dipolo ejerce una fuerza de intensidad pequeña, en cambio, produce un momento (torque) que tiende a alinear al dipolo con el campo:



- A primer orden en la distancia  $|d|$  entre las cargas, el torque (par de fuerzas) ejercidos por un *campo externo*  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  sobre un dipolo es: (dipolo  $\mathbf{p}$  tiende a *alinearse* a  $\mathbf{E}$  aplicado)

$$\vec{\tau} = \vec{r}_B \times q\vec{E}(\vec{r}_+) + \vec{r}_A \times (-q)\vec{E}(\vec{r}_-) \approx q(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{E}(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r}); \quad |\vec{r}_{\pm}| = |\vec{r} \mp \vec{d}/2| \approx r(1 \mp \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{2r^2})$$

- La **energía electrostática** del dipolo inmerso en una región de potencial  $V$  y la **fuerza del campo externo** sobre él se aproximan por: *(si el campo es uniforme, no ejerce fuerza sobre el dipolo pero un material dieléctrico es atraído débilmente por distribuciones de carga lejanas pues crean campo variable con  $r$ )*

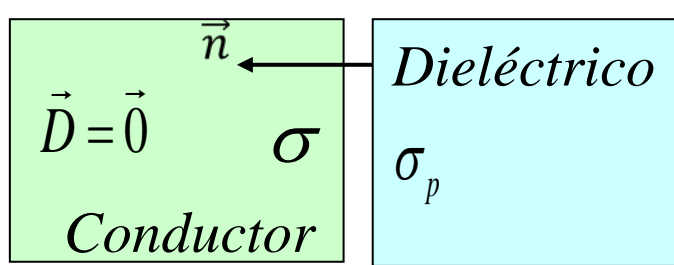
$$U_e = \int_0^\theta \tau d\theta \approx -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad \text{y} \quad \vec{F} = q(\vec{E}(\vec{r}_+) - \vec{E}(\vec{r}_-)) = -\nabla U_e \approx (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) \quad (\approx 0) \xrightarrow[\text{F por } m^3]{\text{Medio Polari.}} (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r})$$

- El **campo eléctrico creado por el dipolo decae con el cubo de la distancia**, a gran distancia del mismo vale (comprobadlo con el gradiente del potencial  $V_{dip}$ ):

$$\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = -\nabla \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\nabla(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \nabla \frac{1}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \sim \frac{1}{r^3}$$

# NOTA: Condiciones de frontera o borde entre medios conductor-dieléctric-

- Relación entre densidades superficiales de carga en contacto dielectrico conductor : aplicando Ley **Gauss** a superficie tipo *caja-píldoras* con sendas bases S en ambos medios:



el versor normal  $\vec{n}$  va del dieléctrico a su exterior  
 $(\vec{n} \cdot \vec{D}_{conductor} - \vec{n} \cdot \vec{D})S = (0 - \vec{n} \cdot \vec{D})S = \sigma S$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = (\vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}) \cdot \vec{n} \stackrel{\text{mediolineal}}{=} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \vec{n} \cdot \vec{D} = \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} (-\sigma)$$

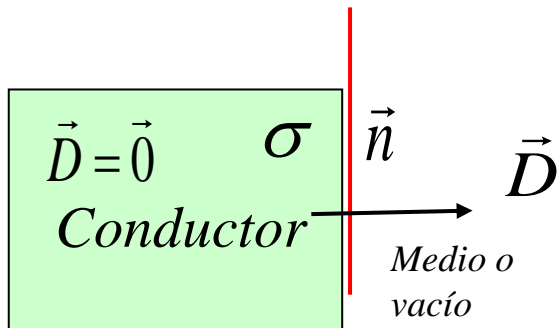
$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\sigma_p = -\sigma \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \quad (\text{densidades sup. de signos opuestos})$$

- En un conductor  $D=0$ , por lo que en el exterior de la superficie conductora con densidad superficial de carga se tiene:

$\vec{n}$  va del conductor a su exterior

$$(\vec{D} - \vec{0}) \cdot \vec{n}_{c-e} S = \sigma S = \vec{n}_{c-e} \cdot \vec{D} S = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}_{c-e} S$$

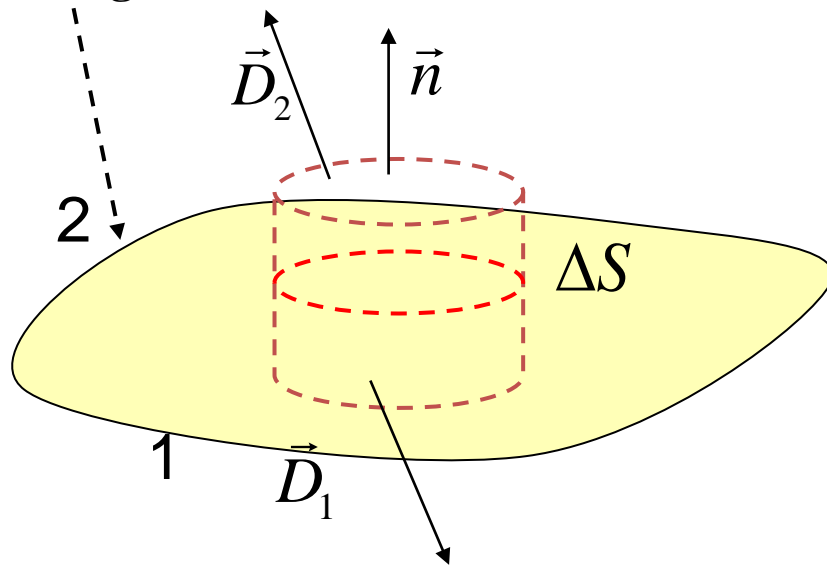


$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D} = \epsilon \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{n}}_{\text{medio lineal}}$$

(con  $\vec{n} = \vec{n}_{c-e}$ ,  $\epsilon$  del medio exterior)

## NOTA: Condiciones de frontera o contorno en separación de medios:

- En la superficie de separación de dos medios las componentes normales de  $\mathbf{D}$  difieren en la densidad superficial de carga libre, mientras que hay **continuidad en las componentes tangenciales de  $\mathbf{E}$**  :



$$\text{Gauss en } S \text{ de 1 a 2: } \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

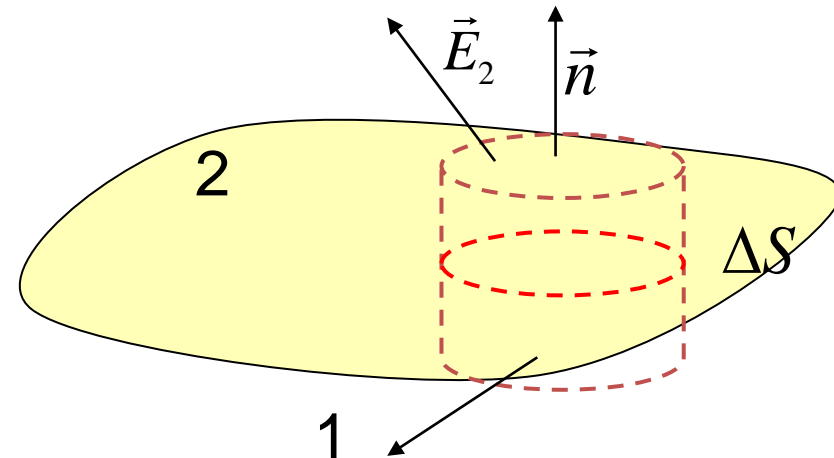
$$\vec{D}_1 \cdot (-\vec{n})\Delta S + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}\Delta S = \sigma\Delta S$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

$$\oint_S d\vec{S} \times \vec{E} = \int_V dv \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$0 = \vec{n}\Delta S \times \vec{E}_2 + (-\vec{n})\Delta S \times \vec{E}_1$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \Rightarrow E_{2t} = E_{1t}$$



Obviamente,  $\mathbf{E} = -\text{grad}(V)$  siendo **el potencial  $V$  continuo** en la superficie de separación 1-2

# Problemas

## • Problema 5.1

Se tiene un dipolo eléctrico de momento  $\mathbf{p} = p \mathbf{j}$  situado en el origen de un sistema de  $x$  y  $y$  se pide:

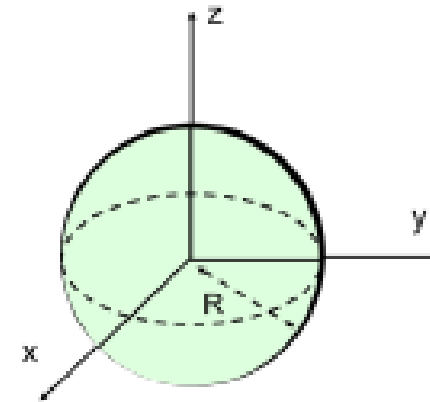
$$a) \quad \mathbf{F} = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0 d^3} \mathbf{j}$$

$$b) \quad W = \frac{3qp}{16\pi\epsilon_0 d^2}$$

- La fuerza de Coulomb que ejerce sobre una carga puntual  $q$  situada en el punto  $P(0, d, 0)$ .
- El trabajo realizado por el campo electrostático del dipolo para mover  $q$  desde el punto  $P$  anterior hasta el  $Q(0, 2d, 0)$ .

## • Problema 5.2

Se tiene una esfera de radio  $R$  rellena de un material dieléctrico, de constante relativa  $\epsilon_r$ , que tiene una distribución de carga de densidad  $\rho_0$  uniforme. Si  $r$  es la distancia al origen de coordenadas. Se pide calcular:



- El campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}(\mathbf{r})$  y vector polarización  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  en todos los puntos del espacio.
- El potencial eléctrico  $V(\mathbf{r})$  en todos los puntos del espacio.
- La densidad superficial de carga de polarización  $\sigma_p(\mathbf{r})$ .

**Sugerencia:** Repetir el problema 5.2 suponiendo que la esfera de carga tiene un hueco esférico de radio  $R/2$  y centro en  $(0,0,R/2)$ . (indicación: operar con el vector  $\mathbf{D}$  creado por esferas de carga superpuestas).

$$a) \quad r < R \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{e}_r \quad ; \quad r \geq R \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

$$r < R \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 r}{3} \mathbf{e}_r \quad ; \quad r \geq R \quad \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 R^3}{3r^2} \mathbf{e}_r$$

$$r \leq R \quad \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\rho_0 r}{3} \mathbf{e}_r$$

$$b) \quad r \geq R \quad V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} \quad ; \quad r < R \quad V(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0 \epsilon_r} (r^2 - R^2)$$

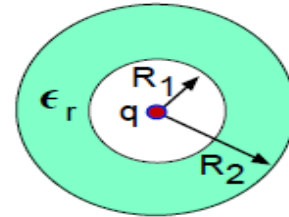


# Problemas

## • Problema 5.3

Una cáscara esférica de un material dieléctrico de permitividad  $\epsilon_r$  y radios  $R_2, R_1$ , tiene en su centro una carga puntual  $q$ . Si  $r$  es la distancia al origen se pide calcular en todos los puntos del espacio:

- El vector desplazamiento  $D(r)$ , el campo eléctrico  $E(r)$  y el vector polarización  $P(r)$ .
- El potencial eléctrico  $V(r)$ .
- Las densidades de carga superficiales  $\sigma_p$ , volumétrica  $\rho_p$  y la carga eléctrica total  $Q_p$  de polarización en el dieléctrico.



**Solución :**

$$a) \quad r < R_1 \quad E(r) = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} e_r \quad ; \quad R_2 \geq r \geq R_1 \quad E(r) = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} e_r \quad ; \quad r > R_2 \quad E(r) = \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} e_r$$

$$r < R_1 \quad D(r) = \frac{q_0}{4\pi r^2} e_r \quad ; \quad R_2 \geq r \geq R_1 \quad D(r) = \frac{q_0}{4\pi r^2} e_r \quad ; \quad r > R_2 \quad D(r) = \frac{q_0}{4\pi r^2} e_r$$

$$R_2 \geq r \geq R_1 \quad P(r) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q_0}{4\pi r^2} e_r$$

$$b) \quad r < R_1 \quad V(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1 - \epsilon_r}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} + \frac{\epsilon_r}{r} \right) \quad ; \quad R_2 \geq r \geq R_1 \quad V(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$$

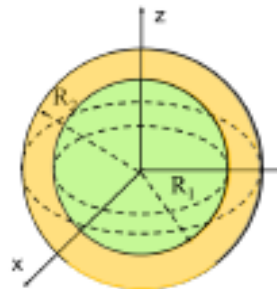
$$r > R_2 \quad V(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$$c) \quad \sigma_p(R_1) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi R_1^2} \quad ; \quad \sigma_p(R_2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{4\pi R_2^2} \quad ; \quad \rho_p = 0 \quad ; \quad Q_p = 0$$

## • Problema 5.4

Como se muestra en la figura, una esfera conductora de radio  $R_1$  que almacena una carga eléctrica  $Q$  está rodeada por una corteza esférica de material dieléctrico de permitividad  $\epsilon_r$  y radios  $R_1$  y  $R_2 > R_1$ . En función de la distancia  $r$  al centro de la esfera se pide calcular:

- El campo eléctrico  $E(r)$  y el vector polarización  $P(r)$ .
- Las densidades de carga superficiales  $\sigma_p$ , volumétrica  $\rho_p$  y la carga eléctrica total  $Q_p$  de polarización en el dieléctrico.
- El potencial  $V(r)$



$$a) \quad r < R_1 \quad E(r) = 0 \quad ; \quad R_2 \geq r \geq R_1 \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} e_r \quad ; \quad r > R_2 \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} e_r$$

$$R_2 \geq r \geq R_1 \quad P(r) = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{\epsilon_r 4\pi r^2} e_r$$

$$b) \quad \sigma_p(R_1) = -\frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r R_1^2} \quad ; \quad \sigma_p(R_2) = \frac{(\epsilon_r - 1) Q}{4\pi \epsilon_r R_2^2} \quad ; \quad \rho_p = 0 \quad ; \quad Q_p = 0$$

$$c) \quad r < R_1 \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right) \quad ; \quad R_2 \geq r \geq R_1 \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2} \right)$$

$$r > R_2 \quad V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

# Problemas

## • Problema 5.5

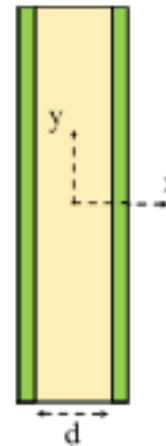
Se tiene un condensador plano-paralelo infinito, placas de área  $S$  separadas en el vacío una distancia  $d$  tal que  $d \ll \sqrt{S}$ , por lo que pueden despreciarse los efectos de borde. El condensador se carga conectándolo a una fuente de alimentación que da una diferencia de potencial de valor  $V_0$  entre las armaduras, estando la placa en  $x = d/2$  a menor potencial. Una vez cargado, se desconecta la fuente y con el condensador aislado se introduce entre sus placas una lámina descargada de material dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$ , que ocupa todo el espacio entre las armaduras. Se pide calcular:

- El campo eléctrico  $E$ , vectores desplazamiento  $D$  y de polarización  $P$  en el dieléctrico.
- La densidad de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
- La diferencia de potencial  $\Delta V'$  entre las placas del condensador con relleno dieléctrico.

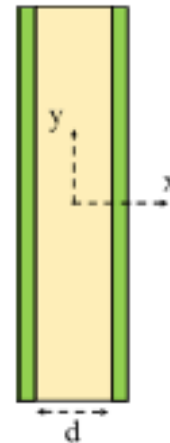
## • Problema 5.6

Se tiene un condensador plano-paralelo infinito de placas con área enfrentada  $S$  separadas en el vacío una distancia pequeña  $d$ , tal que  $d \ll \sqrt{S}$ . El condensador se carga conectándolo a una fuente de alimentación a diferencia de potencial  $V_0$  entre las armaduras, estando la placa en  $x = d/2$  a menor potencial. Manteniendo ahora esta diferencia de potencial entre sus armaduras, se introduce un dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$ . Se pide:

- El campo eléctrico  $E$ , vectores desplazamiento  $D$  y polarización  $P$  en el dieléctrico.
- La densidad de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
- La carga  $Q'$  del condensador con relleno dieléctrico.



$$\begin{aligned} \text{a) } E &= \frac{V_0}{\epsilon_r d} \mathbf{i} \quad ; \quad D = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \mathbf{i} \quad ; \quad P = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \mathbf{i} \\ \text{b) } \sigma_{p1} &= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \quad ; \quad \sigma_{p2} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \\ \text{c) } \Delta V' &= \frac{V_0}{\epsilon_r} = \frac{\Delta V_{\text{vacío}}}{\epsilon_r} \end{aligned}$$

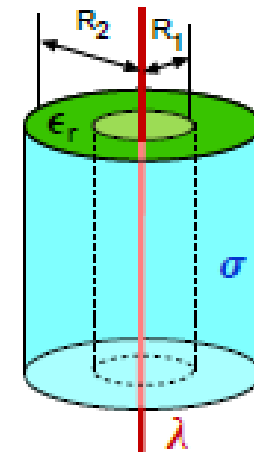


$$\begin{aligned} \text{b) } E &= \frac{V_0}{d} \mathbf{i} \quad ; \quad D = \epsilon_r \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \mathbf{i} \quad ; \quad P = (\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \mathbf{i} \\ \text{a) } \sigma_{p1} &= -(\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \quad ; \quad \sigma_{p2} = (\epsilon_r - 1) \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \\ \text{c) } Q' &= \epsilon_r \frac{\epsilon_0 S V_0}{d} = \epsilon_r Q_{\text{vacío}} \end{aligned}$$

# Problemas

## • Problema 5.7

El sistema de la figura consta de un hilo conductor de longitud infinita y densidad de carga  $\lambda$  se encuentra rodeado por un cilindro metálico coaxial de radio  $R_2$ , de espesor despreciable y densidad de carga  $\sigma = -\lambda/(2\pi R_2)$ . La región de radios  $R_1$  y  $R_2$  entre ambos está rellena de un material dieléctrico lineal de permitividad  $\epsilon_r$ . En función de la distancia radial al hilo  $\rho$  en coordenadas cilíndricas se pide en todas las regiones del espacio:



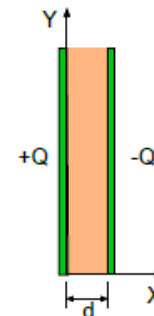
- El vector desplazamiento  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\rho)$ , el campo eléctrico  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\rho)$  y el vector polarización  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\rho)$ .
- Las densidades de carga de polarización  $\sigma_p$  y  $\rho_p$  en el dieléctrico
- El potencial eléctrico  $V(\rho)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \rho \geq R_1 & \quad \mathbf{D} = 0 \quad ; \quad \mathbf{E} = 0 \\
 R_2 > \rho > R_1 & \quad \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\rho \quad ; \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\rho} \mathbf{u}_\rho \quad ; \quad \mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\rho \\
 R_1 > \rho & \quad \mathbf{D} = \frac{\lambda}{2\pi\rho} \mathbf{u}_\rho \quad ; \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \mathbf{u}_\rho
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sigma_p(R_1) &= -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi R_1} \quad ; \quad \sigma_p(R_2) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{\lambda}{2\pi R_2} \quad ; \quad \rho_p = 0 \quad ; \quad Q_p = 0 \\
 \text{c) } \rho \geq R_1 & \quad V = 0 \quad ; \quad R_2 > \rho > R_1 \quad ; \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{\rho} \quad ; \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_r} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{R_1}{\rho} \right]
 \end{aligned}$$

## • Problema 5.8

El condensador plano-paralelo de la figura tiene área  $S$  y en sus placas, separadas una distancia  $d \ll \sqrt{S}$  se almacena una carga  $\pm Q$  como se indica. Está relleno de una pastilla de material dieléctrico con permitividad  $\epsilon_r(x)$  que toma el valor  $\epsilon_r(0) = \epsilon_1$  y  $\epsilon_r(d) = \epsilon_2$  en los lados. Se pide:



- La densidad volumétrica de carga de polarización  $\rho_p$  en función de  $\epsilon_r(x)$  y  $d\epsilon_r/dx$
- La densidad superficial de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
- La carga total  $Q_p$  de polarización en el dieléctrico.

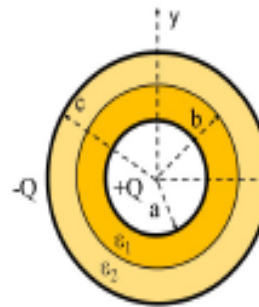
$$\begin{aligned}
 \text{a) } \rho_p &= -\frac{Q}{S} \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{d\epsilon_r}{dx} \\
 \text{b) } \sigma_p(0) &= -\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1} \frac{Q}{S} \quad ; \quad \sigma_p(d) = \frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2} \frac{Q}{S} \\
 \text{c) } Q_p &= 0
 \end{aligned}$$

# Problemas

## • Problema 5.9

Un condensador esférico que se representa en la figura de radios  $a$  y  $c$  tiene depositadas en sus placas cargas  $+Q$  y  $-Q$  respectivamente. En su interior hay dos dieléctricos en forma de corteza esférica de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  siendo  $r = b$  su superficie de separación, tal como se indica. Calcular:

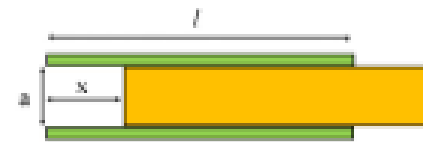
- El campo y potencial eléctrico en todo punto del espacio.
- La capacidad del condensador.



$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{aligned}
 e < r & \quad E = 0 & ; \quad V = 0 \\
 b < r < c & \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_2 r^2} e_r & ; \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \right) \\
 a < r < b & \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_1 r^2} e_r & ; \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \right] \\
 r < a & \quad E = 0 & ; \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \right]
 \end{aligned} \\
 \text{b) } & C = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 b}{\epsilon_1 \left( 1 - \frac{b}{c} \right) + \epsilon_2 \left( \frac{b}{a} - 1 \right)}
 \end{aligned}$$

## • Problema 5.10

Se tiene un condensador plano-paralelo, con superficie de placas rectangular  $S$  muy grande y separación de placas  $a$ , conectado a una fuente de alimentación con voltaje  $V_0$ . En una dirección en la que las placas tienen longitud  $l$  se introduce parcialmente una lámina de material dieléctrico de permeabilidad  $\epsilon_r$  como muestra la figura. En función de la distancia  $x$  se pide calcular:



- La capacidad
- La energía electrostática almacenada.

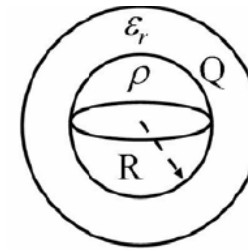
**Solución :**

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & C(x) = \frac{\epsilon_0 S}{a} \left( \frac{x}{l} + \epsilon_r \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right) \\
 \text{b) } & U_e = \frac{\epsilon_0 S}{2a} V_0^2 \left( \frac{x}{l} + \epsilon_r \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right)
 \end{aligned}$$

# Problemas (ejm. De examen, solo para trabajo personal)

2.24) Sea una corteza esférica conductora de carga  $Q$ , radio  $R$  y espesor despreciable. En su interior hay una distribución con densidad volumétrica de carga constante  $\rho = \rho_0$ . En su exterior la corteza está rodeada por un dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r$ . Se pide:

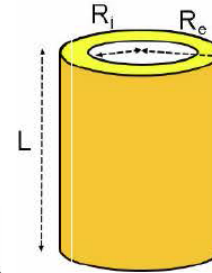
- 1) El módulo del campo eléctrico  $E(r)$  a una distancia  $r = R/2$  de su centro.
- 2) La densidad de carga superficial de polarización  $\sigma_p$  en la superficie del dieléctrico en contacto con la corteza esférica.



$$1) U_e = \frac{5q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$$

$$2) \sigma_p = -\frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \left( \frac{\rho_0 R}{3} + \frac{Q}{4\pi R^2} \right)$$

2.34) Un condensador cilíndrico de longitud  $L$ , radio interior  $R_i$  y radio exterior  $R_e$  está relleno de dieléctrico de permitividad relativa constante  $\epsilon_r$ . El condensador se encuentra cargado con una carga  $Q$ , estando la armadura exterior a mayor potencial que la armadura interior. Despreciando los efectos de borde debidos a la longitud finita del condensador, calcular la densidad superficial de carga de polarización del dieléctrico en la superficie interior,  $\sigma_{pi}$ .



$$\sigma_{pi} = \frac{(\epsilon_r - 1)Q}{\epsilon_r 2\pi R_i L}$$

Solución

- 1)  $V(R_i) = \frac{Q+q}{8\pi\epsilon_0\alpha} \left( \frac{1}{R_i^2} + \frac{\alpha R_3 - 1}{R_3^2} \right)$
- 2)  $Q_{vt} = \frac{Q+q}{\alpha} \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right)$
- 3)  $Q_{si} = -(Q+q) \frac{\alpha R_2 - 1}{\alpha R_2}$
- 4)  $Q_{se} = (Q+q) \frac{\alpha R_3 - 1}{\alpha R_3}$
- 5)  $U_e = \frac{(Q+q)^2}{16\pi\epsilon_0\alpha} \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_3^2} \right)$

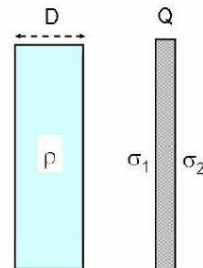
- 1)  $V_p = -(aD)/(4\epsilon_0)$
- 2)  $\sigma_2 = 3a$
- 3)  $\sigma_1 = a$
- 4)  $E = a/\epsilon_0$
- 5)  $V = (3aD)/(4\epsilon_0)$
- 6)  $P = (3/2)a$

Un conductor esférico hueco de radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$  tiene una carga  $Q$ . En el centro del conductor se encuentra una carga puntual  $q$ . El conductor está rodeado por un dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r = \alpha r$ , donde  $\alpha$  es una constante, siendo sus radios interior y exterior  $R_2$  y  $R_3$ , respectivamente. Suponiendo que el potencial electrostático  $V$  verifica  $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$ , determinar:

- 1) El potencial  $V(R_1)$ .
- 2) La carga de polarización en el interior del dieléctrico  $Q_{vi}$ .
- 3) La carga de polarización en la superficie interior del dieléctrico  $Q_{si}$ .
- 4) La carga de polarización en la superficie exterior del dieléctrico  $Q_{se}$ .
- 5) La parte de energía electrostática almacenada en el campo existente en la zona del dieléctrico  $U_e$ .

## PROBLEMA 2.3 (EXAMEN 2012-2013)

En la figura se muestra una distribución de carga de espesor  $D$ , área transversal  $S$  muy grande y densidad volumétrica  $\rho$  constante. A una cierta distancia y paralela a la distribución se coloca el conductor plano de la figura con la misma área transversal  $S$  cargado con carga  $Q$ . Para el caso en el que  $\rho D = 2a$  y  $Q/S = 4a$  siendo  $a$  una constante, determinar:



- 1) El potencial  $V_p$  producido únicamente por la distribución de carga en su superficie más próxima al conductor (supóngase que el potencial es nulo en el centro de la distribución).
- 2) La densidad superficial de carga  $\sigma_2$  en la superficie del conductor más alejada a la distribución de carga.
- 3) La densidad superficial de carga  $\sigma_1$  en la superficie del conductor más próxima a la distribución de carga.
- 4) El módulo del campo eléctrico  $E$  en el espacio vacío entre la densidad de carga y el conductor.
- 5) El potencial  $V$  en la superficie de la distribución más próxima al conductor (supóngase que el potencial es nulo en el centro de la distribución).
- 6) Si se rellena todo el espacio vacío de un dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_r = 2$ , el módulo del vector polarización  $P$  a la derecha del conductor.

# Problemas (ejm. De examen)

Examen extraordinario 9 de Julio de 2020

## Preguntas de electrostática (4 preguntas de 1 punto)

El condensador plano-paralelo de la figura consta de dos placas de espesor despreciable, con superficies enfrentadas de área  $S$  muy grande y separadas en el vacío una distancia  $D$  variable. La placa situada en  $x = 0$  está conectada a tierra. La armadura en  $x = D = d$  se encuentra inicialmente a potencial  $V_0 > 0$ .

1. El campo electrostático  $\vec{E}$  entre las armaduras es:

A.  $\vec{E} = -\frac{V_0}{d}\vec{i}$

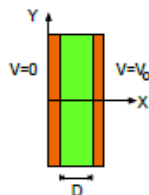
B.  $\vec{E} = \frac{V_0}{d}\vec{i}$

C.  $\vec{E} = \frac{V_0}{2d}\vec{i}$

D. Nulo

E. Ninguna de las respuestas es cierta.

F. Pregunta en blanco.



2. En esta primera configuración, la densidad superficial de carga en la armadura situada en  $x = 0$  es:

A.  $\sigma_1(0) = -\frac{\epsilon_0 V_0}{d}$

B.  $\sigma_0 = \frac{\epsilon_0 V_0}{d}$

C.  $\sigma_0 = \frac{\epsilon_0 V_0}{d}$

D. Nula

E. Ninguna de las respuestas es cierta.

F. Pregunta en blanco.

3. Manteniendo a tierra la placa situada en el origen, se procede a separar la otra armadura, manteniendo constante su potencial, hasta que la distancia es  $D = d' > d$ , la carga neta de esta armadura es:

A.  $Q_2 = \frac{V_0 \epsilon_0 S}{d'}$

B.  $Q_D = \frac{V_0 \epsilon_0 S}{d'}$

C.  $Q_D = \frac{V_0 \epsilon_0 S}{d}$

## Preguntas de operadores (2 preguntas de 1 punto)

1. El flujo del campo vectorial  $\mathbf{A} = x^2 y \mathbf{i} + z^2 x \mathbf{j} - 2 z y x \mathbf{k}$  a través de una esfera de radio  $R$  centrada en el origen es;

A.  $-\pi R^6$

B.  $3\pi^3 R^6$ ,

C.  $4\pi R^6$

D. Nulo

E. Ninguna de las respuestas es cierta.

2. La circulación del campo vectorial  $\mathbf{B} = xy(y-L)\mathbf{i} + xy(2L-x)\mathbf{j}$  a lo largo del rectángulo de la figura situado en el plano  $(X, Y)$  y recorrido en el sentido indicado es;

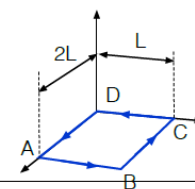
A.  $4L^4$

B.  $-8L^4$

C.  $6L^4$

D. Nulo

E. Ninguna de las respuestas es cierta.



9) Sea un cuadrado  $\Gamma$  de lado  $e$ , situado en el plano  $OXY$ , cuyos vértices son  $(0,0,0)$ ,  $(0,e,0)$ ,  $(e,0,0)$  y  $(e,e,0)$ . El cuadrado se encuentra recorrido en sentido antihorario visto desde el semieje  $z$  positivo. Dado un campo vectorial adimensional  $\vec{W} = (Bz+5)^2 Ax\vec{j}$ , donde  $B$  y  $A$  son constantes, su circulación,  $C$ , en el cuadrado es:

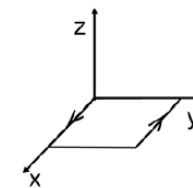
A)  $C = 9Ae^2$

C)  $C = 25Ae^2$

B)  $C = 4Ae^2$

D)  $C = 16Ae^2$

E) Ninguna de las anteriores.



10) Dado un campo vectorial adimensional  $\vec{W} = 2Ex^2\vec{j}$ , donde  $E$  es una constante, la integral de línea,  $C$ , de dicho campo desde el punto  $(0,0,0)$  al punto  $(k, Fk^2, 0)$  a lo largo de la curva:  $y = Fx^2$ ,  $z=0$ , siendo  $F$  una constante, es:

A)  $C = 2EFk^4$

C)  $C = (1/2)EFk^4$

B)  $C = EFk^4$

D)  $C = 3EFk^4$

E) Ninguna de las anteriores.

# Problemas (ejm. De examen)

VERSIÓN 1 Física II – Examen final ordinario

Curso: 16/17

Fecha: 7/06/17

Para cada cuestión se dan 5 respuestas. Marcar en la plantilla adjunta sólo la que se considere correcta.

P2. La figura representa la sección transversal central de una configuración con simetría esférica que está formada por:

- Una carga puntual  $q$  situada en el centro de la configuración dentro de una cavidad de radio  $a$  (zona 1 de la Figura) donde se ha hecho el vacío.
- Una corteza esférica metálica de radios  $a$  y  $b$  ( $a < b$ , zona 2) con carga  $Q = 3q$  cuyo centro es la carga puntual.
- Otra capa esférica concéntrica con la anterior de material dieléctrico de radios  $b$  y  $c$  ( $b < c$ , zona 3) de permitividad relativa  $\epsilon_r$  con una densidad volumétrica de carga libre  $\rho_0$  uniforme.

Se sabe que el campo eléctrico en el exterior es nulo ( $E_{ext} = 0$ , zona 4) y  $\vec{u}_r$  es el vector unitario radial, se pide:

1) El desplazamiento eléctrico en función de la distancia al centro  $r$  en la zona 1 ( $r < a$ ).

A)  $\vec{D}_1(r) = \frac{q}{4\pi r} \vec{u}_r$                       C)  $\vec{D}_1(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{u}_r$

B)  $\vec{D}_1(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_r r^2} \vec{u}_r$                       D)  $\vec{D}_1(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

E) Ninguna de las anteriores.

2) La densidad volumétrica de carga libre  $\rho_0$  añadida al dieléctrico.

A)  $\rho_0 = \frac{-3q}{\pi(c^3 - b^3)}$                       C)  $\rho_0 = \frac{-5q}{4\pi(c^3 - b^3)}$

B)  $\rho_0 = \frac{-5q}{2\pi(c^3 - b^3)}$                       D)  $\rho_0 = \frac{-3q}{\pi(c^2 - b^2)}$

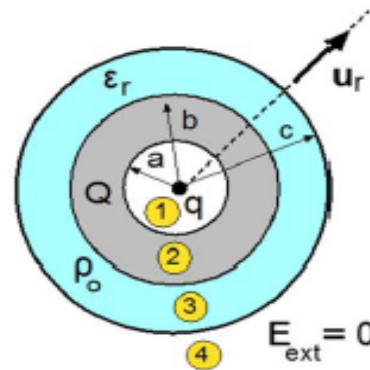
E) Ninguna de las anteriores.

3) El desplazamiento eléctrico en función de  $r$  en la zona 3 ( $b < r < c$ ).

A)  $\vec{D}_3(r) = \frac{2q}{\pi r^2} \left( \frac{c^3 - r^3}{c^3 - b^3} \right) \vec{u}_r$                       C)  $\vec{D}_3(r) = \frac{3q}{4\pi r^2} \left( \frac{c^3 - r^3}{c^3 - b^3} \right) \vec{u}_r$

B)  $\vec{D}_3(r) = \frac{q}{\pi r^2} \left( \frac{c^3 - r^3}{c^3 - b^3} \right) \vec{u}_r$                       D)  $\vec{D}_3(r) = \frac{q}{\pi r^2} \left( \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \right) \vec{u}_r$

E) Ninguna de las anteriores.



4) La densidad superficial de carga libre sobre la cara externa de la corteza metálica de radio  $b$ .

A)  $\sigma_b = q / (4\pi b^2)$                       C)  $\sigma_b = 3q / (4\pi b^2)$

B)  $\sigma_b = q / (2\pi b^2)$                       D)  $\sigma_b = q / (\pi b^2)$

E) Ninguna de las anteriores.

5) La densidad superficial de carga de polarización sobre la cara interna de la capa dieléctrica de radio  $b$ .

A)  $\sigma_{pb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{3q}{2\pi b^2}$                       C)  $\sigma_{pb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{q}{\pi b^2}$

B)  $\sigma_{pb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{3q}{\pi b^2}$                       D)  $\sigma_{pb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \frac{3q}{4\pi b^2}$

## Tres naves asaltan Marte

Es la primera vez en la historia que tres misiones van a Marte, cada una liderada por un país. El pasado 9 de febrero la sonda *Hope* de los Emiratos Árabes Unidos entró en la órbita de Marte, y el día 18, el [vehículo Perseverance de la NASA](#) llegó a la superficie de Marte. Entre medias, el 10 de febrero la sonda china *Tianwen-1* también llegó a la órbita del planeta rojo.



La sonda *Hope* de Emiratos Árabes orbitará alrededor de Marte durante un año marciano (dos terrestres) para estudiar su meteorología. La china *Tianwen-1* también mantendrá un orbitador, pero además, a

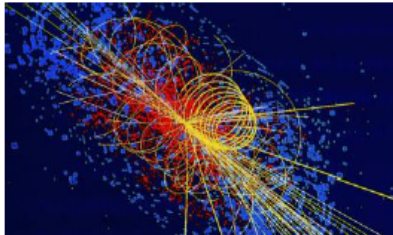
partir de mayo depositará un rover, que descenderá para explorar la región de Utopia Planitia. Por su parte, la misión estadounidense ha colocado a *Perseverance*, el vehículo más grande y sofisticado jamás enviado sobre el suelo en otro planeta.

El principal objetivo de *Perseverance* es buscar evidencias de vida microbiana en Marte,

## La temperatura de la Tierra podría llegar a un punto límite

Los árboles son unos de nuestros mayores aliados en la lucha contra el cambio climático. Los científicos calculan que, a través de la fotosíntesis, ahora mismo absorben un 25% de las emisiones de carbono producidas por los humanos. Pero esta tendencia podría revertirse en un futuro muy cercano según un estudio publicado por [Science Advances](#), que pronostica que las plantas dejaran de captar la mitad de estas emisiones dentro de 20 o 30 años, acelerando los efectos del calentamiento global.

## Nueva partícula pesada con propiedades similares al bosón de Higgs



Científicos de la UGR y la Universidad Johannes Gutenberg en Maguncia (Alemania) acaban de publicar en el [European Physical Journal C](#) un estudio donde intentan extender el modelo estándar de física de partículas y responder a algunas incógnitas que este no puede explicar: de qué está hecha la materia oscura, por que los distintos constituyentes de la materia tienen masas tan diferentes o por qué la fuerza de la gravedad es mucho más débil que la

interacción electromagnética.

# Boletín RSEF

# Número 106

# Febrero 2021

# Contenidos

-Actividades de la RSEF

-Notas de prensa

-Noticias

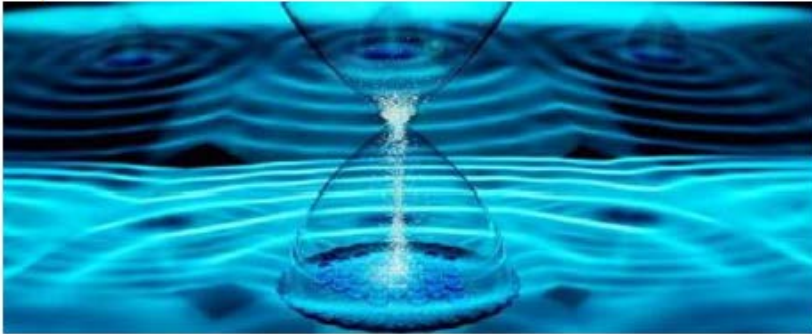
-Misceláneas

<https://rsef.es/publicaciones/boletin-electronico-de-la-rsef>



## ¡Confirman los cristales de tiempo!

Un trabajo publicado en *Nature* por dos equipos independientes de investigadores, de las Universidades de Maryland y Harvard nos habla de una nueva fase de la materia, un cristal de tiempo, en la que los átomos se mueven en un patrón que se repite en el tiempo, no en el espacio.



Los cristales normales permanecen inmóviles, ya que están en equilibrio y en su estado fundamental. Pero los cristales de tiempo siguen

oscilando incluso en su estado fundamental. Es decir, nunca alcanzan el equilibrio.

La existencia de los cristales de tiempo fue propuesta por primera vez en 2012 por el Nobel de Física Frank Wilczek, del MIT.

La creación de cristales de tiempo nos conduce hacia formas aún inexploradas de la materia y abre las puertas a una realidad que hasta hace poco se consideraba poco más que un juego matemático.

**Transporte cuántico del calor.** Un equipo formado por ingenieros de la Universidad de Michigan, físicos de la Universidad de Constanza y un profesor de la UAM, ha logrado medir, por primera vez, el transporte de calor en circuitos de tamaño atómico. El estudio se ha publicado en *Science*. Utilizaron un microscopio de efecto túnel que permite fabricar hilos metálicos de dimensiones reducidas hasta tener tan solo un átomo en su parte más estrecha. Además, también permite medir simultáneamente las corrientes eléctrica y de calor.

Pudieron observar cómo en un hilo metálico de un solo átomo el calor se transporta en unidades discretas de una cantidad fundamental conocida como cuanto de conductancia de calor. *Este es un fenómeno puramente cuántico que hemos observado por primera vez a temperatura ambiente* detalla Jose Carlos Cuevas investigador del IFIMAC (UAM).

De la Real Sociedad Española de Física <https://rsef.es/publicaciones/boletin-electronico-de-la-rsef>

