

ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Ley de Coulomb, Campo creado por distribuciones de carga, Teorema de Gauss y aplicaciones, Energía electrostática de una distribución

Programa (ver apuntes de FII de ETSIAE)

Tema	Inicio	Fin	Teor+Prob
<i>Vectores</i>	<i>31-enero</i>	<i>9-febre.</i>	<i>4+6</i>
<i>Elc. Vacío</i>	<i>12-febre.</i>	<i>23-febre.</i>	<i>4+5</i>

Tema 3. ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO

3.1 Carga Eléctrica. 3.2 Ley de Coulomb. 3.3 Campo Electrostático. 3.4 Teorema de Gauss y Aplicaciones.
3.5 Ecuaciones de la Electrostática. 3.6 Potencial Electrostático. 3.7 Trabajo. 3.8 Energía Electrostática.

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{q_i \text{ interior a } V} q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

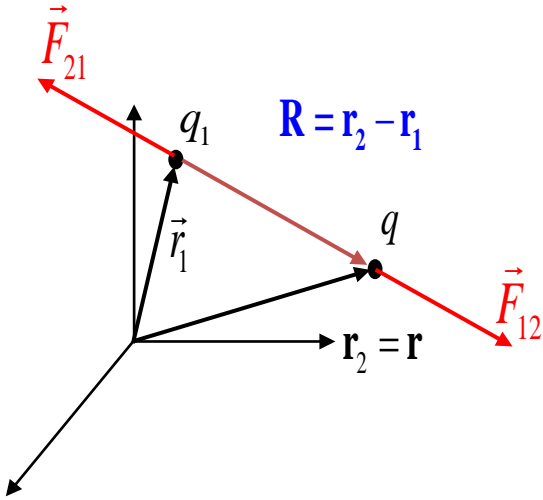
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} \, dv = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \, dv \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dv \\ \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \forall \Gamma \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla V \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla^2 V = 0, \text{ donde } \rho = 0 \end{array} \right.$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{\text{vol} \rightarrow \mathbb{R}^3} V \rho \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\oint_A V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}_{\rightarrow 0} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{v \rightarrow \infty} E^2 \, dv$$

Ley de Coulomb: interacción electrostática en el vacío.

- La fuerza de interacción entre dos cargas en reposo, separadas una distancia R en el vacío, viene dada por la conocida *Ley de Coulomb*:



$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{12} &= K_e \frac{q_1 q}{R^2} \mathbf{u}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} = -\mathbf{F}_{21}\end{aligned}$$

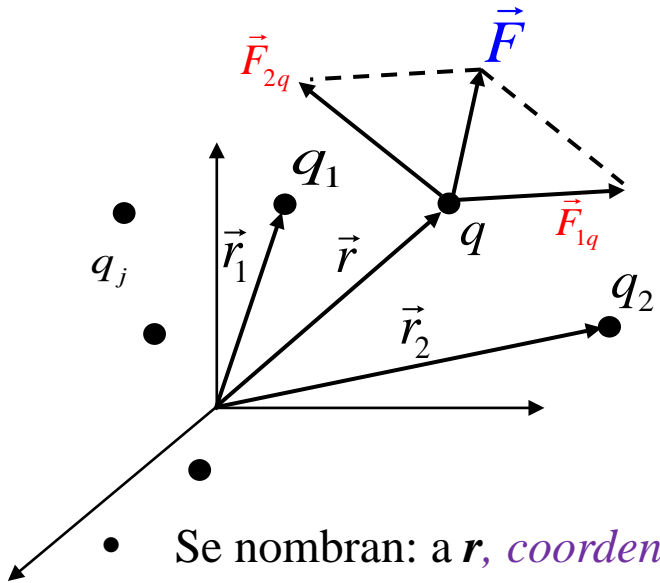
$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \quad \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{C}^2 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

- La fuerza por cada unidad de carga en el punto P ocupado por la carga de prueba q puede medirse por el vector intensidad de campo electrostático, o campo creado por q_1 en el punto P:

$$\mathbf{E}_1(\vec{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \quad (\text{en } \text{NC}^{-1})$$

Superposición:

- Si la carga q está sometida interacción con n cargas puntuales, la fuerza sobre q es la superposición:



$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_{j0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$

y

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; \{q_j\}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$

- Se nombran: a \mathbf{r} , *coordenadas de campo*, las \mathbf{r}_j (o \mathbf{r}') *son coordenadas de fuente*
- La fuerza por unidad de carga en el punto P ocupado por q daría el campo \mathbf{E} (vector intensidad de campo electrostático) creado por la distribución de cargas puntuales en el punto.
- Esta magnitud vectorial caracteriza el campo electrostático en cada punto del espacio (propiedad del espacio por estar la distribución de carga) y al poner en P una carga q de prueba, la fuerza sobre ella sería:

$$\mathbf{F} = q \mathbf{E}$$

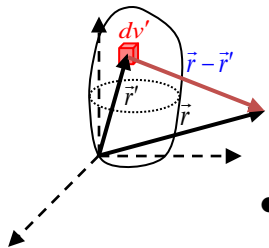
Trabajo en un campo E. Potencial: derivación física. Concepto.

- Dado que:

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow$$

- El vector campo deriva del gradiente de un potencial electrostático escalar V**

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \right) = -\nabla V \xrightarrow{\text{Define.Potencial}}$$



$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n V_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right], \quad V(\infty) = 0,$$

- El **trabajo realizado** por el campo para llevar la carga puntual de prueba q del punto de campo A al B por la curva Γ es: (resulta independiente de la curva)

$$W_{AB} = \int_{A,\Gamma}^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_{A,\Gamma}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A,\Gamma}^B [q(-\nabla V)] \cdot d\vec{l} = -q \int_A^B dV = -q(V(B) - V(A)), \quad \forall \Gamma$$

- La carga q en el punto de potencial V tiene **energía potencial electrostática**

$$E_p = qV + cte:$$

$$W_{AB} = -q(V(B) - V(A)) = -\Delta E_p; \quad E_p = qV(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla E_p = q\mathbf{E}$$

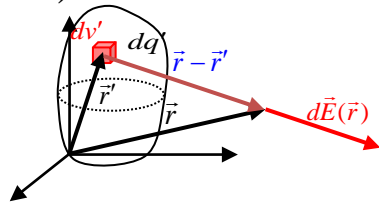
El potencial en un punto coincide con el trabajo necesario para llevar la unidad de carga desde el infinito a dicho punto.

Definición de voltio: ...completar ... discutir el **signo de W** (del campo) y W' (a realizar).

Si el trabajo es positivo, lo realiza el campo: En general, la carga q tiende a ir hacia donde su E_p disminuye

Aproximación del continuo: distribuciones continuas de carga

- A gran distancia de una distribución que ocupe volumen V (o sobre una lámina de área S o en hilo de longitud L) la carga “aparece” como continua: definimos **densidad** (volumétrica, superficial o lineal) **de carga**.
- En un volumen pequeño δv que tenga δN partículas con carga, de posición promedio \mathbf{r}' , se puede definir la densidad de carga como: (carga por cada unidad de volumen, área o longitud)



$$\rho(\mathbf{r}') = \frac{\sum_{j \text{ en } \delta V} q_j}{\delta v} \Big|_{\delta v \ll v} \equiv \frac{dq'}{dv'} \quad (Cm^{-3}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en superficie: } \sigma(\vec{r}') = \frac{dq'}{dS'} \text{ en } C/m^2 \\ \text{en un hilo: } \lambda(\vec{r}') = \frac{dq'}{dl'} \text{ en } C/m \end{array} \right.$$

- Si cada elemento de volumen (superficie o longitud) se supone pequeño, la posición \mathbf{r}_j pasa a una posición promedio \mathbf{r}' (coordenadas de fuente), y la suma en j se transforma en integral (paso al continuo) dando el vector campo (y el potencial) como:

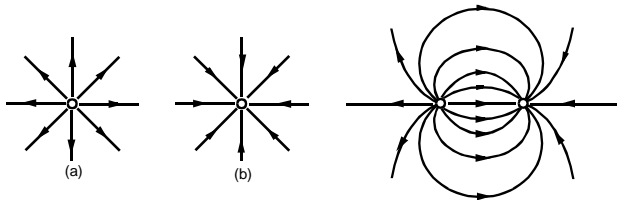
$$\left. \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{\vec{E}} d\vec{E} = \int_v \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \overbrace{\rho(\vec{r}') dv'}^{dq'} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ V(\vec{r}) &= \int_v dV = \int_{Dom} \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \text{ etc, } V(\infty) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\overbrace{\sigma(\vec{r}') dS'}^{dq'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\overbrace{\lambda(\vec{r}') dl'}^{dq'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \right.$$

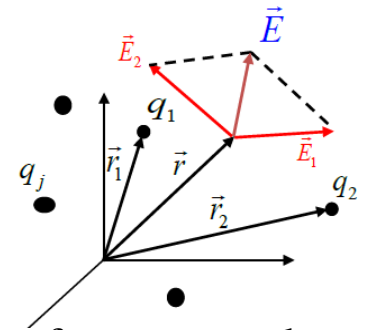
Observad que las distribuciones de carga en superficie o en hilos representan, como las cargas puntuales, singularidades (o sea, el campo tiende a infinito al evaluarlo en puntos cercanos a los ocupados por las cargas).

Líneas de campo. Flujo del campo creado por cargas puntuales.

- Las líneas de \mathbf{E} , creado una distribución de cargas, son curvas que nacen de cargas positivas (fuentes) y mueren en las negativas (sumideros).



$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^n \vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3}$$



- Matemáticamente, según significado del flujo de un vector, \mathbf{E} lo crean fuentes escalares, así, la divergencia (flujo por cada unidad de volumen, en torno a un punto, ver tema Operadores) de \mathbf{E} será nula en todo punto P que no albergue carga.
- En efecto, como $div(\mathbf{E}_j) = 0$ fuera del punto ocupado por q_j donde el campo no está definido (tiende a infinito) se da:

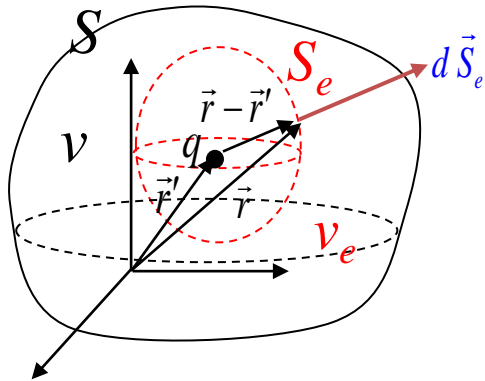
$$\nabla \cdot \left(\frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{j=1}^n \nabla \cdot \mathbf{E}_j = 0 \quad . \text{ donde no hay } q_j \rightarrow \text{ si } |\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \neq 0, \forall j.$$

- Sin embargo**, en los puntos donde están las cargas puntuales esta divergencia no está definida (es singular, 'infinita'). En general, si **la distribución es regular** (densidad de carga espacial como función regular) esta divergencia puede no ser nula: hay fuentes de campo (sin carga puntual, o en lámina o hilo)

Sugerencia: Una excelente web para texto y visualizar campos <http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/>

Flujo del campo. Teorema de Gauss en electrostática

- El flujo del campo creado por una única carga puntual a través de una esfera de radio R arbitrario que la rodee es:



$$\oint_{S_e} \vec{E} \cdot d\vec{S}_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{S_e} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS_e =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\substack{S_e=4\pi R^2 \\ |\vec{r}-\vec{r}'|=R}} \frac{dS_e}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{q S_e}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Como $\text{div}(\mathbf{E})=0$ en los puntos donde no hay carga (no se crean ni destruyen líneas de campo) lo mismo vale para toda superficie cerrada S que rodee a la carga, los puntos sin carga no suman flujo.

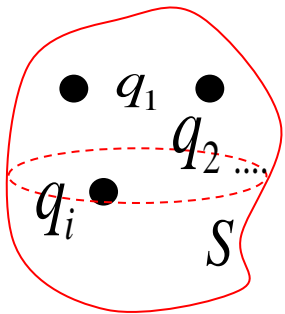
- Si $q=q_j$ está fuera de S (cerrada) en todo punto de su volumen, para el campo creado por esa carga, $\text{div}(\mathbf{E}_j)=0$, luego no hay flujo por S exterior a la carga (no se crea campo dentro de S)

$$\oint_{S_{\text{exterior a } q_j}} \vec{E}_j \cdot d\vec{S} = \int_{\text{Volumen}} \nabla \cdot \mathbf{E}_j dv = 0$$

- Para el campo \mathbf{E} creado por una distribución de cargas $\{q_n\}$ su flujo a través de S cerrada será suma de flujos debidos a cada campo \mathbf{E}_j (superposición)

Flujo del campo. Teorema de Gauss en electrostática

- El **flujo del campo resultante** a través de S cerrada será suma de flujos de cada campo \mathbf{E}_j por separado, que será nulo si es debido al campo creado por carga exterior a S .
- Como antes, dado que la divergencia de \mathbf{E} es nula donde no hay carga (no se crean ni destruyen líneas de campo) al flujo del campo **creado por TODA la distribución** a través de cualquier superficie cerrada S sólo contribuirán las cargas interiores a S :



$$\phi = \sum_{j=1}^N \phi_j = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{q_i \text{ interior a } S} \phi_i + \sum_{q_k \text{ exterior a } S} \phi_k = \frac{\sum_{q_i \text{ interior a } S} q_i}{\epsilon_0} + 0 \Rightarrow$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

• q_{ext}

- Luego: El **flujo del campo \mathbf{E} creado por una distribución** a través de S cerrada es proporcional a la carga neta Q_{int} contenida en el interior de la superficie.
- En cada punto de S , el campo es el resultante creado por toda la distribución.
- Ejm: *el flujo del \mathbf{E} de carga $+q$ positiva aislada a través de superficie S cerrada que la contenga es el mismo que el flujo del campo \mathbf{E}_{dip} de un dipolo $(-q, +q)$ a través de una superficie S cerrada que envuelva sólo a $+q$, pero ambos campos son muy distintos (ver sus líneas)*

Teorema (Ley) de Gauss en Electroestática

- En general: El flujo del campo creado por la distribución es proporcional a la carga neta dentro de la superficie **cerrada**.

- OJO; Las cargas exteriores q_{ext} **no contribuyen al flujo** a través de la superficie cerrada, **pero sí al campo** en cada punto de ella: \mathbf{E} es el repito, **campo creado por toda la carga**.

- En general, como la carga en la suma (integral) de cargas distribuidas con densidad dada:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{vol.(S)} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{vol.} \rho(\vec{r}) dv$$

- Formulación diferencial: Por el *Teorema de la Divergencia*, la divergencia del campo es proporcional a la densidad de volumétrica de carga en cada punto del espacio. Ley o

Ecuación de Poisson: (las fuentes de \mathbf{E} son las cargas).

$$\oint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dv = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} dv \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

expresión diferencial válida para todo punto del espacio, pues $\rho = 0$ donde no hay carga (si hay carga puntual en el punto, ρ diverge (infinita) y debe considerarse la forma integral de la Ley de Gauss

- Por esta razón $div(\mathbf{E})$ diverge si en el punto hay cargas puntuales q_i (o en puntos ocupados por hilos o láminas de carga) porque la densidad de carga no es regular. Recordad la *extensión del problema 2.9*.

•EJEMPLO: *ESFERA Y CILINDRO DE CARGA. Complementos*

Ecuaciones de Maxwell para Electroestática.

- El rotacional de $\mathbf{E}(q, \mathbf{r})$ es nulo **en todo punto**, incluso en $r=0$, luego \mathbf{E} de una distribución deriva de un potencial escalar V . Es campo conservativo.
- Para la electrostática las ecuaciones de Maxwell (*en formas integral y diferencial*) quedan:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dv \\ \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \forall \Gamma \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{E} = -\nabla V \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \underbrace{\nabla^2 V = 0}_{\text{Ecu. de Laplace}}, \text{ donde } \rho = 0 \end{array} \right.$$

- Por ser \mathbf{E} campo derivable de un potencial V . Lo que lleva a: (resumen)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \overbrace{\rho(\mathbf{r}') dv'}^{dq'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') dv' \left(\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') dv' \right) = -\nabla V = -grad(V)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{dq'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{Ejm. carga puntual en } \vec{r}_1: V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|})$$

Energía electrostática U de una distribución de carga

- La energía electrostática de una distribución espacial de carga: **energía necesaria para formar esa configuración**. Coincide con el trabajo realizado para disponer las cargas trayéndolas desde el infinito. Razonando por inducción:

- Para situar la carga 1 en el punto \mathbf{r}_1 libre de campo no se requiere energía $U_e(1) = 0$
- Sumando la energía necesaria para situar la carga 2, trayéndola desde el infinito, en punto \mathbf{r}_2 del campo creado por la carga 1 :

$$U_e(2) = U_e(1) + q_2 V_1(\vec{r}_2) = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{2,1}}$$

- Sumando la energía necesaria para situar la carga 3 en el punto \mathbf{r}_3 del campo creado por las cargas 1 y 2 :

$$\begin{aligned} U_e(3) &= U_e(2) + q_3 V_{1,2}(\vec{r}_3) = \\ &= \left(q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) + q_3 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2 q_1}{r_{2,1}} + \frac{q_3 q_1}{r_{3,1}} + \frac{q_3 q_2}{r_{3,2}} \right) \\ &= \sum_{\text{pares}(i,j)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{\text{pares}(i,j)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} \end{aligned}$$

U para distribución regular de carga:

- Pero la suma en pares también se puede expresar como:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_2 q_1}{r_{2,1}} + \frac{q_3 q_1}{r_{3,1}} + \frac{q_3 q_2}{r_{3,2}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}} + \frac{q_1 q_3}{r_{1,3}} + \frac{q_2 q_1}{r_{2,1}} + \frac{q_2 q_3}{r_{2,3}} + \frac{q_3 q_1}{r_{3,1}} + \frac{q_3 q_2}{r_{3,2}} \right) \rightarrow$$

$$\sum_{\text{pares}(i,j)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{i,j}} \right)$$

- Para introducir la carga 4, la 5 ... y la n -ésima en el campo creado por las $n-1$ restantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_e(4) = U_e(3) + q_4 V_{1,2,3}(\vec{r}_4) = \sum_{\text{pares}(i,j)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \dots \\ U_e(n) = U_e(n-1) + q_n V_{1,\dots,n-1}(\vec{r}_n) = \sum_{\text{pares}(i,j)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_e = \sum_{\text{pares}(i,j)}^{n,n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} \\ U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1 \dots n}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{i,j}} \right) \end{array} \right.$$

- notando por V_{qi} el potencial creado en la posición de q_i por las $(n-1)$ cargas restantes:

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{i,j}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_{qi}(\mathbf{r}_i)$$

U para distribución regular de carga:

- Si la **distribución no tiene singularidades** (cargas puntuales) la densidad de carga es una función **suave (regular)** y la energía U_e se puede evaluar por integración directa según:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{q_{total}} dq V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{vol} \rho dv \\ \frac{1}{2} \int_s \sigma ds \end{cases} = \frac{1}{2} QV, \text{ Ejm. si S es superficie equipotencial}$$

Que puede calcularse en función del campo, extendiendo la integral al infinito, si ni hay carga en el infinito, con:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot (\mathbf{VE}) = V \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla V \\ \text{con } \mathbf{E} = -\nabla V \text{ y } \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{VE}) = V \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = \frac{V\rho}{\epsilon_0} - E^2 \\ \int dv \nabla \cdot (\mathbf{VE}) = \oint \mathbf{VE} \cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

$$U_e = \underbrace{\frac{1}{2} \int_{vol \rightarrow \mathbb{R}^3} V \rho dv}_{\text{Ener. almacenada por la distribuc.}} = \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \oint_A V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}_{\rightarrow 0} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 dv = \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int_{v \rightarrow \infty} E^2 dv}_{\text{Ener. del campo}}$$

- La integral de superficie es cero: si el volumen de integración v se extiende a todo el espacio (con una distribución regular *sin carga en el infinito*) para r **grande**, sobre una superficie S esférica de radio r se dan los comportamientos asintóticos:

$$V \sim 1/r, \quad E \sim 1/r^2 \text{ y } S \sim r^2 \quad \Rightarrow V E S \sim 1/r \sim 0$$

Ejemplos.

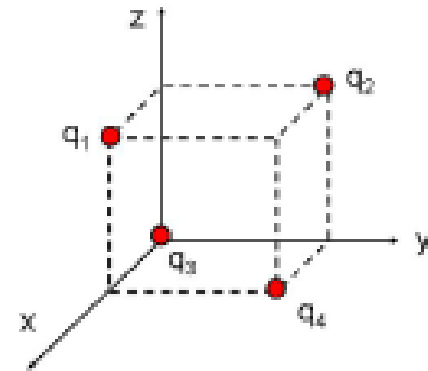
• Problema 3.1

Cuatro cargas eléctricas puntuales de valores $q_1 = q_2 = 1 \mu\text{C}$ y $q_3 = q_4 = -1 \mu\text{C}$, se sitúan en cuatro de los vértices de un cubo de arista $a = 3\text{m}$ como se muestra en la figura. Determinése:

- El valor del campo electrostático creado por las cargas q_1, q_2 y q_4 en el origen de coordenadas.
- La fuerza electrostática que actúa sobre la carga q_3 .

Solución :

- $\mathbf{E} = -\frac{\sqrt{2}}{2} k 10^3 \text{ V/m} .$
- $\mathbf{F} = 5\sqrt{2} 10^{-4} k \text{ N} .$



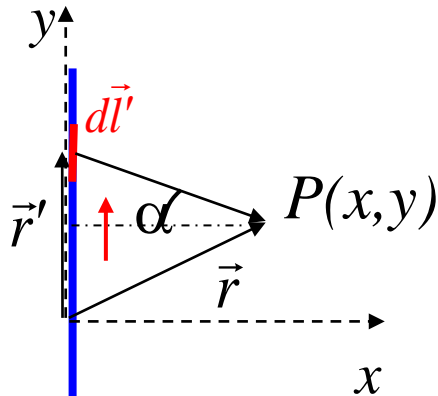
Sugerencias:

- 3) Evaluar el potencial electrostático V del campo que crean las cargas 1,2 y 4 en el origen.
- 4) Energía potencial electrostática de q_3 en el campo que crean las demás cargas y trabajo necesario para llevar ésta del origen al infinito.
- 5) *Energía electrostática* U de la distribución de todas las cargas.

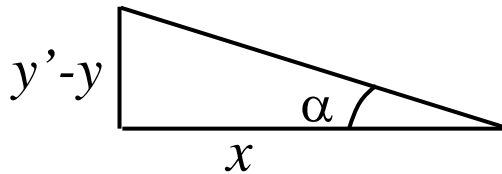
Campos de distribuciones de carga simples (Ver Problema 3.2)

Campo de hilo de carga $\lambda = cte$ y longitud L en un punto del plano

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{r}' = y'\vec{j}; \quad dl' = dy' \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl'(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{y'=Y_{\min}}^{y'=Y_{\max}} dy' \frac{\lambda(x\vec{i} + (y - y')\vec{j})}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}}$$

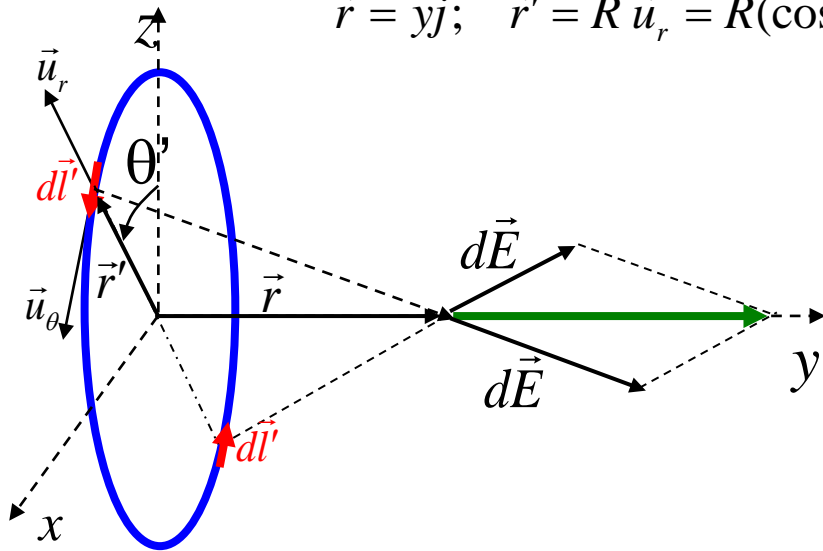


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y}{x} \Rightarrow dy' = x \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{x^2 + (y - y')^2}{x} d\alpha$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \cos \alpha d\alpha \vec{i} - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 x} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sin \alpha d\alpha \vec{j}$$

Anillo de carga (problema 3.3)

Carga en aro de $\lambda = cte$ y radio R en un punto de su eje



$$\vec{r} = y\vec{j}; \quad \vec{r}' = R \vec{u}_r = R(\cos \theta' \vec{k} + \sin \theta' \vec{i})$$

$$dl' = R d\theta'$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\theta' (y\vec{j} - R(\sin \theta' \vec{i} + \cos \theta' \vec{k}))}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta' y \vec{j}}{(y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ry}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \vec{j}$$

También $\vec{E} = \int |d\vec{E}| \cos \alpha \vec{j}$

cambio $\cos \alpha = \frac{y}{(y^2 + R^2)^{1/2}}$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{R d\theta'}{(y^2 + R^2)} \cos \alpha \vec{j} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ry}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \vec{j}$$

Campo creado por disco de densidad superficial de carga $\sigma = cte$ y radio R en un punto de eje OY

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r' d\theta' dr' (y\vec{j} - r'(\sin\theta'\vec{i} + \cos\theta'\vec{k}))}{(y^2 + r'^2)^{3/2}}$$

Integrando para toda la superficie del disco (ver problema 3.4)

$$\vec{E}(y) = \frac{\sigma y}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(y^2 + r'^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta' \vec{j}$$

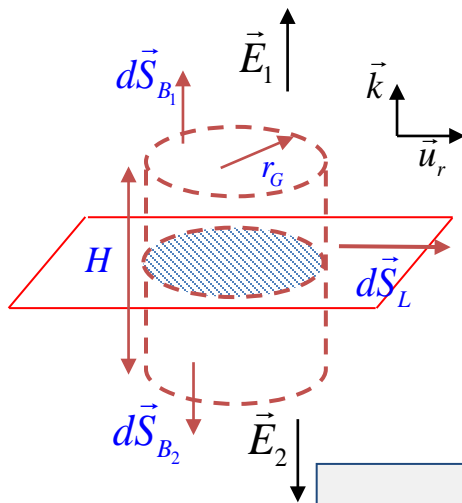
Si se procede a hacer el radio R infinito (límite) se obtiene el campo de una lámina plana de carga sobre el plano $z=0$, que resulta perpendicular a la lámina (dirección del eje OZ con cambio de sentido en la lámina):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \mathbf{k}$$

Método de superficies de Gauss

Plano infinito de carga (comparar con problema 3.4 con radio R infinito)

- Distribución superficial de carga uniforme en *plano infinito* tomando superficie gaussiana tipo “caja de píldoras”



$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = E \vec{k}; \quad d\vec{S}_L = dS_L \vec{u}_r \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} =$$

$$d\vec{S}_{B_1} = -d\vec{S}_{B_2} = dS \vec{k}; \quad \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2E(Z_G) \pi r_G^2 \quad ; \quad q_{dentro} = \int_0^{r_G} \sigma 2\pi r dr = \sigma \pi r_G^2$$

$$E(z) = \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{sign}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}; & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}; & z < 0 \end{cases}$$

$$V(z) = \begin{cases} -\int_0^z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz' = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z, & z \geq 0 \\ -\int_z^0 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dz' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z, & z \leq 0 \end{cases}$$

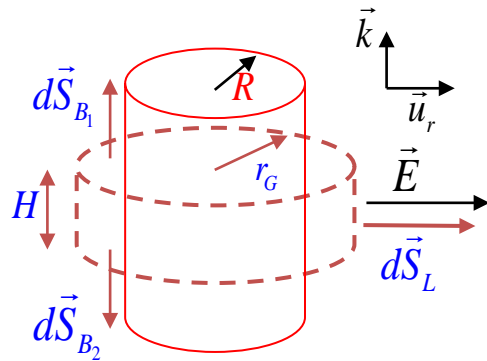
(si $V(0) = 0 \Rightarrow V(z) = -\sigma |z| / 2\epsilon_0$)

- Si la densidad superficial de carga varía radialmente como se indica, calcula la carga total Q del plano e indica cómo calcular \mathbf{E} en un punto del eje OZ.

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{r}{R_0}} \quad (\sigma_0 \text{ y } R_0 \text{ constantes}) \quad \text{sol. } Q = 2\pi\sigma_0 R_0^2, \quad \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} z \vec{k} \int_0^\infty \frac{r' \exp(-r'/R_0)}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} dr' \quad (\text{como 3.4})$$

Método de superficies de Gauss , cilindro infinito de carga Prob. 3.8

Cilindro de longitud infinita, de carga homogénea y potencial de referencia nulo a la distancia R del eje:



$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = E \vec{u}_r; \quad d\vec{S}_L = dS_L \vec{u}_r$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} =$$

$$d\vec{S}_{B_1} = -d\vec{S}_{B_2} = dS \vec{k};$$

$$\oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_2}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r_G) 2\pi r_G H$$

$$q_{\text{int}} = \int_0^r \rho dv = \int_0^r \rho 2\pi r H dr = \begin{cases} \rho \pi r^2 H; & r \leq R \\ \rho \pi R^2 H; & r > R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho R^2}{2r\epsilon_0} & \text{si } r > R \end{cases}$$

$$\int_R^r dV = V(r) = -\int_R^r E(r') dr' \Rightarrow V = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2), & r \leq R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

- ¿Cómo se comportan E y V en el límite de r tendiendo a infinito? Indica cómo resolver el problema si al densidad variara con z según (evalúa la carga total):

Sol. Por integración directa como 3.5, basta indicarlo

$$\rho(z) = \rho_0 \frac{R^2}{z^2 + R^2} \quad (\text{si } 0 \leq r \leq R, \forall z; \rho = 0 \text{ si } r > R)$$

Esfera de carga. Método de superficies de Gauss (Problema 3.7)

Tomando superficies gaussianas esféricas concéntricas dentro y fuera de la distribución:

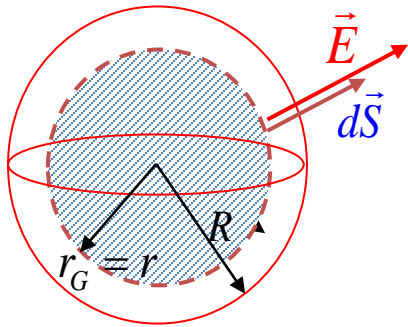
$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad \vec{E} = E \vec{u}_r; \quad d\vec{S} = dS \vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r \rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E \vec{u}_r \cdot dS \vec{u}_r = \oint_S E(r_G) dS = E(r_G) S = E(r_G) 4\pi r_G^2$$

$$q_{\text{int}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} Q = \frac{r^3}{R^3} Q \quad (\text{si } \rho \text{ uniforme})$$

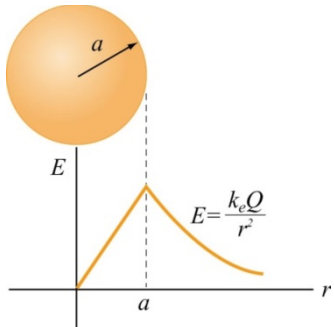
$$q_{\text{int}} = \begin{cases} \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3} \pi r_G^3; & r \leq R \\ \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3} \pi R^3; & r > R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} = E_i; & r \leq R \\ \frac{\rho R^3}{3r^2\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = E_e; & r > R \end{cases}$$



Atención a los límites de integración para V :

$$\text{Potencial : } dV = -E dr \rightarrow \int_{V(a)}^V dV = - \int_{r=a}^r E(r') dr'$$



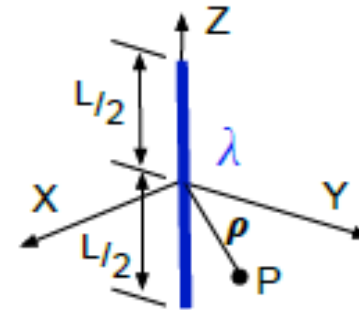
$$\int_0^V dV = - \int_{\infty}^{r \geq R} E(r') dr' \rightarrow V - 0 = - \int_{\infty}^{r \geq R} E_e(r') dr' \rightarrow V = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}; \quad r \geq R$$

$$\int_{V(R)}^V dV = - \int_R^{r \leq R} E(r') dr' \rightarrow V - V(R) = - \int_R^{r \leq R} E_i(r') dr' \rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right); \quad r \leq R$$

Ver el ejemplo de esfera de carga con hueco excéntrico, Prob. 3.8, en mis Complementos a la clase.

• Problema 3.2

Un hilo rectilíneo de longitud L , situado sobre el eje OZ como muestra la figura, se encuentra cargado uniformemente con una carga total Q .



- Calcular el potencial y el campo electrostáticos en un punto P del espacio a una distancia $\rho = r$ del centro del hilo.
- Obtener el potencial V si el punto P es un punto cualquiera del espacio (úsense coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) tomando el centro geométrico del hilo en el origen del sistema de referencia). ¿Puede obtenerse del potencial V el campo electrostático en todo punto del espacio?

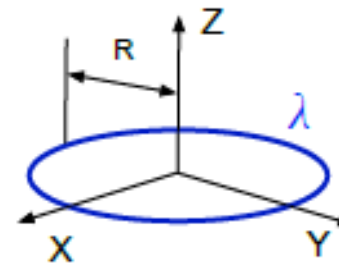
$$a) E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho\sqrt{L^2+4\rho^2}}\mathbf{u}_\rho ; V(\rho) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{L+\sqrt{L^2+4\rho^2}}{2\rho}$$

$$b) V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln \left[\frac{\sqrt{\rho^2+(z-L/2)^2}-(z-L/2)}{\sqrt{\rho^2+(z+L/2)^2}-(z+L/2)} \right]$$

$$c) \text{ Si, porque hay simetría cilíndrica } E = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\mathbf{u}_\rho - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}$$

• Problema 3.3

El anillo de radio R de la figura está sobre el plano $z = 0$ con centro en el origen, almacena una carga neta Q uniformemente distribuida. Hallar el potencial y el campo electrostáticos creados por el anillo de carga en un punto cualquiera P del eje Z .



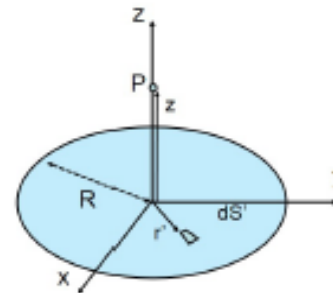
Solución :

$$E = \frac{Qz\mathbf{k}}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}} ; V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(R^2+z^2)^{1/2}}$$

• Problema 3.4

Un disco circular de radio R se halla cargado con distribución superficial de carga uniforme de densidad σ . El disco de carga tiene su centro en el origen de coordenadas y está situado en el plano $z = 0$ como se muestra. Se pide:

- El valor del campo y potencial electrostáticos en todo punto del eje Z .
- El trabajo realizado por el campo creado por esta distribución para llevar una carga puntual q desde el punto $(0, 0, -b)$ hasta el punto $(0, 0, b)$.



Solución :

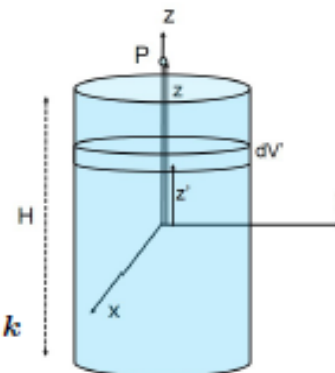
$$\begin{aligned} \text{a) } E(z) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|} \right) ; \quad V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \\ \text{b) } W &= 0 \end{aligned}$$

• Problema 3.5

El cilindro de radio R y altura H que muestra la figura alberga la carga estática Q distribuida uniformemente por todo su volumen. Hállese el campo electrostático creado por este volumen de carga en un punto genérico del eje Z exterior al cilindro.

Solución :

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2 H} \left(H + \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{H}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{H}{2}\right)^2} \right) \mathbf{k}$$



Problemas

• Problema 3.6

La figura adjunta muestra el esquema de una distribución infinita de carga que ocupa todo el volumen comprendido entre los planos $x = -D/2$ y $x = D/2$ del espacio. La carga está almacenada con distribución volumétrica de carga dada por la relación

$$\rho = 2\rho_0 \frac{|x|}{D} \quad \left(-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}\right)$$

Hállese el campo y el potencial electrostáticos en todo punto del espacio en función de x , considerando que el potencial es nulo para $x = 0$.

Sugerencia: Repetir el problema añadiendo en los planos $x=D/2$ y $x = -D/2$ láminas infinitas de carga de densidades superficiales σ y $-\sigma$ ¿cuánto vale E en $x=0$ entonces?

• Problema 3.7

Determinar en todas las regiones del espacio el campo y potencial electrostáticos creados por una esfera de radio R y carga neta Q que se distribuye como en los tres casos siguientes:

- Uniformemente sólo sobre la *superficie* de la esfera.
- De modo uniforme por todo el *volumen* de la esfera.
- Con distribución densidad volumétrica $\rho = kr$, donde k es una constante a determinar en función de Q y R .

a) Esfera de carga con densidad superficial $\sigma_o = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$$r < R \quad E = 0 \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o R} = \frac{\sigma_o R}{\epsilon_o}$$

$$r > R \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r^2} e_r \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r}$$

b) Esfera de carga con densidad constante $\rho_o = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

$$r < R \quad E = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_o R^3} e_r = \frac{\rho_o r}{3\epsilon_o} \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$$

$$r > R \quad E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r^2} e_r = \frac{\rho_o R^3}{3\epsilon_o} \frac{r}{r^3} \quad ; \quad V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r}$$

c) Esfera de carga con densidad variable y carga neta $Q = \pi k R^4$

$$r < R \quad E = \frac{kr^2}{4\epsilon_o} e_r \quad ;$$

$$r > R \quad E = \frac{kR^4}{4\epsilon_o r^2} e_r \quad ;$$

$$V = \frac{k}{12\epsilon_o} (4R^3 - r^3)$$

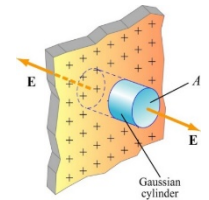
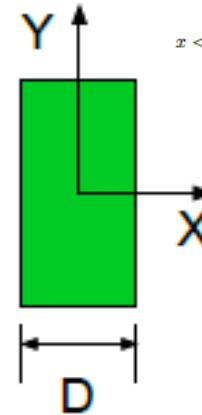
$$V = \frac{kR^4}{4\epsilon_o r}$$

$$0 < x < D/2 \quad E = \frac{\rho_o x^2}{D\epsilon_o} i \quad ; \quad V = -\frac{\rho_o x^3}{3\epsilon_o D}$$

$$D/2 < x < 0 \quad E = -\frac{\rho_o x^2}{D\epsilon_o} i \quad ; \quad V = \frac{\rho_o x^3}{3\epsilon_o D}$$

$$x > D/2 \quad E = \frac{\rho_o D}{4\epsilon_o} i \quad ; \quad V = \frac{\rho_o D}{4\epsilon_o} \left(\frac{D}{3} - x\right)$$

$$x < -D/2 \quad E = -\frac{\rho_o D}{4\epsilon_o} i \quad ; \quad V = \frac{\rho_o D}{4\epsilon_o} \left(\frac{D}{3} + x\right)$$



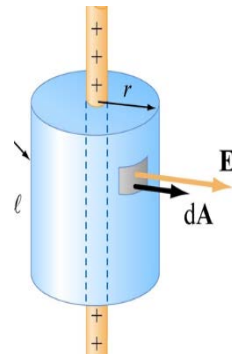
Sugerencia:

- Evaluar la energía U electrostática de la distribución.
- Repetir el problema si $\rho = \rho_o(1 - cr)$ calculando primero c para que Q sea nula y verificar que el campo es superposición del campo de la esfera homogénea de carga ρ_o y del anterior para $k = -c\rho_o$

Problemas (Cilindro de H "infinita"). Superposición de distribuciones

● Problema 3.8

Hállese el campo y el potencial electrostáticos debidos a la carga almacenada en un cilindro de radio R y suficientemente largo para considerar su altura infinita, cuyo eje yace sobre el eje Z . La carga se distribuye con densidad volumétrica de carga constante ρ_o . Considérese nulo el potencial para $r = R$, siendo r la variable radial ρ de las coordenadas cilíndricas.

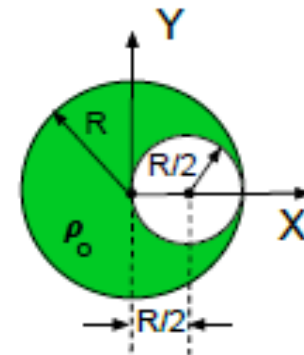


Solución :

$$r < R \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_o r}{2 \epsilon_o} \mathbf{u}_r \quad ; \quad V = \frac{\rho_o}{4 \epsilon_o} (R^2 - r^2)$$

$$r > R \quad \mathbf{E} = \frac{\rho_o R^2}{2 \epsilon_o r} \mathbf{u}_r \quad ; \quad V = \frac{\rho_o R^2}{2 \epsilon_o} \ln \frac{R}{r}$$

● **Problema 3.9** Una esfera de radio R con centro en el origen está cargada uniformemente con densidad de carga volumétrica ρ_o , excepto en el hueco excéntrico de radio $R/2$ que muestra la figura. Calcular el campo electrostático \mathbf{E} creado por la distribución de carga en todos los puntos del espacio.



Solución :

Siendo $\mathbf{r}_h = \mathbf{r} - \frac{R}{2} \mathbf{i}$, y $r_h = |\mathbf{r}_h| = \sqrt{(x - R/2)^2 + y^2 + z^2}$, se tiene

En interior del hueco:
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o}{3 \epsilon_o} \mathbf{r} - \frac{\rho_o}{3 \epsilon_o} \mathbf{r}_h = \frac{\rho_o R}{6 \epsilon_o} \mathbf{i}$$

En la zona con carga:
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o}{3 \epsilon_o} \mathbf{r} - \frac{\rho_o (R/2)^3}{3 \epsilon_o} \frac{\mathbf{r}_h}{r_h^3}$$

En la zona exterior:
$$\mathbf{E} = \frac{\rho_o R^3}{3 \epsilon_o} \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\rho_o (R/2)^3}{3 \epsilon_o} \frac{\mathbf{r}_h}{r_h^3}$$

Energía electrostática almacenada:

• Problema 3.10

Tres cargas puntuales de valores q , $2q$ y $3q$ se encuentran situadas en los puntos $P_1(0, 0, a)$, $P_2(0, a, 0)$ y $P_3(a, 0, 0)$, respectivamente. Se pide:

- Calcular la energía electrostática U_e del sistema.
- Energía potencial electrostática E_p , debida al campo creado por las tres cargas, de una carga puntual Q que se situara en el origen.
- Energía electrostática U'_e de la nueva distribución creada al añadir Q .

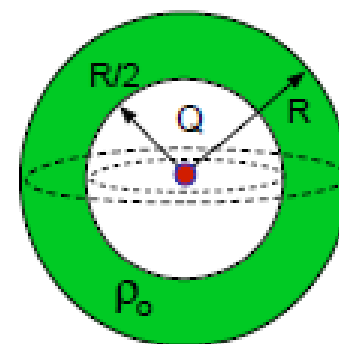
$$a) U_e = \frac{11 \sqrt{2} q^2}{8 \pi \epsilon_0 a}$$

$$b) E_p = Q \frac{3q}{2 \pi \epsilon_0 a}$$

$$a) U'_e = U_e + E_p$$

• Problema 3.11

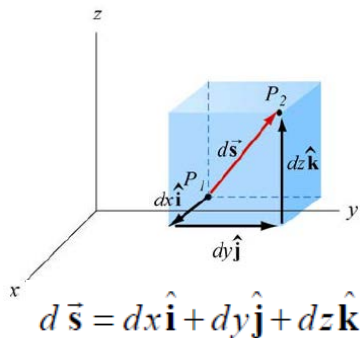
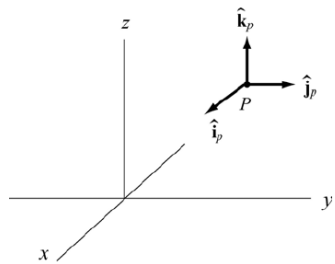
La distribución de carga de la figura consta de una carga puntual Q en el origen y una corteza esférica con densidad volumétrica de carga ρ_0 uniforme de radios interior $R/2$ y exterior R . Calcular la energía electrostática U_e del sistema. (Sugerencia: puede ser útil determinar el potencial electrostático del campo creado por la distribución continua de carga de la corteza).



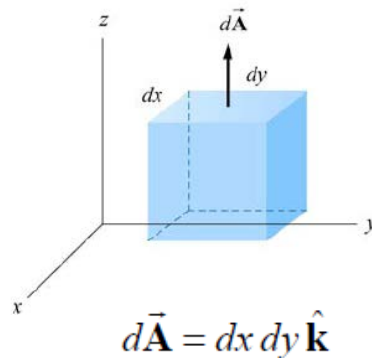
Solución :

$$U_e = \frac{3Q \rho_0 R^2}{8 \epsilon_0} + \frac{47 \pi \rho_0^2 R^5}{240 \epsilon_0}$$

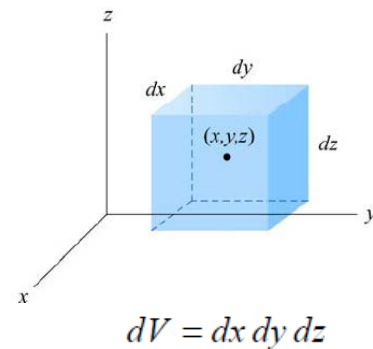
Coordinates. Line, surface and volume Elements.



$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

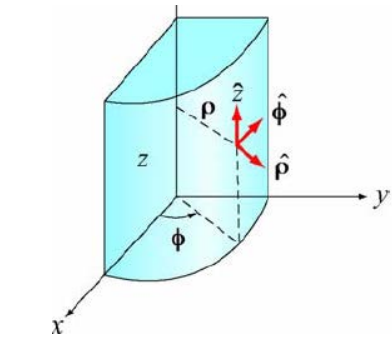


$$d\vec{A} = dx dy \hat{k}$$

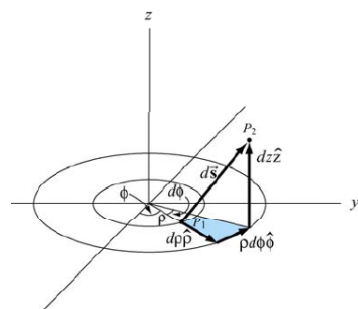


$$dV = dx dy dz$$

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi$$

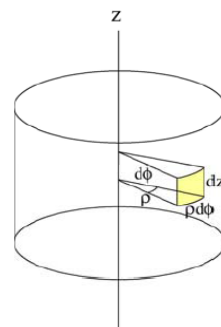


$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

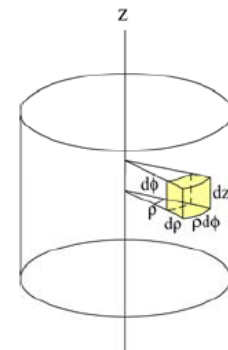


$$d\vec{s} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k}$$

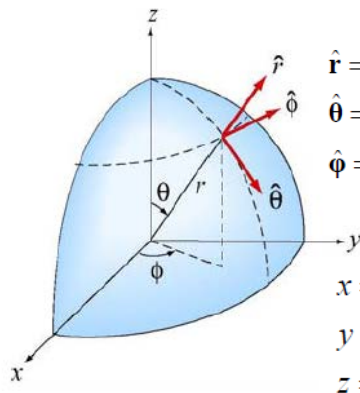
$$d\vec{A} = \rho d\phi d\rho \hat{k}$$



$$dA = \rho d\phi dz$$



$$dV = \rho d\phi d\rho dz$$



$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

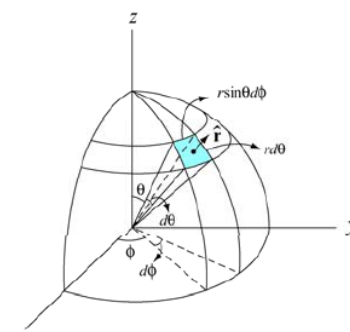
$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

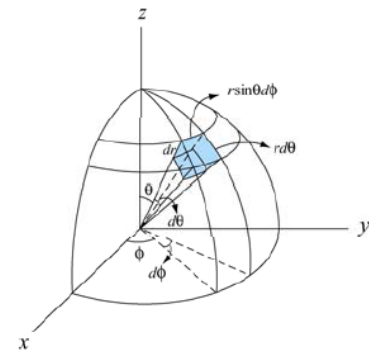
$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$



$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$

CONTROL 2010-11

2.1) Un sistema está formado por cuatro cargas eléctricas puntuales fijas en los vértices de un cuadrado de lado a , en el vacío. Las cuatro cargas tienen el mismo valor absoluto, q , siendo tres de ellas positivas y la otra negativa. Considerando $V = 0$ en el infinito, se puede afirmar que en el centro del cuadrado:

- 1) El potencial es nulo.
- 2) $V = \sqrt{2}q / (2\pi\epsilon_0 a)$
- 3) El campo electrostático es nulo $\vec{E} = 0$.
- 4) $|\vec{E}| = q / (4\pi\epsilon_0 a^2)$
- 5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 2)

2.2) Un sistema está formado por cuatro cargas eléctricas puntuales fijas en los vértices de un cuadrado de lado a , en el vacío. Las cuatro cargas tienen el mismo valor absoluto, q , siendo tres de ellas positivas y la otra negativa. Calcular la energía electrostática del sistema.

Solución: 0

2.3) Una espira circular de radio R está contenida en el plano $z = 0$ con su centro en el origen y tiene una densidad longitudinal de carga λ constante. Calcular el potencial que crea en un punto $P(0,0,z)$.

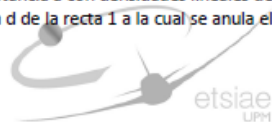
Solución: $V(0,0,z) = \lambda R / (2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2})$

2.4) Una espira circular de radio R está contenida en el plano $z = 0$ con su centro en el origen y tiene una densidad longitudinal de carga λ constante. Calcular el campo electrostático en el punto $P(0,0,z)$.

Solución: $\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$

2.5) Se tienen dos rectas infinitas, paralelas y separadas una distancia a con densidades lineales de carga λ_1 y λ_2 positivas siendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Obtener la distancia d de la recta 1 a la cual se anula el campo electrostático.

Solución: $d = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a$



2.8) Dado el potencial electrostático $V = A(x^2 + y^2 + z^2)$, para $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, donde A es constante con dimensiones. Se verifica, para todos los puntos de esta región del espacio, que:

- 1) El campo electrostático es: $\vec{E} = 2A(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.
- 2) La densidad de carga es: $\rho = 3A\epsilon_0$.
- 3) La densidad de carga es: $\rho = -6A\epsilon_0$.
- 4) La densidad de carga es: $\rho = A\epsilon_0$.
- 5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

CONTROL 2011-12

2.13) Tres cargas puntuales del mismo valor q se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de lado a . Considerando $V(\infty) = 0$ y llamando \vec{E} y V al campo y al potencial eléctricos generados por las cargas en el centro del triángulo, se verifica:

- 1) $|\vec{E}| = 0$; $V = 0$.
- 2) $|\vec{E}| = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$; $V = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$.
- 3) $|\vec{E}| = 0$; $V = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$.
- 4) $|\vec{E}| = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2}$; $V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a}$.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta

Solución: 3)

2.14) Tres cargas puntuales del mismo valor q se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de lado a . Calcular la energía electrostática del sistema.

Solución: $U_e = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a}$

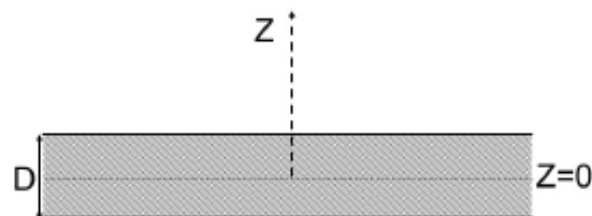
2.15) Una placa infinita de espesor D está cargada con una densidad volumétrica de carga dada por:

$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{z}{D}\right)^2$, donde z es la coordenada que se muestra en la figura. Se pide:

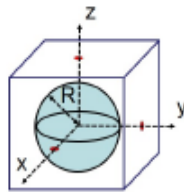
- 1) El campo eléctrico en un punto exterior a la placa.
- 2) El campo eléctrico en un punto interior a la placa.
- 3) El potencial eléctrico en puntos exteriores a la placa tomando potencial nulo en $z = 0$.
- 4) El potencial eléctrico en puntos interiores a la placa tomando potencial nulo en $z = 0$.

Solución:

- 1) $|\vec{E}| = \frac{1}{24} \frac{\rho_0 D}{\epsilon_0}$
- 2) $|\vec{E}| = \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0 D^2} |z|^3$
- 3) $V = \frac{\rho_0 D}{8\epsilon_0} \left(\frac{D}{8} - \frac{z}{3}\right)$
- 4) $V = -\frac{1}{12} \frac{\rho_0}{\epsilon_0 D^2} z^4$

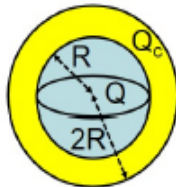


2.27) Se tiene una esfera, de radio R y densidad de carga $\rho(r) = ar^2\epsilon_0$, centrada en el origen de coordenadas O siendo r la distancia al origen, a una constante y ϵ_0 la constante dieléctrica del vacío. Calcular el flujo ϕ del campo eléctrico a través de un cubo de centro geométrico O y arista $d = 6R$.



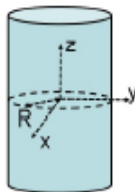
Solución: $\phi = \frac{a4\pi R^5}{5}$

2.28) Una distribución esférica uniforme de carga Q y radio R se rodea de un conductor en forma de corteza esférica. Los radios interior y exterior del conductor son R y $2R$, respectivamente, y su carga $Q_c = 2Q$. Calcular la densidad superficial de carga σ en la superficie de radio $2R$.



Solución: $\sigma = \frac{3Q}{16\pi R^2}$

2.29) Se tiene un cilindro de longitud infinita, radio R y densidad de carga $\rho(r) = ar\epsilon_0$ siendo r la distancia al eje del cilindro, a una constante y ϵ_0 la constante dieléctrica del vacío. Tomando como referencia $V(r=R)=0$, el potencial $V(r)$ en un punto interior del cilindro es:



Solución: $V(r) = -\frac{a}{9}(r^3 - R^3)$

2.19) En una distribución estacionaria de cargas, ¿para qué valor de a el campo vectorial definido por $\vec{W} = c(x^2y\vec{i} + ax^3\vec{j})$, donde c y a son constantes, podrá ser un campo eléctrico?

Solución: $a = 1/3$

2.20) Tres cargas puntuales de valor q cada una están situadas en los puntos $A(0,0,0)$, $B(d,0,0)$ y $C(2d,0,0)$ de un sistema de referencia $OXYZ$. Se pide:

- 1) El flujo ϕ del campo eléctrico creado por las cargas a través de una esfera de radio $R=3d/2$ centrada en el origen O .
- 2) La energía electrostática U_e del sistema de tres cargas puntuales.

Solución:

1) $\phi = 2q / \epsilon_0$

2) $U_e = \frac{5q^2}{8\pi\epsilon_0 d}$

2.21) Sea una espira circular de radio R y centro el origen de coordenadas O situada en el plano OXY . La espira tiene una carga uniformemente distribuida, siendo λ la densidad lineal de carga. Calcular el campo eléctrico \vec{E} en un punto de coordenadas $(0,0,z)$.

Solución: $\vec{E}(0,0,z) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{k}$

2.22) Se tiene una distribución volumétrica de carga en la región del espacio definida por $-a \leq x \leq a$. La densidad de carga es constante e igual a ρ . Calcular el potencial $V(x)$ en la región $0 \leq x \leq a$. [tómese $V(x=0)=0$]

Solución: $V(x) = -\frac{\rho x^2}{2\epsilon_0}$