OPERADORES II

Cálculo vectorial: Operadores diferenciales

Dr. José Manuel Donoso

http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Herramientas matemáticas ,derivada parcial, gradiente, rotacional…,

Programa.

Tema	Inicio	Fin	Teor+Prob
Vectores	*31-enero*	*9-febre.*	*4+6*
Elc.Vacío	*12-febre.*	*23-febre.*	*4+5*

TEMA 2. OPERADORES DIFERENCIALES.

Campo

Escalar. Gradiente.

Derivada Direccional.

LM: Lección Magistral

1 hora

Campo Vectorial. Flujo.

Divergencia. Teorema de la Divergencia.

Duración: 1 hora

LM: Lección Magistral

1 hora

Circulación. Rotacional.

Teorema del Rotacional.

LM: Lección Magistral

1 hora

Campos Conservativos.

Laplaciano.

LM: Lección Magistral

1 hora

Resolución de Problemas Tema 2.

RPA: Resolución de problemas en el aula

4 horas

$$\boxed{div\ (rot\ \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0}$$

$$\boxed{rot\ grad(V) = \nabla \times (\nabla V) = 0}$$

$$\boxed{\iint_{S\ cerr} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iiint_V div\vec{E}\ dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E}\ dV}$$

Introducción. Motivación.

Campos en física ¿qué es un campo? ¿cómo visualizarlo y medirlo?.Matemáticamente, es una aplicación unívoca desde un punto de un espacio a otro.

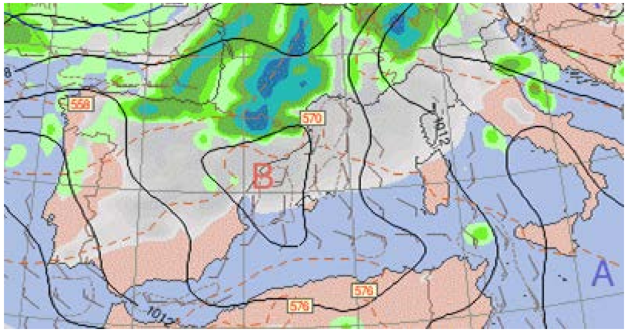
$$Notación: \begin{cases} \mathbf{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{cases}$$

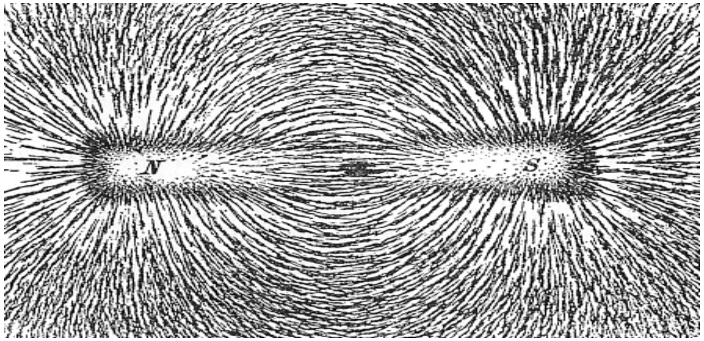
$$\text{vector: } \boldsymbol{v} \rightarrow \mathbf{v} \leftrightarrow \vec{v}$$
$$(\rho, \varphi, z) \rightarrow (\rho, \phi, z) \leftrightarrow (r, \phi, z) \leftrightarrow (r_\perp, \phi, z)$$
$$(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta, \phi)$$
$$\boldsymbol{e}_j\ ,\ \boldsymbol{u}_j \leftrightarrow \mathbf{u}_j \leftrightarrow \vec{u}_j,\ \text{para } j = \rho, r, \varphi, x, \ldots$$

- Aquí es propiedad mensurable escalar o vectorial dependiente del punto de medida:

$$g(\mathbf{r};t) \equiv g(x,y,z;t) \text{ a } t \text{ fijo} \ldots \begin{cases} T = T(\mathbf{r}) \quad ; \qquad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\mathbf{r}) \quad ; \qquad \boldsymbol{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{w}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{i} w_x(x,y,z) + \boldsymbol{j} w_z(x,y,z) + \boldsymbol{k} w_z(x,y,z) \end{cases}$$

Visualización: campo escalar por *superficies isoescalares*, el vectorial por *líneas de campo*:





Gradiente de un escalar. Derivada direccional.

- La variación infinitesimal de la propiedad escalar *p* será:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

- Reescrita como producto escalar, define el vector gradiente de *p*

$$\left.\begin{aligned} dp &= \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot d\vec{l} \\ d\vec{l} &= dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dp = grad\ p \cdot d\vec{l} = \nabla p \cdot d\vec{l}$$

- Define el **operador gradiente** que se representa por **Nabla:**

$$grad\ p = \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (operador\ \ Nabla)$$

- La dirección del vector desplazamiento elemental ***dl*** puede estar **orientada** sobre una curva dada. Ejm: sobre la *recta x=9y=3z*, $d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dx/9\,\vec{j} + dx/3\,\vec{k}$

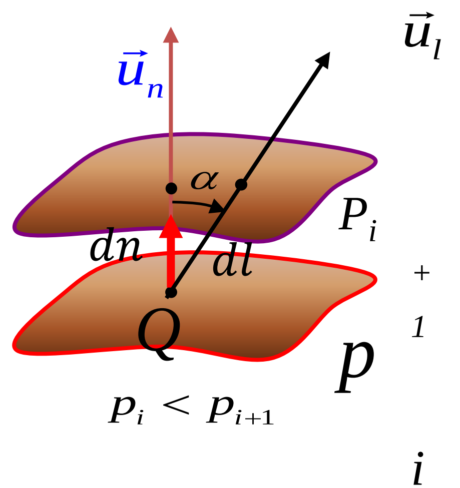
Derivada direccional

•La variación de *p* puede medirse a lo largo de una dirección dada.

•Si *dl* yace sobre un segmento infinitesimal de curva con orientación dada ***u.***

$$dp = grad\ p \cdot d\vec{l} = grad\ p \cdot (dl\, \vec{u}_l) = \left(\nabla p \cdot \vec{u}_l\right) dl$$

$$\frac{dp}{dl} = \nabla p \cdot \vec{u}_l = grad\ p \cdot \vec{u}_l$$



•Define la **derivada direccional** de *p e*n el punto *Q* siguiendo la orientación del versor ***u.***

•Si ***u*** yace sobre **puntos de una curva γ** , puede encontrarse tal curva que maximiza la derivada. El **módulo del gradiente da la derivada direccional máxima**: *grad P* , **se orienta hacia** donde *p* aumenta.

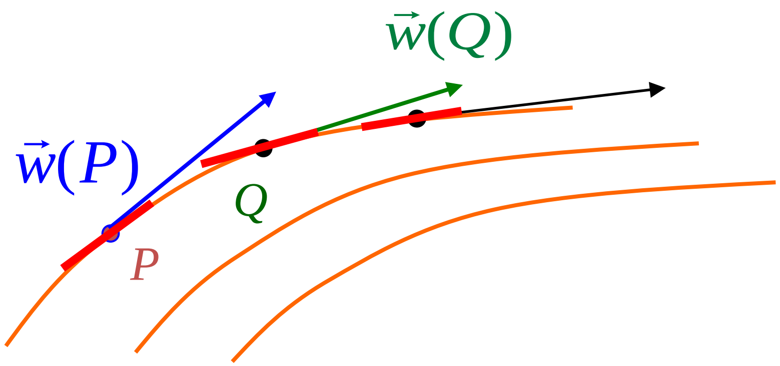
$$\frac{dp}{dl} = \frac{dp}{dn} \cdot \frac{dn}{dl} = \frac{dp}{dn} \cos\alpha = \frac{dp}{dn} \vec{u}_n \cdot \vec{u}_l$$

$$\frac{dp}{dl} = grad\ p \cdot \vec{u}_l \Rightarrow máx\left|\frac{dp}{dl}\right| = \left|\nabla p\right|$$

Así, si γ está sobre una superficie *p=cte=K*, la derivada direccional de p a lo largo de γ será nula.

El vector gradiente es normal a las superficies equiescalares p=K y se orienta en sentido creciente de valores de K

- Si **w** es un campo vectorial sus líneas de campo yacerán sobre curvas γ tangentes a él en cada punto, es decir, las (dos) ecuaciones diferenciales de las curvas vienen de:



$$\vec{w} \parallel d\vec{l} \Rightarrow d\vec{l} \times \vec{w} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{w_x}{dx} = \frac{w_y}{dy} = \frac{w_z}{dz}.$$

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = d\vec{r}$$

- La operación diferencial resultante del *producto formal* del operador gradiente y el vector dado es un escalar, llamado **divergencia** de **w**: (en cartesianas)

$$\boxed{div\,\vec{w} = \nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}}$$

$$Ejm.\ si\ \ \vec{w} = \vec{r} \quad \rightarrow \nabla \cdot \vec{w} = 3 \quad ; \text{ Probar que si } \vec{v} = \vec{v}(r),\ \nabla \cdot \vec{v} = \vec{e}_r \cdot \frac{d\,\vec{v}}{dr}$$

Divergencia de un vector y rotacional de un vector

•También la operación siguiente da un vector, el resultante de hacer actuar formalmente el **operador nabla vectorialmente** sobre el vector dado ***w***

$$rot\,\vec{w} = \nabla \times \vec{w} = \nabla \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} =$$

$$\vec{i}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)$$

$$\left(\nabla \times \vec{w}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y} w_z - \frac{\partial}{\partial z} w_y \;,\;\; etc.$$

• Da el operador **rotacional (rotor)** de ***w*** en coordenadas **cartesianas** (cuidado, ver tablas para otros sistemas coordenados).

•Un **ejemplo** de vector **irrotacional** (sin rotor) es el propio radiovector ***r*** o *cualquier vector radial* dependiente sólo de su módulo *r*:

$$Si: \;\; \vec{w}(\vec{r}) = \pm\left|\vec{w}\right|(|\vec{r}\,|)\,\frac{\vec{r}}{r} = g(r)\,\vec{r} \Rightarrow \;\; rot\,\vec{w} = 0$$

• ***SIGNIFICADO FÍSICO DE DIVERGENCIA Y ROTACIONAL: relacionados con los conceptos de FLUJO y CIRCULACIÓN de un vector.***

Operadores de segundo orden y algunas propiedades

• También pueden definirse operaciones que dan derivadas segundas de campos escalares y vectoriales , como:

$$dado \quad V(\mathbf{r}) \rightarrow grad\, V = \nabla V,\ div(grad\, V) = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V\ (Laplaciano\ de\ V)$$

$$dado \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) \rightarrow div\, \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}\quad ,\ grad(div\ \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}),\ y\ rot(rot\, \mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$$

IMPORTANTE: (demostradlo por cálculo directo)

• **La divergencia de un rotacional es cero**, es decir, el rotacional de un vector es un **vector solenoidal**:

$$\boxed{div\ (rot\ \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0}$$

•Y **el rotacional de un gradiente es cero, quivales a decir:** el gradiente de un campo escalar es un vector irrotacional:

$$\boxed{rot\ grad(V) = \nabla \times (\nabla V) = 0}$$

•La expresión siguiente **define la laplaciana de un vector**:

$$rot\, rot\,(\mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \ grad\,(div\, \mathbf{v}) - laplacian(\mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \ \vec{i}\ \nabla^2 v_x + \vec{j}\ \nabla^2 v_y + \vec{k}\ \nabla^2 v_z \quad (en\ \ cartesianas)$$

NOTA: Propiedades

- Siendo en cartesianas:

$$(Laplaciano\ de\ V) \to \nabla^2 V \equiv \Delta V = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V$$

- Si T y P son campos escalares, **v** y **w** campos vectoriales, con a y b constantes escalares, serán útiles las propiedades siguientes (demostración como ejercicio).

$$\nabla(aT + bP) = a\nabla T + b\nabla P \qquad \nabla(TP) = T\nabla P + P\nabla T$$

$$\nabla\cdot(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\nabla\cdot\mathbf{v} + b\nabla\cdot\mathbf{w} \qquad \nabla\cdot(T\,\mathbf{v}) = \nabla T\cdot\mathbf{v} + T\,\nabla\cdot\mathbf{v}$$

$$\nabla\wedge(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\nabla\wedge\mathbf{v} + b\nabla\wedge\mathbf{w} \qquad \nabla\wedge(T\,\mathbf{v}) = \nabla T\wedge\mathbf{v} + T\,\nabla\wedge\mathbf{v}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot\nabla\wedge\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla\wedge\mathbf{w}$$

Ejer. Comprobar las relaciones siguientes, que saldrán a menudo en clase:

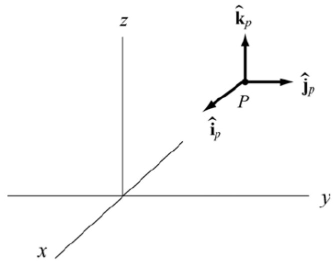
$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{u}_r \qquad \nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\mathbf{u}_r \qquad \nabla f(r) = f'(r)\mathbf{u}_r$$

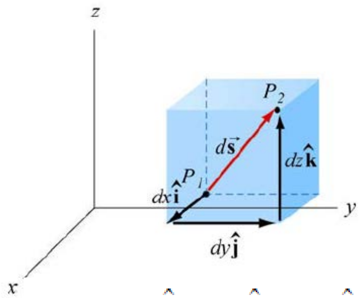
$$\nabla\cdot\mathbf{r} = 3 \qquad \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0\ (\text{si}\ r\neq 0) \qquad \nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{2}{r} = \nabla^2 r$$

$$\nabla\times(g(r)\mathbf{u}_r) = 0 \quad \text{con}\ \mathbf{r} = (x,y,z), r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad ; \int_{r_1}^{r_2}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)$$

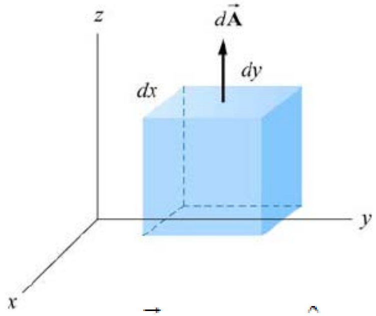
Importante:

Repetir los cálculos con la sustitución de **r** por **R=r - r$_0$**, con **r$_0$** constante (es una traslación de origen)

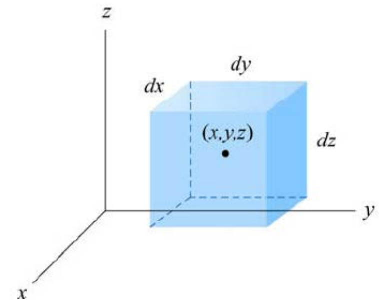




$$d\,\vec{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

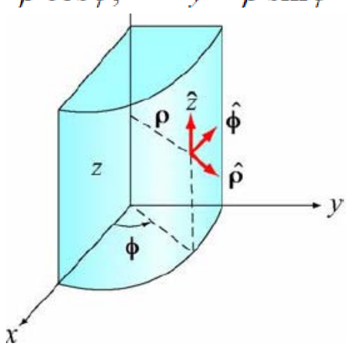


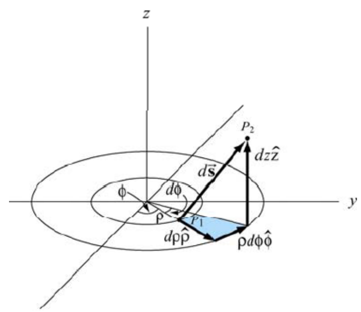
$$d\vec{A} = dx\,dy\,\hat{k}$$



$$dV = dx\,dy\,dz$$

$x = \rho\cos\phi,\quad y = \rho\sin\phi$

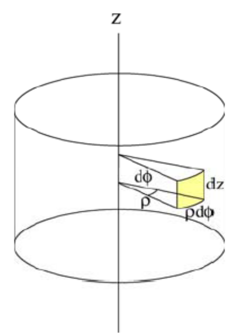




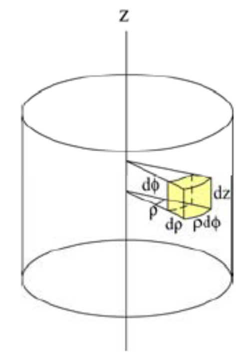
$$d\,\vec{s} = d\rho\,\hat{\rho} + \rho d\phi\,\hat{\varphi} + dz\,\hat{k}$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j},\qquad \hat{\varphi} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

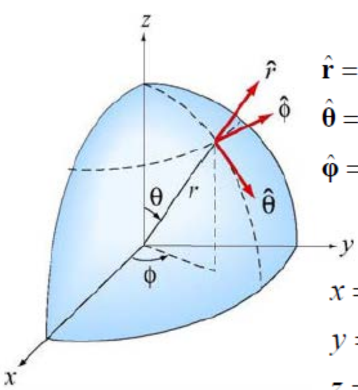
$$d\vec{A} = \rho d\phi\, d\rho\,\hat{k}$$



$$dA = \rho\, d\phi\, dz$$

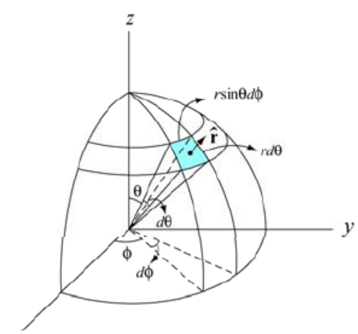


$$dV = \rho d\phi\, d\rho\, dz$$

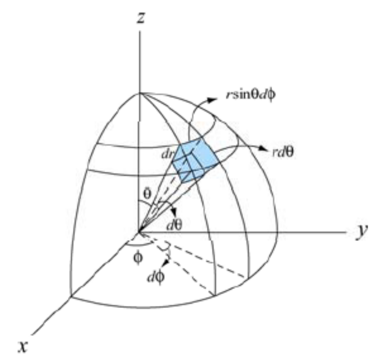


$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{k}$$
$$\hat{\varphi} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

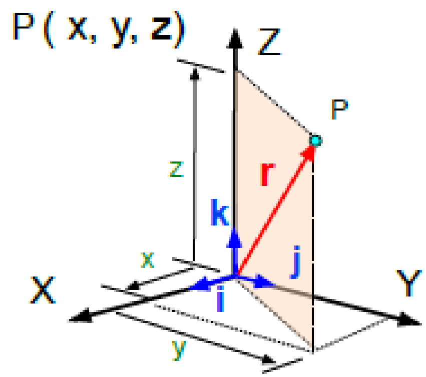


$$d\vec{A} = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\,\hat{r}$$

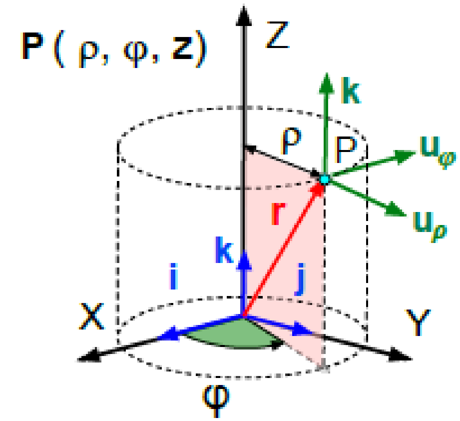


$$dV = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$\mathbf{u}_\rho = \cos\varphi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}$$



(a) Coordenadas cartesianas con sus vectores $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ unitarios.



(b) Coordenadas cilíndricas con los vectores $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{k})$ unitarios.

Figura 1: Esquemas del vector de posición $\boldsymbol{r}$ de un punto P en coordenadas cartesianas y cilíndricas.

$$x = \rho\,\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x = r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi \quad , \quad y = r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = r\,\cos\theta \quad , \quad r = \sqrt{x^2$$

$$\mathbf{k}\wedge\mathbf{u}_\rho = \mathbf{u}_\varphi \quad , \quad \mathbf{u}_\varphi\wedge\mathbf{k} = \mathbf{u}_\rho \quad , \quad \mathbf{u}_\rho\wedge\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{k}$$

$$\text{vector: } \boldsymbol{v} \to \mathbf{v} \leftrightarrow \vec{v}$$

$$(\rho,\varphi,z) \to (\rho,\phi,z) \leftrightarrow (r,\phi,z) \leftrightarrow (r_\perp,\phi,z)$$

$$(r,\theta,\varphi) \to (r,\theta,\phi)$$

$$\boldsymbol{e}_j\,,\ \boldsymbol{u}_j \leftrightarrow \mathbf{u}_j \leftrightarrow \vec{u}_j,\ \text{para } j = \rho, r, \varphi, x, \ldots$$

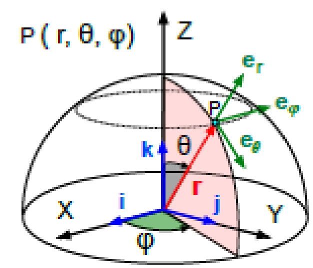


Figura 2: Coordenadas esféricas del punto P.

Operador gradiente en otros sistemas de coordenadas

•Expresión analítica del vector gradiente en **coordenadas cilíndricas** (*r*,*φ*,*z*)

$$\nabla T(r,\varphi,z)=\frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{k}\quad ;\ (r,\varphi,z)\Leftrightarrow(\rho,\phi,z)$$

•En **caso** de *simetría axial*, con *T* dependiente sólo de la distancia al eje OZ:

$$T=T(r)\rightarrow\nabla T=\frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{r};\ r\equiv r_\perp=\rho=\sqrt{x^2+y^2},$$

• Superficies equiescalares cilíndricas , con gradiente radial respecto del eje OZ.

•Expresión analítica del vector gradiente **en coordenadas esféricas** *(r,θ,φ) :*

$$\nabla T(r,\theta,\varphi)=\frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial T}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$$

•Si *T* sólo depende de la distancia al origen (simetría esférica), las superficies equiescalares son esferas y el gradiente es radial. Dibujadlas.

$$\nabla T(r)=\frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r=\frac{\partial T}{\partial r}\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{r};\ r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\text{ , pues }\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\partial x}=\frac{x}{r}\text{, etc.}$$

Divergencia y laplaciano en geometría radial cilíndrica y esférica:

Para un vector radial [o escalar p] dependiente sólo de la variable radial $r=\rho$, distancia al eje OZ, y la divergencia [laplaciano] en **coordenadas cilíndricas** es:

$$\vec{v}(r) = v_r(r)\vec{u}_r \Rightarrow div\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,v_r)}{\partial r}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{u}_r = \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\left[\nabla^2 p(r) = div\big(grad\ p(r)\big) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right]$$

Para un vector radial [o escalar p] *dependiente* ***sólo*** *de la variable radial r*, distancia al origen, la divergencia [laplaciano] en **coordenadas esféricas** es:

$$\vec{v}(r) = v_r(r)\vec{u}_r \Rightarrow div\,\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\,v_r)}{\partial r}; \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\left[\nabla^2 p(r) = div\big(grad\ p(r)\big) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right]$$

La demostración es inmediata (hacedla). En caso de no recordar la expresión ¿cómo hacerlo? Ejer. ¿Cómo sería la divergencia de un vector que sólo tiene en cilíndricas componente φ y ésta depende sólo de la variable radial $r=\rho$, o sea $\vec{v}(\vec{r}) = v_\varphi(r)\vec{u}_\varphi$ *?* (sol. Poniéndolo en cartesianas, sale 0)

Problemas

- **Problema 2.1**

  Dado el campo escalar $\phi = A\,x$ con A constante, se pide:

  a) Representar gráficamente las superficies equipotenciales.
  b) Calcular el gradiente de ϕ y representarlo gráficamente.
  c) La derivada direccional de ϕ en las siguientes direcciones:

(1) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}$	(2) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}$	(3) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}$
(4) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$	(5) $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$	(6) $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

  d) Calcular $\nabla \cdot (\nabla\phi)$ y $\nabla \times (\nabla\phi)$

Solución :

(b) $\nabla\phi = A\,\boldsymbol{i}$
(c) 1) A ; 2) 0 ; 3) 0
4) $A/\sqrt{2}$; 5) $-A/\sqrt{2}$; 6) $A/\sqrt{3}$
(d) $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 0$; $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

- **Problema 2.2**

  Repetir el problema anterior para los campos escalares.

  a) $\phi = A + B\,x^2$
  b) $\phi = C\,(x^2 + y^2)$

donde A, B y C son constantes.

Solución :

(a) $\nabla\phi = 2\,B\,x\,\boldsymbol{i}$

(1) $2\,B\,x$; (2) 0 ; (3) 0 ; (4) $\sqrt{2}\,B\,x$; (5) $-\sqrt{2}\,B\,x$; (6) $2\sqrt{3}\,B\,x/3$
(7) $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 2\,B$; (8) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

(b) $\nabla\phi = C\,(2\,x\,\boldsymbol{i} + 2\,y\,\boldsymbol{j})$

(1) $2\,C\,x$; (2) $2\,C\,y$; (3) 0 ; (4) $C\sqrt{2}(x+y)$; (5) $C\sqrt{2}(-x+y)$
(6) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}C\,(x+y)$ (7) $\nabla \cdot (\nabla\phi) = 4\,C$; (8) $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$

Problemas

- **Problema 2.8**

Para el campo vectorial $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r$ donde el escalar $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ es la distancia de un punto del espacio al origen y $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ el vector unitario radial en coordenadas esféricas calcular:

a) El gradiente ∇r
b) La divergencia $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$
c) El gradiente $\nabla(1/r)$
d) La divergencia del gradiente $\nabla \cdot \nabla(1/r)$

Solución :

$$(a)\ \nabla r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{e}_r \ ;\ (b)\ \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3 \ ;\ (c)\ \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r \ ;\ (d)\ \nabla \cdot \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Obtened, en *función de n*, el flujo Φ del campo **A** a través de una *superficie esférica* de radio R centrada en el origen y particularizar para *n* del caso **2)** ¿es nulo Φ? .
La misma cuestión para el campo **B,** con flujo a través de un cilindro de radio *R* y altura *H*.

1) $\nabla r = \vec{u}_r,\quad \nabla\cdot\vec{r} = 3,\quad \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r,\quad \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

2) n = -2

3) $\nabla\rho = \vec{u}_\rho,\quad \nabla\cdot\vec{\rho} = 2,\quad \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\vec{u}_\rho,\quad \nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^3}$

4) n = -1