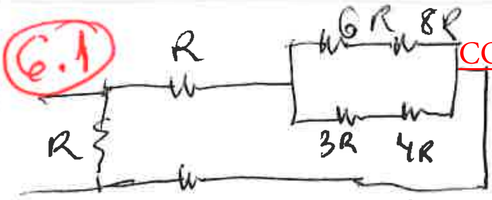
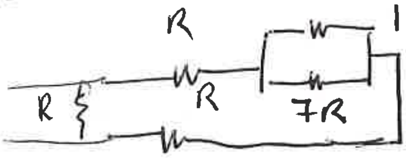
NO ENTRAN PROBLEMAS DIRECTOS DE CORRIENTE

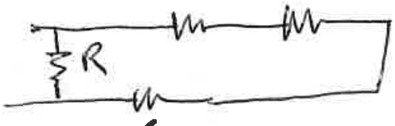
~~8.2~~ 6.1

a)



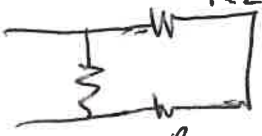
Agrupando sucesivamente: (8.2.1)



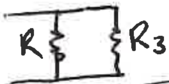


$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{14R} + \frac{1}{7R}$$

$$R_1 = \frac{14}{3} R$$



$$R_2 = R + \frac{14}{3} R = \frac{17}{3} R$$

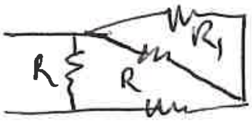


$$R_3 = R + \frac{17}{3} R$$

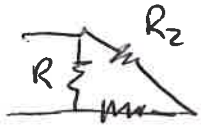
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{20}{3}R}$$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{20}{23} R}$$

8.2 b)



$$R_1 = R + R = 2R$$



$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}$$

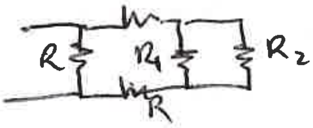
$$R_2 = \frac{2}{3} R$$

$$R_3 = \frac{2}{3} R + R = \frac{5}{3} R$$

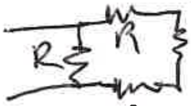
$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{\frac{5}{3}R} + \frac{1}{R}$$

$$R_e = \frac{5}{8} R$$

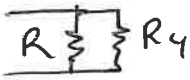
c)



$R_1 = 2R$, $R_2 = 4R$



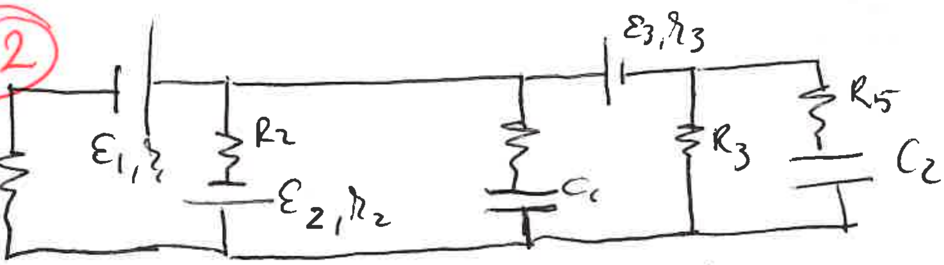
$$; \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} ; \quad R_3 = \frac{8}{6} R = \frac{4}{3} R$$



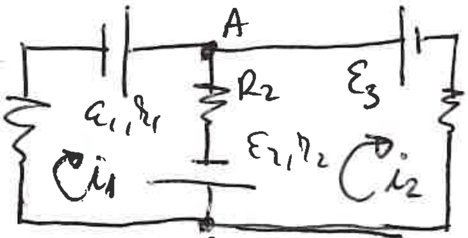
$$R_4 = 2R + \frac{4}{3} R = \frac{10R}{3}$$

$$; \frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R} ; \quad R_e = \frac{10}{13} R$$

~~8.3~~ 6.2



Una vez supuestos los condensadores cargados, se eliminan las ramas donde se hallan éstos:



Por método de corrientes de malla:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = i_1 (R_1 + r_1) + (i_1 - i_2)(R_2 + r_2) \\ -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 = (i_2 - i_1)(r_2 + R_2) + i_2 (R_3 + r_3) \end{cases}$$

lo que da :

(8.3.2)

$$i_1 = 0{,}089\ A = \frac{5}{258}\ A$$
$$i_2 = -0'562\ A = -\frac{145}{258}\ A$$

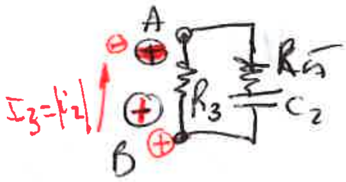
2) Por la rama de $R_1 + r_1$ circula $I_1 = i_1$ y por la rama de R_2 circula $I_2 = i_1 - i_2$ y por la de R_3, $I_3 = i_2$, así las potencias dadas en ε_1 y ε_2 y ε_3:

$$\begin{cases} P_1 = \varepsilon_1 I_1 - r_1 I_1^2 \\ P_2 = \varepsilon_2 (I_2) - r_2 I_2^2 \\ P_3 = (-\varepsilon_3)\, i_2 - r_3\, i_2^2 = +\varepsilon_3 (I_3) - r_3 I_3^2 \end{cases}$$

3) Para la carga de los condensadores se requiere saber la diferencia de potencial entre sus armaduras y aplicar

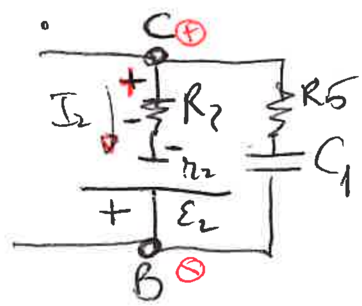
$$Q = C\,\Delta V$$

Para C_2



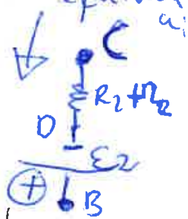
$$V_A - V_B =$$
$$V_{AB} = |i_2| R_3 = Q_2 / C_2$$
$$= I_3 R_3 \Rightarrow Q_2 = C_2 I_3 R_3$$

Para C_1, que está a la misma ddp que $(R_2 + r_2)$:



1 ✱ $$\overbrace{V_C - V_B}^{V_C - V_A \quad + (V_A - V_B)} = I_2 (R_2 + r_2) + (-\varepsilon_2)$$
$$= Q_1 / C_1$$
$$Q_1 = C_1\, V_{CB}$$

equivalente a:

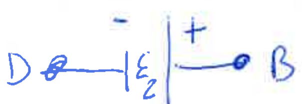


Las potencias disipadas en las resistencias (internas de generador o externas):

$$P'_1 = r_1 I_1^2 \ ,\quad P'_2 = r_2 I_2^2 \ ,\quad P'_3 = r_3 I_3^2$$
$$P'(R_1) = I_1^2 R_1 \quad \text{etc.}$$

Nota:

1 ✱ $V_C - V_B = (V_C - V_D) + (V_D - V_B) = I_2 (R_2 + r_2) - (V_B - V_D)$
$= I_2 (R_2 + r_2) - \varepsilon_2$

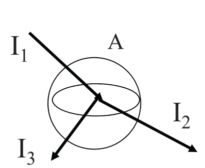


$V_B - V_D = \varepsilon \big|_{\text{sin } r_2}$

Leyes de Kirchhoff

MÉTODOS Y EJEMPLOS PARA ANÁLISIS DE REDES (ver libro de apuntes)

La ley de conservación de la carga aplicada a una superficie cerrada A que contenga a un nudo conduce a:



Teorema de la divergencia

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum_i I_i = 0$$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

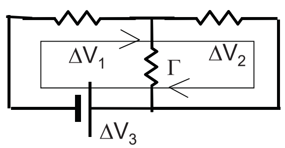
Primera Ley: La suma de intensidades de rama que confluyen en un nudo es cero.

En una red con N nudos sólo hay N-1 ecuaciones de nodo independientes.

J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

Leyes de Kirchhoff

Dado que E es irrotacional, su circulación aplicada a una línea cerrada formada a partir de ramas del circuito (malla) conduce a:



Teorema de Stokes

$$\nabla \times \vec{E}_e = 0 \rightarrow \oint_\Gamma \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \sum_i \Delta V_i = 0$$

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 0$$

Segunda Ley: La suma de diferencias de potencial de los elementos que componen una malla es cero.

En una red con M mallas simples (no contienen a otras), sólo hay M ecuaciones de malla independientes.

"Las N-1 ecuaciones de nudo y M ecuaciones de malla permiten obtener todas las intensidades de rama".

J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

etsiae
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

LEYES DE KIRCHHOFF

La primera ley se conoce también con el nombre de LEY DE LOS NUDOS

La segunda ley se conoce también con el nombre de LEY DE LAS MALLAS

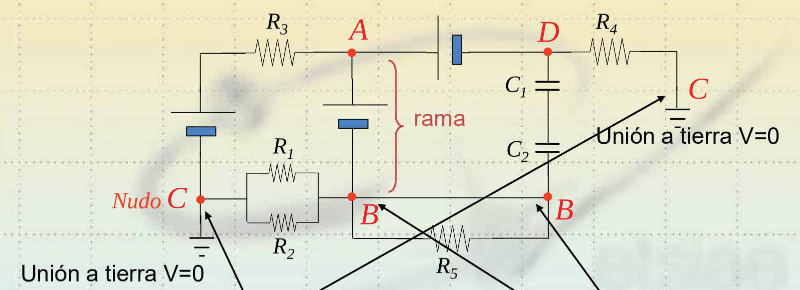
"Las N-1 ecuaciones de nudo junto con las M ecuaciones de malla permiten obtener todas las intensidades de rama"

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

1. Nombramos todos los nudos



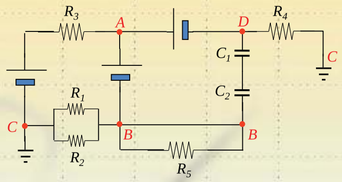
Los nudos unidos a tierra son idénticos

Los nudos cortocircuitados también

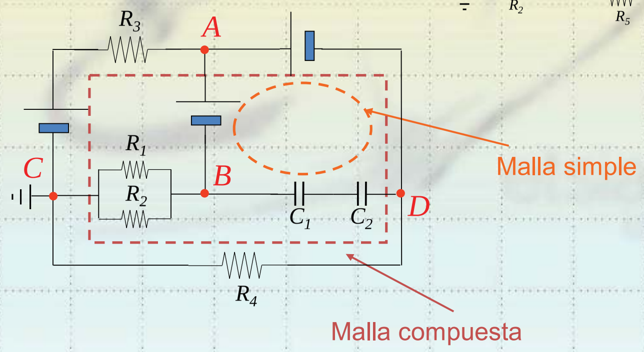
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

2. Eliminamos nudos superfluos



Dejamos un único nudo B y C



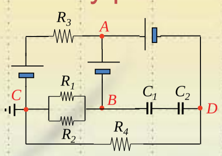
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

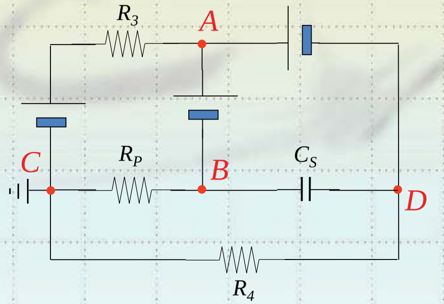
etsiae
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

3. Asociamos resistencias y condensadores en serie y paralelo

$$\frac{1}{R_p}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2};\quad \frac{1}{C_s}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$



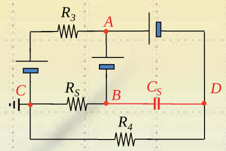


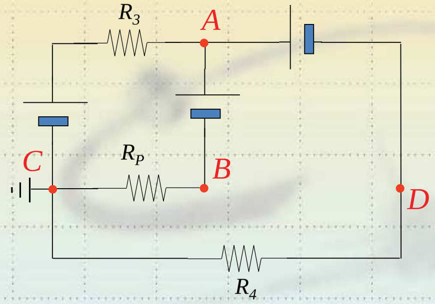
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

4. Eliminamos las ramas con condensadores





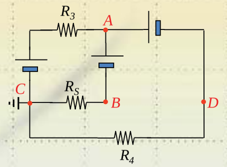
Funcionando en régimen estacionario no circula intensidad por las ramas que contienen condensadores, ya que, estos han terminado el proceso de carga

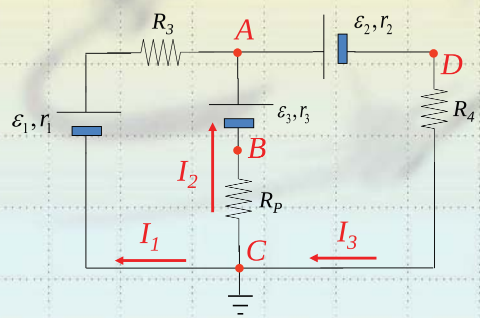
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

5. Asignamos intensidades a cada rama del circuito de forma arbitraria:



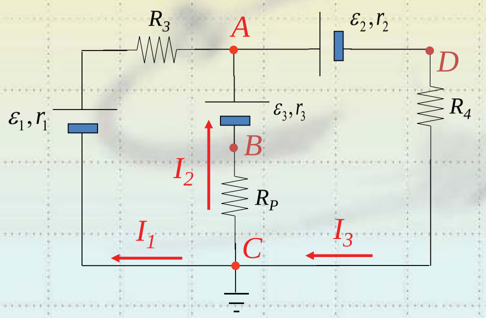


J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

6. Planteamos las Ecuaciones de Nudos

Nº de ecuaciones de nudos: nº de nudos-1 = 2-1 = 1



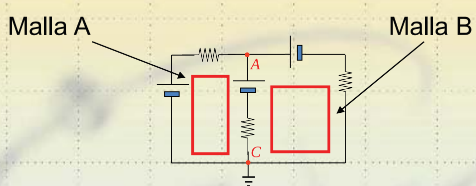
Nudo C:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

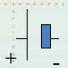
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

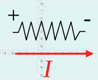
7. Establecemos las malla simples de nuestro circuito



Nº de ecuaciones de mallas: nº de mallas simples = 2



$\Delta V = \varepsilon$ Pila: La d.d.p. no depende de la intensidad

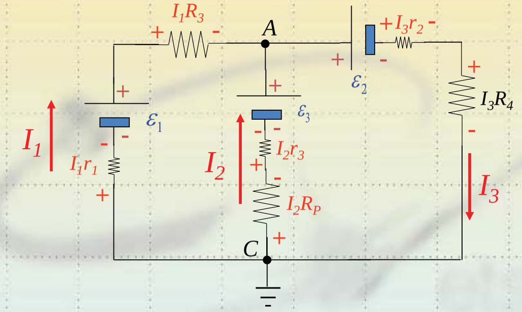


$\Delta V = RI$ Resistencia: La d.d.p. depende de la I, el potencial es mayor por donde entra la intensidad

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

8. Planteamos las Ecuaciones de Mallas



Se recorre la malla en un sentido y se consideran positivas las subidas de potencial y negativas las caídas

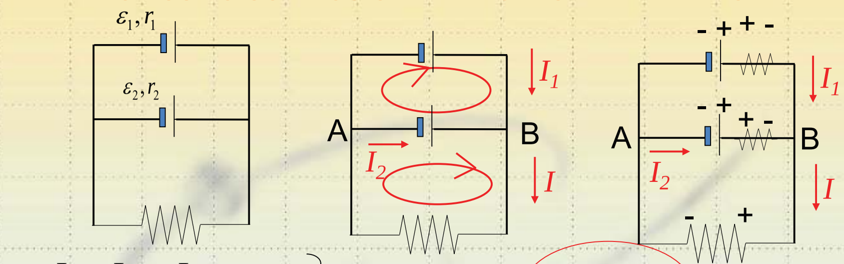
Malla A: $\boxed{\varepsilon_1 - R_3 I_1 - \varepsilon_3 + I_2 r_3 + R_p I_2 - I_1 r_1 = 0}$

Malla B: $\boxed{\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - r_2 I_3 - R_4 I_3 - R_p I_2 - I_2 r_3 = 0}$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

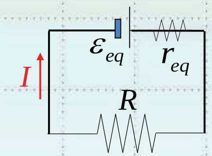
APLICACIÓN DE LAS LEYES DE KIRCHHOFF

CIRCUITO CON DOS GENERADORES EN PARALELO



$$\left.\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I \\ \varepsilon_1 - r_1 I_1 - \varepsilon_2 + r_2 I_2 &= 0 \\ \varepsilon_2 - r_2 I_2 - RI &= 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}}{R + \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$$

$$\frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} = \varepsilon_{eq} \qquad \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = r_{eq}$$



$$\varepsilon_{eq} - r_{eq} I - RI = 0 \longrightarrow I = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}}$$

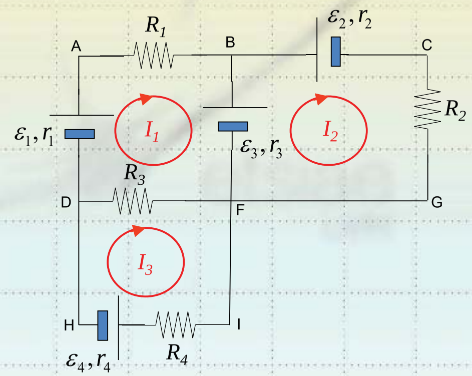
J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae — Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Este método tiene la ventaja de que minimiza el número de ecuaciones a resolver y, si se siguen ciertas reglas, las ecuaciones se pueden plantear directamente de forma matricial

Se asigna a cada malla simple de la red una intensidad (NO REAL necesariamente) que la recorra en sentido horario.



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae — Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Escribimos la matriz de resistencias de cada malla:

$$\begin{pmatrix} \sum R_i \text{ en malla } 1 & -\sum R_i \text{ comunes en mallas } 1 \text{ y } 2 & -\sum R_i \text{ comunes en mallas } 1 \text{ y } 3 \\ -\sum R_i \text{ comunes en mallas } 2 \text{ y } 1 & \sum R_i \text{ en malla } 2 & -\sum R_i \text{ comunes en mallas } 2 \text{ y } 3 \\ -\sum R_i \text{ comunes en mallas } 3 \text{ y } 1 & -\sum R_i \text{ comunes en mallas } 3 \text{ y } 2 & \sum R_i \text{ en malla } 3 \end{pmatrix}$$

La **matriz de resistencias** (caso particular de la matriz de impedancias en corriente alterna) contiene:
- En los elementos de la diagonal principal las resistencias de cada malla, sumadas todas con signo positivo.
- En el resto de los elementos están las resistencias comunes a las dos mallas correspondientes a sus subíndices, sumadas y con signo negativo.

La matriz de resistencias es simétrica.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae — Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Escribimos la matriz vector de f.e.m. de cada malla:

$$\begin{pmatrix} \sum \varepsilon_i \text{ en malla } 1 \\ \sum \varepsilon_i \text{ en malla } 2 \\ \sum \varepsilon_i \text{ en malla } 3 \end{pmatrix}$$

El **vector de f.e.m.** contiene, para cada elemento la suma de las fuerzas electromotrices de cada malla, con los signos que haya que asignar cuando se recorre la malla en el sentido dado a su intensidad.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

etsiae — Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

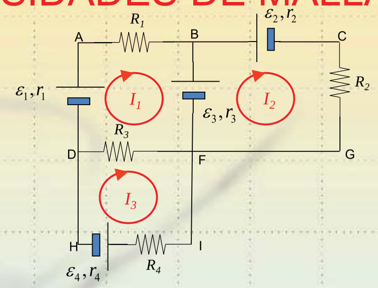
Escribimos la matriz vector de intensidades de cada malla:

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

El **vector de intensidades** tiene las intensidades de malla colocadas en orden.

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA



Escribimos la relación matricial:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1-\varepsilon_3 \\ \varepsilon_3-\varepsilon_2 \\ -\varepsilon_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1+R_1+r_1+R_3 & -r_3 & -R_3 \\ -r_3 & r_2+R_2+r_3 & 0 \\ -R_3 & 0 & r_4+R_3+R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

$$\varepsilon_1-\varepsilon_3 = I_1\left(r_1+R_1+r_1+R_3\right)-I_2 r_3 - I_3 R_3$$
$$\varepsilon_3-\varepsilon_2 = -I_1 r_3 + I_2\left(r_2+R_2+r_3\right)$$
$$-\varepsilon_4 = -I_1 R_3 + I_3\left(r_4+R_3+R_4\right)$$

obtenidas las intensidades de malla, se pueden hallar las intensidades que pasan por cada rama y el sentido en el que lo hacen, según se explica en la siguiente transparencia.

Si una intensidad de malla sale negativa, es que la intensidad va en sentido contrario al asignado.

PUEDE PLANTEARSE DIRECTAMENTE también si pasar por la matriz anterior, contando con la intensidad real que pasa por cada resistencia como p.e.

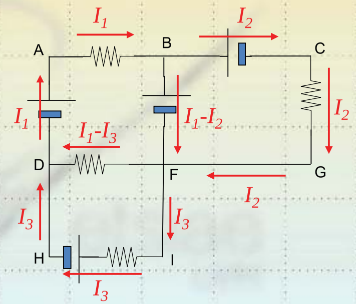
$$-\varepsilon_4 = (I_3-I_1)R_3 + I_3\left(R_3+r_4\right)$$

J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

MÉTODO DE LAS INTENSIDADES DE MALLA

Por las ramas que sólo pertenecen a una malla pasa la intensidad correspondiente a esa malla. Por la rama DAB pasa I_1, por la rama BCGF pasa I_2 y por la rama FIHD pasa I_3.

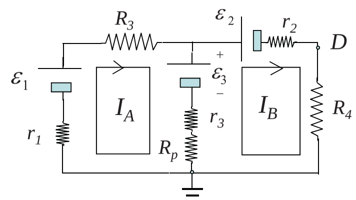
Por las ramas compartidas por dos mallas pasan las intensidades de las dos mallas sumadas algebraicamente. Por la rama BF pasa una intensidad I_1-I_2 desde B hacia F. Por la rama DF pasa I_1-I_3 en el sentido de F hacia D.



J.C. Jiménez Sáez
S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física II
Departamento de Física Aplicada a las Ingenierías Aeronáutica y Naval

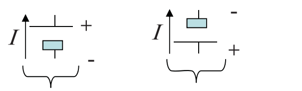
Método de Intensidades de Malla

Disminuye el nº de ecuaciones en circuitos con 2 o más mallas simples.



Se asigna a cada malla simple una intensidad de malla que la recorre en **sentido horario**

$$\begin{pmatrix} V \text{ de elementos activos en } A \\ V \text{ de elementos activos en } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{resistencias en } A & -(\text{resist. comunes en } A \text{ y } B) \\ -(\text{resist. comunes en } A \text{ y } B) & \text{resist. en } B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix}$$

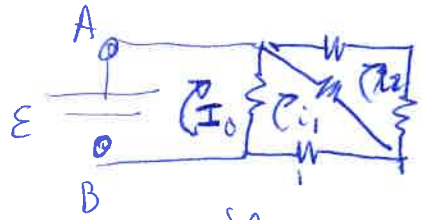


ddp positiva ddp negativa

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1-\varepsilon_3 \\ \varepsilon_3-\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1+R_3+r_3+R_p & -r_3-R_p \\ -r_3-R_p & r_3+r_2+R_4+R_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix}$$

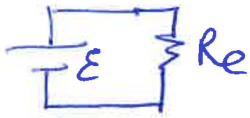
J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

(6.1) b. NOTA: De otra forma (por intensidades)



suponiendo un generador ideal que da $V_A - V_B$

$\Longleftrightarrow$



$\mathcal{E} = I R_e$

Por análisis de mallas con corrientes I_0, i_1 e i_2

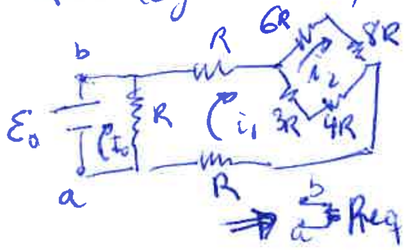
$$\begin{cases} 0 = i_1 R + (i_1 - I_0)R + (i_1 - i_2)R & (1) \\ 0 = i_2(R+R) + (i_2 - i_1)R & (2) \\ \mathcal{E} = (I_0 - i_1)R = I_0 R_{eq} & (3) \end{cases}$$

de (2) $i_2 = \frac{1}{3} i_1$ de (1) $i_1 = \frac{3}{8} I_0$

luego $\mathcal{E} = V_{AB} = I_0 R_{eq} = I_0 \left(\frac{5}{8} R\right)$

$$\boxed{R_{eq} = \frac{5}{8} R}$$

Análogamente, para a)



corrient. de malla

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 = I_0 R_{eq} = (I_0 - i_1)R & (a) \\ 0 = -I_0 R + (10R)\, i_1 - 7R\, i_2 & (1) \\ 0 = -i_1 7R + (21R)\, i_2 & (2) \end{cases}$$

luego de (2) $i_2 = \frac{7}{21} i_1 = \frac{1}{3} i_1$

y con (1) $I_0 = \frac{23}{3} i_1$

entonces $i_1 = \frac{3}{23} I_0 \Rightarrow$ con (a)

$$I_0 R_{eq} = I_0 \left(1 - \frac{3}{23}\right) R$$

$$\boxed{R_e = \frac{20}{23} R}$$