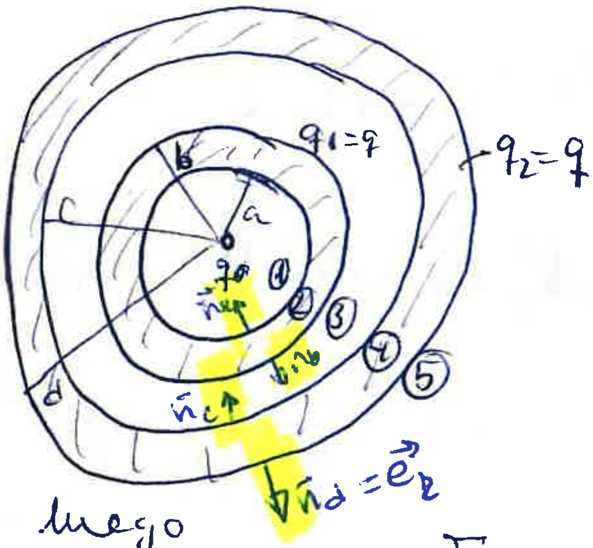
Prob

(4.1) Los conductores tienen cargas $q_1 = q$ y $q_2 = q$ en superficies exteriores. Se distinguen 5 regiones (aplicar Th. de Gauss & campo radial). (1)



(1) $0 < r < a$, (2) $a < r < b$
(3) $b < r < c$, (4) $c < r < d$
(5) $r > d$

En $r = a$ aparece inducida $q_a = -q_0 = -q$, y en $r = b$ se induce $-q_a$, siendo en esta superficie la carga

$$q_b = (-q_a) + q_1 = q_0 + q_1 = 2q$$

luego

$$\sigma_a = \frac{-q}{4\pi a^2} \; ; \; \sigma_b = \frac{2q}{4\pi b^2}$$

Análogamente, sobre el conductor en (4) en $r = c$ se induce $q_c = -(q_0 + q_1) = -2q$ y en $r = d$ se induce $+q_c$, siendo en $r = d$ la carga total $(-q_c) + q_2 = 2q + q = 3q$, entonces:

$$\sigma_c = \frac{-2q}{4\pi c^2} \quad y \quad \sigma_d = \frac{3q}{4\pi d^2}$$

(En general para la Supf. $\sigma = \vec{n} \cdot \vec{E}\varepsilon_0$)

De otro modo: Aplicando Th. Gauss para $\vec{E}$

en (1) $E_1 4\pi r^2 = \dfrac{q_0}{\varepsilon_0} = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_a = \vec{n}_a \cdot \vec{E}(a)\varepsilon_0 = -\dfrac{q}{4\pi a^2}$ $(\vec{n}_a = -\vec{e}_r)$

(2) $\cancel{E_2}^{0} 4\pi r^2 = 0 = \dfrac{q_0 + q_a}{\varepsilon_0} \Rightarrow q_a = -q$

(3) $E_3 4\pi r^2 = \dfrac{q_0 + q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_b = \vec{n}_b \cdot \vec{E}(b)\varepsilon_0 = \dfrac{2q}{4\pi b^2}$

(4) $E_4 = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{q_c + q_0 + q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_c = \dfrac{-2q}{4\pi c^2}$ $(\vec{n}_b = \vec{e}_r)$

(5) $E_5 4\pi r^2 = \dfrac{q_0 + q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = \dfrac{3q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_d = \vec{n}_d \cdot \vec{E}_5(d)\varepsilon_0 = \dfrac{3q}{4\pi d^2}$

Nota: observar que en la superficie $r = b$; la carga neta es $q_b = q_0 + q_1$ pero este conductor tiene carga neta $(q_0 + q_1) + q_a = q_1 = q$. $(q_a = -q)$ $\quad \vec{n}_d = \vec{e}_r = -\vec{n}_c$

Análogamente, en la superficie $r = d$ hay carga distribuida $q_2 + (q_0 + q_1)$ pero en la superficie interna de este conductor se distribuye $q_c = -(q_0 + q_1)$ siendo la carga neta $q_2 = q$.

Nota: $\vec{n}$ versor normal en superficie de conductor (medio) hacia el vacío.

Para el potencial, tomando como referencia $r \to \infty$ con $V_5(r \to \infty) = 0$ se tiene, de ②

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

$$\int_0^{V_5} dV = -\int_{r=\infty}^{r \in ⑤} E_5\, dr' \Rightarrow V_5 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\int_{V_5(d)}^{V_4} dV = -\int_d^{r \in ④} \cancel{E_4(r')}^{\,0}\, dr' \Rightarrow V_4(r) = V_5(d) = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 d} = V_4(d)$$

$$\int_{V_4(c)}^{V_3} dV = -\int_c^{r \in ③} E_3(r')\, dr' \Rightarrow V_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{d} + \frac{2}{r} - \frac{2}{c}\right)$$

$$\int_{V_3(b)}^{V_2} dV = -\int_c^{r \in ②} 0\, dr' \Rightarrow V_2(r) = V_3(b)$$

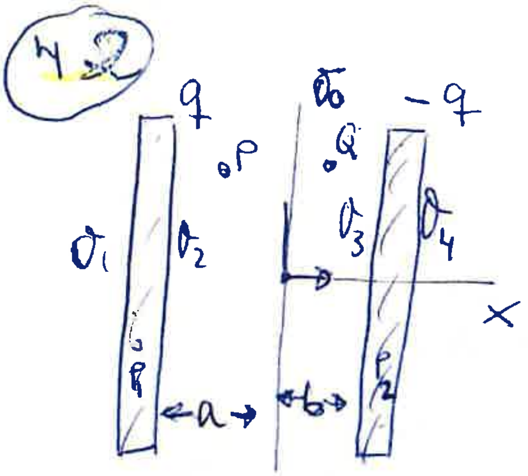
$$\int_{V_2(a) = V_3(b)}^{V_1} dV = -\int_a^r E_1\, dr \Rightarrow V_1(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{d} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c} + \frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Sugerencia: repetir el problema para simetría cilíndrica (cilindros infinitamente largos y concéntricos) reemplazando ~~las~~ la carga puntual q_0 por hilo de carga $\lambda_0 = \lambda$ y las cargas en superficies q_1 y q_2 por cargas en superficies cilíndricas de densidades lineales $\lambda_1 = \lambda$ y $\lambda_2 = \lambda$. (Tomar $V = 0$ a cierta distancia $D > d$ del eje para evaluar el potencial entre $r_1 = 0$ y $r_1 = D$).

Sol. $\sigma_a = \dfrac{-\lambda H}{\pi a 2 H} = \dfrac{-\lambda}{2\pi a}$; $\sigma_b = +\dfrac{2\lambda}{2\pi b}$; $\sigma_c = -\dfrac{2\lambda}{2\pi c}$ etc

$$V_5 = \frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D}{r} \quad (d \le r \le D) \text{ etc}$$

4.2



a/ Como en 4.2, modelizando cada conductor como región con campo resultante nulo:

$$E(P_1)=0=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0 \quad (1)$$

$$E(P_2)=0=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon}=0 \quad (2)$$

y de la carga:

$$q=\sigma_1 S+\sigma_2 S \qquad (3)$$

$$-q=\sigma_3 S+\sigma_4 S \qquad (4)$$

llevan a

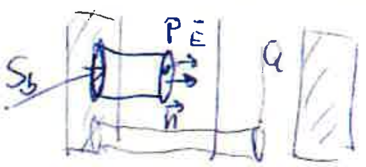
$$\sigma_1=\sigma_4=\frac{\sigma_0}{2}\ ,\ \sigma_2=\frac{q}{S}-\frac{\sigma_0}{2}\ ,\ \sigma_3=-\frac{q}{S}-\frac{\sigma_0}{2}$$

b/2/ En P

$$\vec{E}(P)=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon}\vec{i}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\vec{i}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}\vec{i}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}(Q)=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_0-\sigma_3-\sigma_4)\vec{i}=-\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

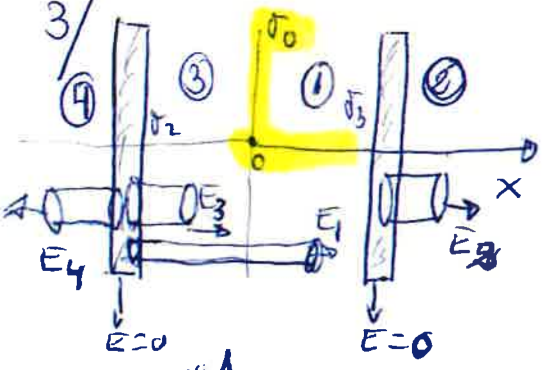
Por Gauss daría:



$$\vec{E}(P)\cdot\vec{n}S_b=S_bE(P)=\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_2 S_b}{\varepsilon_0}\Rightarrow\vec{E}_P=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$E(Q)S_b=\frac{(\sigma_2+\sigma_0)S_b}{\varepsilon_0}=S_b\frac{-\frac{q}{S}+\frac{\sigma_0}{2}}{\varepsilon_0}=-\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}S_b$$

c/3/



Se distinguen 4 regiones con campos:

Por Gauss ①

$$\begin{cases}\vec{E}_1=\dfrac{\sigma_2+\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{i}=-\dfrac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\vec{i}=-\dfrac{dV_1}{dx}\vec{i}=\vec{E}_Q\\ V_1-0=-\displaystyle\int_0^{x<b}E_1\,dx=\dfrac{\sigma_3}{\varepsilon_0}x\end{cases}$$

$(0\leq x\leq b)$

en ②

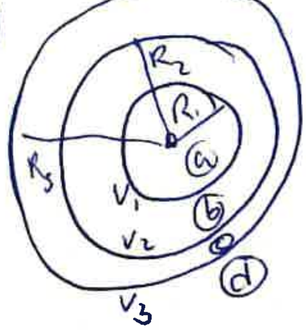
$$\begin{cases}\vec{E}_2=\dfrac{\sigma_4}{\varepsilon_0}\vec{i}=-\dfrac{dV_2}{dx}\vec{i}\Rightarrow\\ \displaystyle\int_{V_1(b)}^{V_2}dV_2=-\int_b^x\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}dx\Rightarrow V_2=\frac{\sigma_3 b}{\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{\varepsilon_0}(x-b)\end{cases}$$

Si se desprecia el espesor d:

etc

Prob.

4.3



Distinguimos zonas a, b, c y d

$a = \{0 < r < R_1\}$, $b = \{R_1 < r < R_2\}$ etc

Aplicando ley de Gauss a cada zona:

$$ES = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

queda: $E_a = 0$

$$E_b 4\pi r^2 = Q_1/\varepsilon_0$$

$$E_c 4\pi r^2 = (Q_1+Q_2)/\varepsilon_0$$

$$E_d 4\pi r^2 = (Q_1+Q_2+Q_3)/\varepsilon_0 = 0$$

$$0\ 4\pi r^2 \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \quad (1)$$

Como se conocen los potenciales en cada superficie:

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_A^B E\, dr \qquad (V_3 = V_\infty = 0)$$

Se tiene:

$$\int_{V_3}^{V_2} dV = -\int_{R_3}^{R_2} E_c\, dr \Rightarrow V_3 - V_2 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

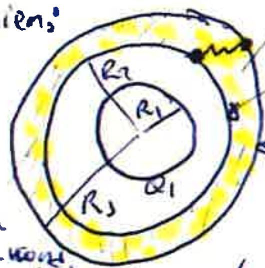
$$\int_{V_2}^{V_1} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E_b\, dr \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \quad (3)$$

a/ de (1), (2) y (3) salen las cargas: $(V_3 = 0 \Rightarrow V_\infty = 0)$

$$Q_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}(V_2 - V_1),\quad Q_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_3 R_2}{R_3 - R_2} V_2 - Q_1,\quad Q_3 = -Q_1 - Q_2$$

b/ Ahora $V_2 = V_3$ luego $Q_1 = Q'_1 = -Q'_2$ y $Q'_3 = 0$

o bien:



Zona entre R_2 y R_3 actúa como cáscara esférica conductora

$\Delta V = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

$Q'_2 + Q'_3 = Q_2 + Q_3 = -Q_1$

$Q_i = -Q_1 = Q'_2 = Q(R_2)$

$Q_e = Q_3 + Q_1 + Q_2 = Q'_3 = 0 = Q(R_3)$

$Q_i + Q_e = -Q_1$

$\rightarrow$ las armaduras R_2 y R_3 está a igual potencial, actúan como cáscara conductora de carga inicial $Q_2 + Q_3 = -Q_1$

b/ Las densidades de carga son:

$$\sigma(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2};\quad \sigma(R_2) = \frac{-Q_1}{4\pi R_2^2};\quad \sigma(R_3) = 0$$

c/ $\vec{E}'_c = 0$ en $\{R_2 < r < R_3\}$ ya que todo es una región equipotencial (cáscara conductora a efectos prácticos)

con $Q_2 = 0$; $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

$$\Rightarrow Q_1 = -Q_3 = Q$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{R_2 - R_1} R_1 R_2$$

$$U_e = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

Ojo

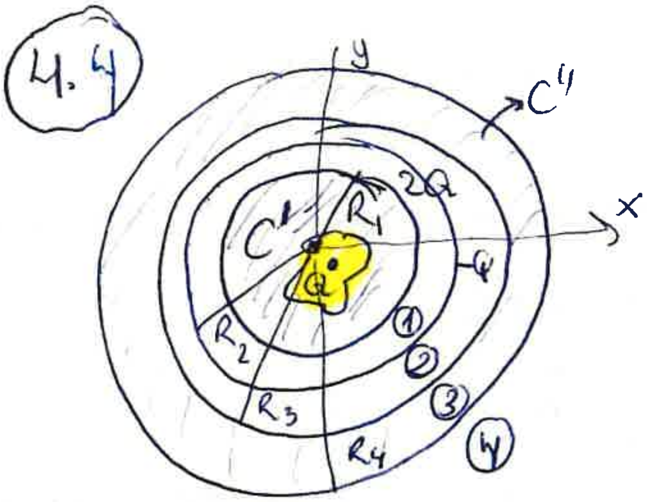
$V_3 = 0$ $\rightarrow$

$V_1 - V_3 = \Delta V$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{R_1}^{R_2} E_2\, dr \rightarrow \text{sale } C = Q/\Delta V$$

$= V_1 - V_2$

4.4



C'' se trae desde el ∞ con carga neta $Q''=0$. Distinguimos las regiones 1, 2, 3 y 4

$① = \{R_1 < r < R_2\}$

etc para aplicar la Ley de Gauss sobre superficies esféricas centradas:

$$\begin{cases} E_1\, 4\pi r^2 = \dfrac{2Q+Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_1 = \dfrac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{u}_r & \text{en } ① \\ E_2\, 4\pi r^2 = \dfrac{2Q+Q+(-Q)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2 = \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{u}_r & \text{en } ② \\ E_3 = 0 \qquad \vec{E}_3 = 0 & \text{en } ③ \\ E_4\, 4\pi r^2 = \dfrac{2Q+Q-Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_4 = \dfrac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\vec{u}_r & \text{en } ④ \end{cases}$$

a/ Con $\vec{E} = -\dfrac{dV}{dr}\vec{u}_r$ se tiene

$$\int_0^{V(R_4)} dV = -\int_\infty^{R_4} E_4\, dr \Rightarrow V(R_4) = V(C'') = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_4}$$

y

$$\int_{V(R_4)=V(R_3)}^{V(R_1)} dV = -\int_{R_3}^{R_1} E\, dr = -\int_{R_3}^{R_2} E_2\, dr - \int_{R_2}^{R_1} E_1\, dr \Rightarrow$$

$$V(R_1) = V(C') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_4} - \frac{2}{R_3}\right)$$

b/ El trabajo $-W_a$ será la diferencia entre las energías electrostáticas de las configuraciones con y sin C''. Cuando C'' está en el ∞ en la región ③ el campo ya no es nulo sino que es el debido a E_2, así, sin C'' los campos son

$$E'_1 = E_1, \quad E'_2 = E_2 = \underset{\neq 0}{E'_3} = E'_4$$

por tanto

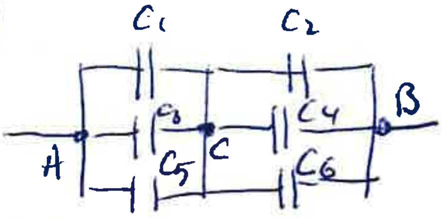
$$\Delta U_e = U_e\big|_{\text{con } C''} - U_e\big|_{\text{sin } C''} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_2}^{R_3} E'^2_3\, 4\pi r^2 dr =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_3}^{R_4} \frac{4Q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{4\pi\, dr}{r^2} = -\frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) = +W_a$$

Nota: $\sigma(R_3) = \varepsilon_0 \vec{n}_{3e}\cdot\vec{E}_2(R_3) = -2Q/4\pi R_3^2$; $\sigma(R_4) = \varepsilon_0 \vec{n}_{4e}\cdot\vec{E}_4(R_4) = 2Q/4\pi R_4^2$

$\sigma(R_1) = \varepsilon_0 \vec{n}\, E_1(R_1) = 3Q/4\pi R_1^2$ y en hueco $\int \sigma_i\, dS_{int} = -Q$

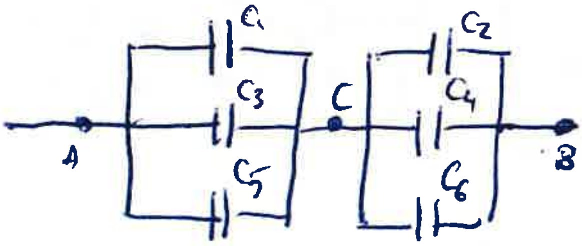
4.5/



La diferencia de potencial es $V_{AB} = V_0$. ①

dado que $V_B - V_A = (V_B - V_C) + (V_C - V_A) \Rightarrow V_{AB} = V_{AC} + V_{CA}$

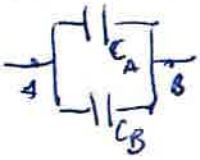
podemos ver la asociación de la forma:



y

donde C_a y C_b están en serie, siendo cada una la capacidad equivalente de las asociaciones de los paralelos $(C_1 - C_3 - C_5)$ y $(C_2 - C_4 - C_6)$. Entonces:

Como: en general



$\Leftrightarrow$

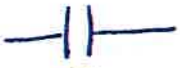
C

$$\Rightarrow C = C_A + C_B = \frac{Q}{V}$$

$$V = V_A - V_B = V_{AB} \Rightarrow \frac{Q_A}{C_A} = \frac{Q_B}{C_B} \; ; Q = Q_A + Q_B$$

y

$\Leftrightarrow$



C

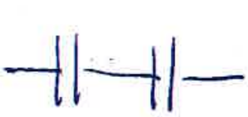
$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B}$$

$$Q_A = Q_B = Q = C V_{AB}$$

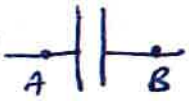
se tiene para este caso:

$$\begin{cases} C_a = C_1 + C_3 + C_5 & ; Q_a = C_a \, V_{AC} \\ C_b = C_2 + C_4 + C_6 & ; Q_b = C_b \, V_{CB} \end{cases} \quad V_{AB} = V \quad Q_a = Q_b = Q$$

siendo la capacidad equivalente



$\Leftrightarrow$



C

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_b} = \frac{C_a + C_b}{C_a C_b}$$

con carga $Q = C V = \frac{C_a C_b}{C_a + C_b} V = C_{AB} V$

b) Con las diferencias de potencial:

$$V_{AC} = \frac{Q_a}{C_a} = \frac{Q}{C_a} = \frac{C_b}{C_a + C_b} V$$

$$V_{CB} = \frac{Q_b}{C_b} = \frac{Q}{C_b} = \frac{C_a}{C_a + C_b} V$$

$V_{AC} + V_{CB} = V$ se cumple

4.5/ Y para la carga almacenada en cada ②
cont. condensador C_1, C_3, C_5 a igual diferencia de potencial V_{AC} se tiene:

$$Q_1 = C_1 V_{AC} = \frac{C_1 C_b}{C_a + C_b} V$$

$$Q_3 = C_3 V_{AC} = \frac{C_3 C_b}{C_a + C_b} V$$

$$Q_5 = C_5 V_{AC} = \frac{C_5 C_b}{C_a + C_b} V$$

$Q_1 + Q_3 + Q_5 = Q = Q_a$ (se cumple)

Análogamente, para el paralelo C_2, C_4 y C_6 a V_{CB} de diferencia de potencial:

$$Q_2 = C_2 V_{CB} = \frac{C_2 C_a}{C_a + C_b} V$$

$$Q_4 = C_4 V_{CB} = \frac{C_4 C_a}{C_a + C_b} V$$

$$Q_6 = C_6 V_{CB} = \frac{C_6 C_a}{C_a + C_b} V$$

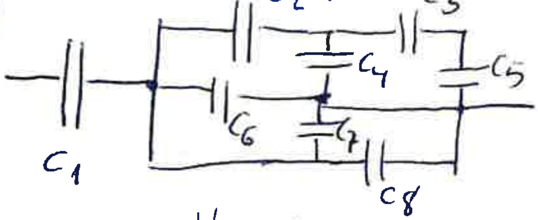
se ve que $Q_2 + Q_4 + Q_6 = Q = Q_b$

c/ La energía electrostática almacenada por el conjunto de la asociación es:

$$U_e = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} C V^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{C_a C_b}{C_a + C_b} V^2 = \frac{1}{2} \frac{(C_1 + C_3 + C_5)(C_2 + C_4 + C_6)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6} V^2$$

Otro **4.5 bis** Capacidad equivalente y energía

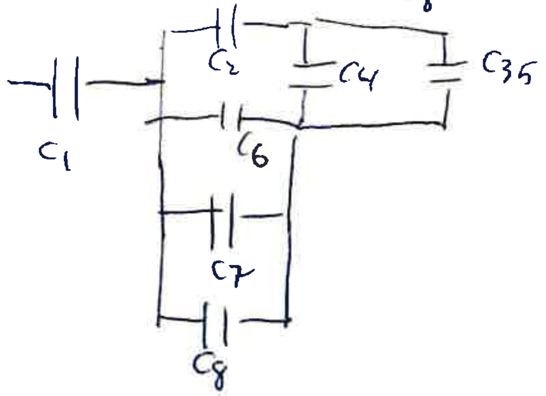


serie de C_3 y C_5

$$C_{35} = \frac{C_3 C_5}{C_3 + C_5}$$

buscando $C_{equivalente}$ progresivamente:

(1)

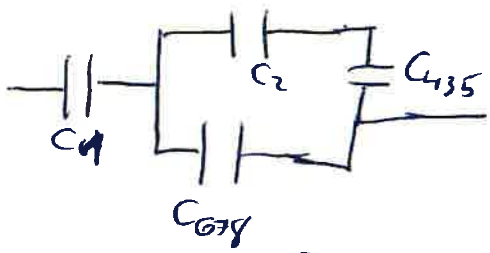


Paralelos 6, 7 y 8

$$C_{678} = C_6 + C_7 + C_8$$

y $C_{435} = C_4 + C_{35}$ =>

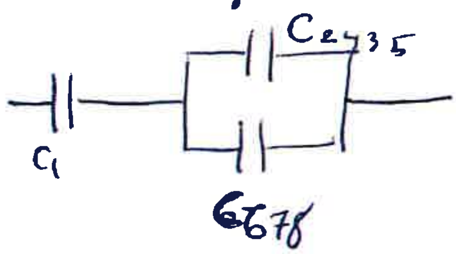
(2)



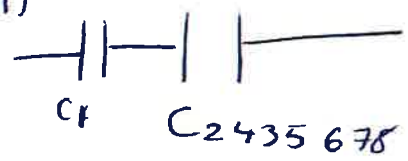
serie de C_2 con C_{435}

$$C_{2435} = \frac{C_2 \, C_{435}}{C_2 + C_{435}}$$

(3)



<=> (4)



<=> (5)

$$C_{2435678} = C_{2435} + C_{678} = C^*$$

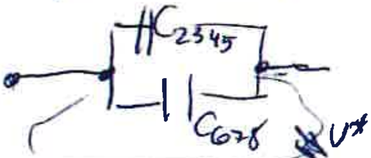
$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C^*}{C_1 + C^*} = 3\,nF$$

2/ $U_e = \frac{1}{2} C_e \, \Delta V^2 = 1.35\,\mu J$

3/ La carga del conjunto es $\underline{Q = C_e \, \Delta V = Q_1 = Q_{2435678}}$

C_6 y C_7 están en paralelo con C_{2435} a la diferencia de potencial

$$V_{2-8} = \frac{Q}{C^*} = V^*$$



$$Q_{2435} = C_{2435} \, V^* \quad y \quad Q_{678} = C_{678} \, V^*$$

y C_6 y C_7 están en paralelo a potencial V^*, luego

$$Q_6 = C_6 \, V^* \quad , \quad Q_7 = C_7 \, V^*$$