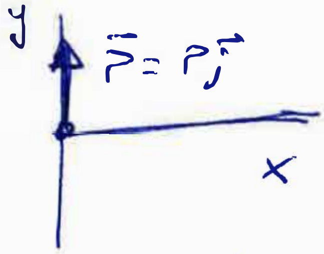
Marzo 2024

Prob. 5.1

Es un ejercicio simple que puede hacerse con el potencial de un dipolo.



Partiendo del potencial creado por un dipolo:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{py}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (1)$$

puede obtenerse $\vec{E}$ por $\vec{E} = -\nabla V$ o bien usar:

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3py}{r^5}\vec{r} - \frac{p\vec{j}}{r^3}\right] \qquad (2)$$

y particularizar en $\vec{r} = \vec{OP} = d\vec{j}$ $(r = d)$

con lo que:

a) $$\vec{F} = q\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3pd}{d^5}d\vec{j} - \frac{p\vec{j}}{d^3}\right] = \frac{qp}{2\pi\varepsilon_0 d^3}\vec{j}$$

y, con $\vec{r}(Q) = 2d\vec{j}$:

b) $$W = -q\,\Delta V = -q\left[V(Q) - V(P)\right] =$$

$$= -q\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p2d}{(2d)^3} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pd}{d^3}\right] = \frac{3qp}{16\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Nota: $\vec{E}$ puede obtenerse del gradiente de (1) aplicando las reglas de derivación de un producto:

$$\nabla\left(\frac{y}{r^3}\right) = (\nabla y)\frac{1}{r^3} + y\,\nabla r^{-3} = \vec{j}\frac{1}{r^3} + y\left(-3r^{-4}\,\vec{e}_r\right)$$

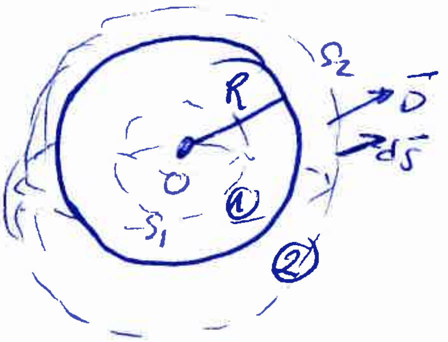
$$= \frac{\vec{j}}{r^3} - \frac{3y}{r^5}\vec{r}$$

y $$\vec{E} = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{y}{r^3}\right)$$

5.2/ Esfera de carga $\rho = \rho_0$ con material dieléctrico

En este caso el material que contiene carga libre de densidad ρ_0 Cm^{-3} es un dieléctrico que, por tanto, también tendrá carga ligada o de polarización (posiblemente tanto en superficie como en volumen).

Aplicando la ley de Gauss al vector desplazamiento $\vec{D}$ y la ley constitutiva de medio lineal $\bar{D} = \varepsilon \vec{E}$, se tiene: (simetría esférica)



en ① $= \{\bar{r} \,/\, 0 < r < R\}$

$$\oint_{S_1 = 4\pi r^2} \bar{D} \cdot d\bar{S} = Q_{int}$$

$$D\, 4\pi r^2 = \int_0^r \rho\, 4\pi r'^2 dr' = \rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\rho_0}{3} r \vec{e}_r = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3} = \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi R^3}$$

y $$\vec{E}_1 = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{\vec{r}}{R^3} \qquad (\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r) \text{ y } Q_0 = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3$$

en ② $= \{\bar{r} \,/\, r > R\}$ análogamente:

$$\oint \bar{D}_2 \cdot d\bar{S}_2 = Q_{int(2)} \Rightarrow D_2\, 4\pi r^2 = Q_0$$

$$\bar{D}_2 = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\rho_0 R^3}{3 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \text{ y } \vec{E}_2 = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

El vector de polarización $\vec{P}$ es:

$$\vec{P}_1 = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{Q_0}{4\pi R^2} \frac{r}{R} \vec{e}_r =$$

$$= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\rho_0 r}{3} \vec{e}_r$$

y $\bar{P}_2 = 0$ (en ② hay vacío).

Para el potencial, de $E = -\frac{dV}{dr}$, por simetría esférica:

en 2, $r \geq R$:

$$\int_0^{V_2} dv = -\int_{r\to\infty}^{r} E_2\, dr \Rightarrow V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

en 1

$$\int_{V_2(R)}^{V_1} dv = -\int_R^{r} E_1\, dr' \Rightarrow V_1 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{r^2}{R^3}-\frac{1}{R}\right)$$

c) La densidad de carga de polarización en la superficie $\sigma_p(R)$ será:

$$\sigma_p(R) = \vec{P}(R)\cdot\vec{n} = \frac{Q_0}{4\pi R^2}\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}$$

mientras que la densidad de carga de polarización en el interior es:

$$\rho_p(r) = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\,\frac{Q_0}{4\pi R^3}\,\nabla\cdot\vec{r}$$

$$= -\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\,\frac{3Q_0}{4\pi R^3} = -\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\,\rho_0$$

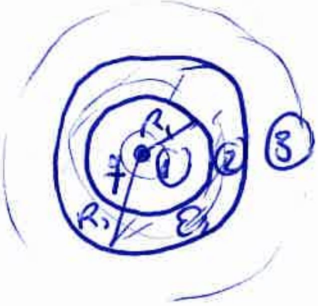
y la carga neta de polarización:

$$Q_p = \int_{S=4\pi R^2}\sigma_p\, dS + \int_{Vol.}\rho_p(r')\left(4\pi r'^2 dr'\right) = \frac{Q_0}{4\pi R^2}\,4\pi R^2\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r} -$$

$$-\rho_0\,\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\,\frac{4\pi}{3}R^3 = 0 \qquad \left(\rho_0\,\frac{4\pi}{3}R^3 = Q_0\right).$$

Pedro 5.3

Es similar al problema anterior, ahora hay una cáscara dieléctrica sin carga libre y una partícula cargada puntual en el centro, lo que no rompe la simetría esférica. Distinguiendo tres regiones ①, ② y ③ y aplicando la ley de Gauss al vector $\vec{D}$:



$$\oint_{S_1} \bar{D} \cdot d\bar{S} = \frac{Q_{int}(1)}{1}$$

$$D_1 4\pi r^2 = q_0 \Rightarrow \quad (\varepsilon_1 = \varepsilon_0)$$

$$\bar{D}_1 = \frac{q_0}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad y \quad \vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

en ②,

$$D_2 4\pi r^2 = q_0 \Rightarrow \quad \text{(no hay carga libre en dieléctrico } \rho = 0)$$

$$\bar{D}_2 = \frac{q_0}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r} \; ; \; \bar{E}_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \; y \; \underline{\underline{\vec{P}_2 = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\vec{D}_2}}$$

y en ③

$$D_3 4\pi r^2 = q_0$$

$$\bar{D}_3 = \frac{q_0}{4\pi r^2}\frac{\bar{r}}{r} \quad y \quad \bar{E}_3 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

por lo que $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = \bar{D}_3$ pero $\bar{E}$ es discontinuo en $r = R_1$ y $r = R_2$.

b) Para el potencial, de $dV = -E\,dr$:

$$\int_0^{V_3} dV = -\int_\infty^r E_3\,dr \Rightarrow V_3 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

en ②

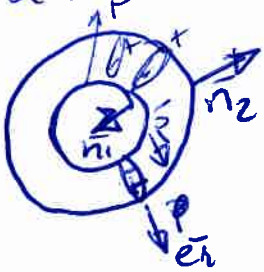
$$\int_{V_3(R_2)}^{V_2} dV = -\int_{R_2}^r E_2\,dr \Rightarrow V_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon_2 - 1}{R_2}\right)$$

y en ① $(0 < r \leq R_1)$ por continuidad de V:

$$\int_{V_2(R_1)}^{V_1} dV = -\int_{R_1}^{r} E_1 dr \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{R_1} + \frac{\varepsilon_r}{r} - \frac{1-\varepsilon_r}{R_2}\right)$$

c) La densidad de carga superficial en $r = R_1$:



$$\sigma_p(R_1) = \vec{n}_1 \cdot \vec{P}(R_1) = (-\vec{e}_r) \cdot \vec{P}(R_1) =$$
$$= -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{q_0}{4\pi R_1^2} \quad (<0)$$

en $r = R_2$:

$$\sigma_p(R_2) = \vec{n}_2 \cdot \vec{P}(R_2) = \vec{e}_r \cdot \vec{P}(R_2) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{q_0}{4\pi R_2^2} \quad (>0)$$

y la densidad volumétrica de carga de polarización:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\underbrace{\left(\nabla \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}\right)}_{\text{cero!}}\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{q_0}{4\pi} = 0$$

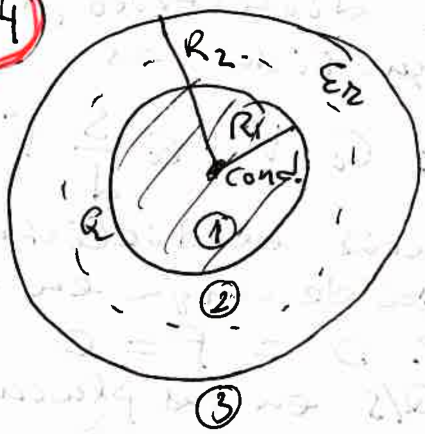
Siendo la carga total de polarización:

$$Q_p = \int_{S_1 = 4\pi R_1^2} \sigma_{p_1} dS_1 + \int_{S_2 = 4\pi R_2^2} \sigma_{p_2} dS_2 + \int_{R_1}^{R_2} \cancel{\rho_p(r')}^{\,0} (4\pi r'^2 dr') =$$

$$= -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q_0 + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} q_0 = 0$$

Sugerencia: repetir el problema si en el dieléctrico hay carga libre $\rho = kr$ donde k es tal que la carga neta libre del dieléctrico es $Q = -q_0$.

5.4



En las regiones ①, ②, ③ por Gauss a $\vec{D}$:

a) $D_1\, 4\pi r^2 = 0$

$D_2\, 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_2 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$

$D_3\, 4\pi r^2 = Q \Rightarrow D_3 = D_2$

dando el campo $\vec{E} = E\,\vec{u}_r$:

$$E = \begin{cases} E_1 = 0, & 0 < r < R_1 \\ E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\dfrac{1}{r^2}, & R_1 < r < R_2 \\ E_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r > R_2 \end{cases}$$

polarización en ②

$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_2\,\vec{u}_r$

Las densidades de carga de polarización son:

$$\sigma_p(R_1) = \vec{n}_{2\to1}\cdot\vec{P}(R_1) = (-\vec{u}_r)\cdot\vec{P}(R_1) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_p(R_2) = \vec{n}_{2\to3}\,\vec{P}(R_2) = \vec{u}_r\cdot\vec{P}(R_2) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

como $\rho_p = -\nabla\cdot P = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\nabla\cdot\left[\dfrac{Q}{4\pi r^3}\vec{r}\right] = 0$

la carga total de polarización (en superficies) es

$$Q_p = \sigma_p(R_1)\,4\pi R_1^2 + \sigma_p(R)\,4\pi R_2^2 = 0$$

NOTA: la densidad de carga en la superficie del conductor es

$$\sigma(R_1) = \vec{n}\cdot\vec{D}_2(R) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

luego en $r = R_1$, $\sigma_p = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$ se cumple.

b) Para el potencial:

$$\int_0^{V_3} dV = -\int_\infty^{r > R_2} E_3\,dr \Rightarrow V_3 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\int_{V_3(R_2)}^{V_2} dV = -\int_{R_2}^{r \text{ en } ②} E_2\,dr \Rightarrow V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right)$$

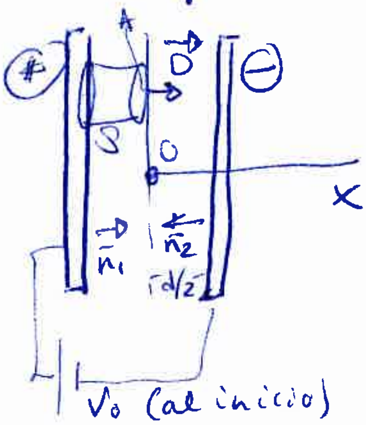
$$\int_{R_1}^{r < R_1} dV = \int E_1\,dr = 0 \Rightarrow V_1 = V_2(R_1)\ \underline{\underline{\text{cte}}}\ \text{(conductor)}$$

Prób 5.5

El condensador plano-paralelo infinito ideal se carga a potencial V_0, adquiriendo carga Q. Se le retira de la fuente y se introduce el dieléctrico, el condensador está aislado y por tanto tras el proceso la carga sigue siendo Q en sus armaduras:

$$Q = C_0 V_0 = \varepsilon_0 \frac{S V_0}{d} = Q\Big|_{\text{con dieléc.}}$$

en función de los datos del problema (S, d y V_0).



Aplicando la ley de Gauss al vector $\vec D$ ($\nabla\cdot\vec D = \rho = 0$ en dieléctrico o vacío)

$$\oint_{S_{\text{cilindro}}} \vec D\cdot d\vec S = Q_{int} \Rightarrow \cancel{D\Big|_{\text{cond.}}}^{\,0}\cdot A + D\Big|_{\text{dielec.}}\cdot A = \sigma A$$

pues $\vec D = D\,\vec i$ (simetría plana)

Se tiene:

$$D = \sigma \Rightarrow \vec D = \sigma\,\vec i = \frac{Q}{S}\vec i = \frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\vec i$$

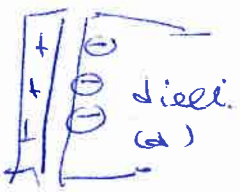
por tanto:

a) $$\vec E = \frac{\vec D}{\varepsilon} = \frac{V_0}{\varepsilon_r d}\vec i = -\frac{\Delta V'}{d}$$

es el campo dentro del dieléctrico (varía la diferencia de potencial entre armaduras al quedar Q fija).

a) La Polarización:

$$\vec P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec D = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\vec i$$



b) Densidades de carga de polarización

$$\sigma_{P1} = \vec n_{d\to 1}\cdot\vec P(x=-d/2) = (-\vec n_1)\cdot\vec P(-d/2) \equiv (-\vec j)\cdot\vec P = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}$$

y $$\sigma_{P2} = (\vec n_{die\to 2})\cdot\vec P(x=d/2) = (-\vec n_2)\cdot\vec P(\tfrac{d}{2}) \equiv \vec j\cdot\vec P = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}$$

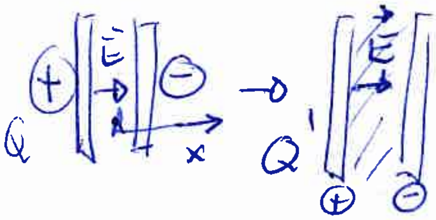
c) La diferencia de potencial:

$$\vec E = \frac{V_0}{\varepsilon_0 d}\vec i = -\frac{dV}{dx}\vec i \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{x=-d/2}^{d/2}\frac{V_0\,dx}{\varepsilon_r d} \Rightarrow$$

$$V(d/2) - V(-d/2) = -\frac{V_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow |\Delta V'| = \frac{V_0}{\varepsilon_r} < V_0$$

Prob 5.6

Es realmente el mismo problema sólo que ahora el condensador se carga con una fuente de alimentación a potencial V_0 que no se retira al introducir el dieléctrico por lo que el campo $\vec{E}$ (diferencia de potencial, en realidad) es el mismo antes y después del relleno



$$\vec{E} = \frac{V_0}{d}\vec{i} = \vec{E}\Big|_{\text{tras rellenar}} = -\frac{\Delta V}{d}$$

por lo que ahora será la carga en las armaduras la que varíe, de Q a Q' (de σ a σ').

Como antes, tras el relleno

$$\vec{D} = \sigma'\vec{i} = \frac{Q'}{S}\vec{i} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$$

lo que da:

a) $$\vec{D} = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\vec{i} \qquad \left(\sigma' = \varepsilon_r \sigma\Big|_{\text{vacío}}\right)$$

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec{D} = (\varepsilon_r - 1)\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}\vec{i}$$

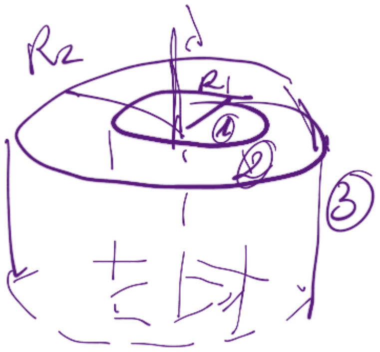
b) $$\sigma_{P1} = (-\vec{i})\cdot\vec{P} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 V_0/d$$

$$\sigma_{P2} = \vec{i}\cdot\vec{P} = (\varepsilon_r - 1)\frac{\varepsilon_0 V_0}{d}$$

y c) $$Q' = \sigma' S = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S V_0}{d} = \varepsilon_r Q\Big|_{\text{vacío}} > Q\Big|_{\text{vacío}}$$

Prob. 5.7/ Se tiene un hilo de carga λ(C/m) rodeado de una cáscara cilíndrica de aislante de constante ε_r y una lámina en $\rho=R_2$ metálica de carga superficial $\sigma = -\lambda/2\pi R_2$.

Por simetría, puede obtenerse $\vec{D}$ por la Ley de Gauss



distinguiendo las regiones

$① = \{ r_\perp = \rho \,/\, 0<\rho<R_1 \}$

$② = \{ r_\perp = \rho \,/\, R_1<\rho<R_2 \}$ y $③ \{\rho > R_2\}$

Con $\vec{D} = D\,\vec{u}_\rho \Rightarrow$

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{int} = \oint D(\rho)\,dS$$

tomando superficies gaussianas cilíndricas axiales en cada región de radio ρ genérico y altura H (en OZ):

en ①

$$D_1 2\pi\rho H = \lambda H \Rightarrow$$

$$\vec{D}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\rho}\vec{u}_\rho \;;\; \vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{u}_\rho \quad \text{(radiales)}$$

en ② $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, luego:

$$D_2 2\pi\rho H = \lambda H \Rightarrow \vec{D}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\rho}\vec{u}_\rho \;;\; \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\rho}\vec{u}_\rho$$

y en ③ $\rho > R_2$:

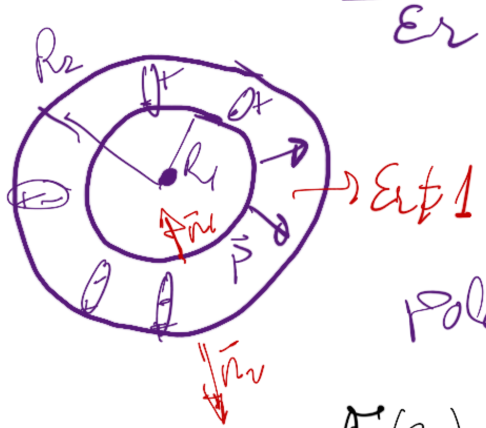
$$D_3 2\pi\rho H = \overbrace{\lambda H}^{\text{hilo}} + \overbrace{\sigma 2\pi R_2 H}^{\text{lámina}} \Rightarrow$$

$$D_3 2\pi\rho = \lambda - \lambda = 0 \Rightarrow \vec{D}_3 = 0 \;;\; \vec{E}_3 = 0$$

El campo se anula en el exterior.

Para la Polarización (en zona ② sólo) se tiene:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\vec{D}_2 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi\rho}\vec{u}_\rho \quad (\text{radial})$$



Con $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\vec{u}_\rho = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}}{}$

Las densidades de carga ρ de polarización serán:

$$\sigma_p(R_1) = \vec{n}_1 \cdot \vec{P}(R_1) = (-\vec{u}_\rho)\cdot\vec{P}(R_1) =$$
$$= -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi R_1} \quad (C/m^2)$$

$$\sigma_p(R_2) = \vec{n}_2 \cdot \vec{P}(R_2) = \vec{u}_\rho \cdot \vec{P}(R_2) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi R_2}$$

y la densidad volumétrica de carga ρ_p:

$$\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho P) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi}\right) = 0$$

c/ Para el potencial, por simetría $E = -dV/d\rho$, luego

Suponiendo $V(\rho = R_2) = 0$

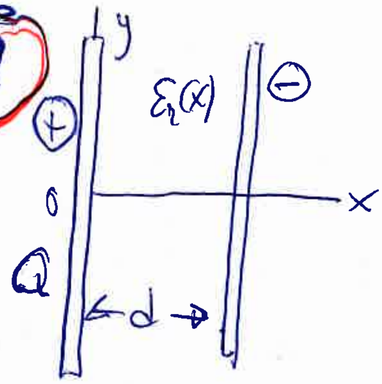
$$\int_0^{V_3} dV = -\int_{R_2}^{\rho} E_3\, d\rho \Rightarrow 0 \Rightarrow V_3 = 0 \quad (\rho \geq R_2)$$

$$\int_0^{V_2} dV = -\int_{R_2}^{\rho} E_2\, d\rho \Rightarrow V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{\rho} \quad (\rho = R_1)$$

y

$$\int_{V_2(R_1)}^{V_1} dV = -\int_{\rho=R_1}^{\rho} E_1\, d\rho \Rightarrow V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\frac{R_1}{\rho} + \frac{1}{\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1}\right]$$

Prob 5.8



Como el anterior, con $\varepsilon_r(x)$, $\varepsilon_r(0)=\varepsilon_{r1}$, $\varepsilon_r(d)=\varepsilon_{r2}$

a)
$$\begin{cases} \vec{D} = \sigma\,\vec{i} \quad \text{(de Gauss)} \\ \vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\dfrac{\vec{i}}{\varepsilon_r(x)} \\ \vec{P} = \dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\dfrac{\sigma}{1}\vec{i} = \dfrac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\dfrac{Q}{S}\vec{i} \end{cases}$$

luego

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\frac{Q}{S}\frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) = -\frac{Q}{S}\frac{1}{\varepsilon_r^2}\frac{d\varepsilon_r}{dx}$$

$$\sigma_P(0) = \vec{n}_0\cdot\vec{P} = (-\vec{i})\cdot\vec{P}(0) = -\frac{Q}{S}\frac{\varepsilon_{r1}-1}{\varepsilon_{r1}}$$

$$\sigma_P(d) = \vec{n}_d\cdot\vec{P}(d) = \vec{i}\cdot\vec{P}(d) = \frac{Q}{S}\frac{\varepsilon_{r2}-1}{\varepsilon_{r2}}$$

b) $$Q_P = \int_0^d \rho_P(x')\,S\,dx' = -Q\int_0^d dx'\,\frac{d}{dx'}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right) =$$

$$= -Q\left(1-\frac{1}{\varepsilon_r}\right)\Big|_0^d = Q\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right) = -\left(\sigma_P(0)S+\sigma_P(d)S\right)$$

c) Son $\sigma_P(0)$ y $\sigma_P(d)$ de antes.

d) $$C = \frac{Q}{V} \quad ; \quad V-0 = -\int_d^0 E\,dx = \int_0^d \frac{Q/S}{\varepsilon_0}\frac{dx}{\varepsilon_r(x)}$$

si ε_r es lineal en x

(recta:) $$\frac{\varepsilon_r-\varepsilon_{r1}}{x} = \frac{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}}{d} \Rightarrow \varepsilon_r = \varepsilon_{r1}+\frac{x}{d}(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1})$$

que da tras la integración (inmediata)

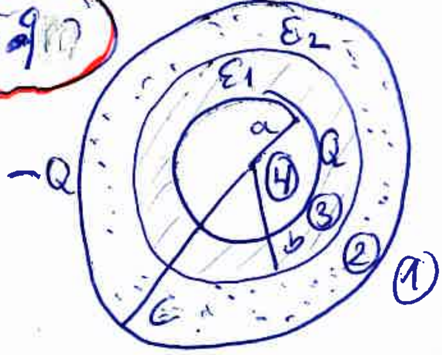
$$V = \frac{Qd}{S\varepsilon_0}\frac{\ln(\varepsilon_{r2}/\varepsilon_{r1})}{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}} = \frac{Q}{C}$$

Nota: Observar que conocido $\varepsilon_r(x)$ general la carga de polarización total siempre es nula

$$Q_P = S\,\sigma_P(0)+S\,\sigma_P(d)+\int_0^d\left(-\frac{\partial P}{\partial x}\right)S\,dx = S\left(-P(0)+P(d)\right)+$$

$$+(-P)\Big|_0^d S = S\left(-P(0)+P(d)-P(d)+P(0)\right) = 0$$

P6
5-9-m



a) En las regiones: ① $|r>c|$ ② $\{b<r<c|$ etc

puede determinarse $\vec{D}$ por el Th. de Gauss; que es tal que (radiales)

$$D_1=0\ ;\ D_2=D_3=\frac{Q}{4\pi r^2}\ ,\ D_4=0 \text{ (conductor)}$$

de aquí sale $\vec{E}$ y $V=-\int E\,dr+ct$:

$(V_1(r\to\infty)=0)$

en $\frac{\vec{r}}{r}$
$$\begin{cases} E_1=0 \\ E_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{1}{r^2} \\ E_3=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{1}{r^2} \\ E_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1=0 \\ V_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\dfrac{1}{r}+C_2 \\ V_3=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{1}{r}+C_3 \\ V_4=C_4 \end{cases}$$

Por continuidad del potencial se tiene para las constantes C_j:

$$\begin{cases} V_2(c)=V_1(0)=0 \Rightarrow C_2=-Q/4\pi\varepsilon_2 c \\ V_2(b)=V_3(b) \Rightarrow C_3=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{c}\right)-\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{1}{b} \\ V_4(a)=V_3(a) \Rightarrow C_4=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_1}\dfrac{1}{a}+C_3 \end{cases}$$

La capacidad:

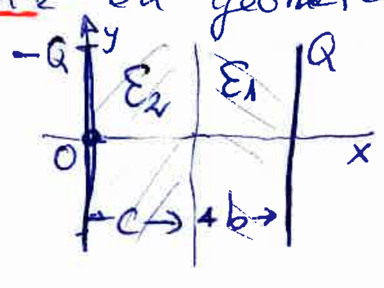
b) $$C=\frac{Q}{\Delta V}=\frac{Q}{V_c-V_a}$$

A) Completar calculando la polarización $\vec{P}$ en ② y ③ y las cargas de polarización (superficial y volumétrica) en esas zonas.

Sol.
$$\begin{cases} \sigma_p(a)=\vec{n}_{3\to4}\cdot\vec{P}_3(a)=-\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\dfrac{Q}{4\pi a^2} \\ \sigma_p(b)=\vec{n}_{3\to2}\,\vec{P}_3(b)+\vec{n}_{2,3}\cdot\vec{P}_2(b) \\ \quad =\left(\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1}-\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\right)Q/4\pi b^2 \\ \sigma_p(c)=\vec{n}_{2,1}\cdot\vec{P}_2(c)=\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_0}{\varepsilon_2}\dfrac{Q}{4\pi c^2} \end{cases}$$

sol. $\rho_p=0$ es inmediato.

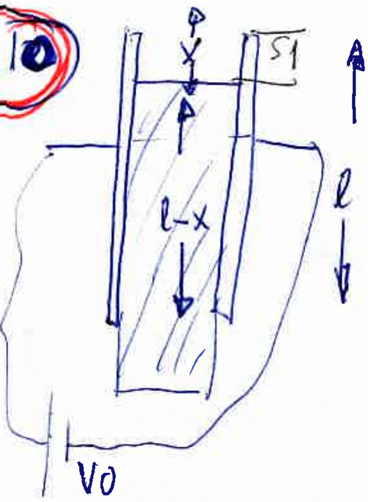
B) ~~Repetir~~ en geometría plana



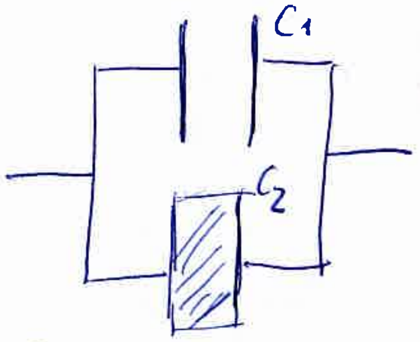
Sol. $$\Delta V=\frac{Qd}{S\varepsilon_0}\left[\frac{c}{b}\frac{1}{\varepsilon_{r_2}}+\left(1-\frac{c}{b}\right)\frac{1}{\varepsilon_{r_1}}\right]$$

$$C=\frac{Q}{\Delta V}$$

5.10

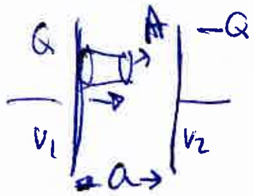


Equivale a la asociación en paralelo:



$$C = C_1 + C_2$$

NOTA: Para un condensador plano-paralelo general:



$$\begin{cases} DA = \sigma A \Rightarrow D = \sigma = \varepsilon E \Rightarrow \\ E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = -\dfrac{dV}{dx} \Rightarrow V = V_1 - \dfrac{\sigma}{\varepsilon} x \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{V_1 - V_2}{a} = \dfrac{V_0}{a} = \dfrac{Q}{S\varepsilon} = E \end{cases}$$

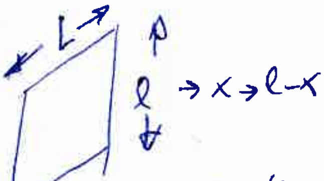
La capacidad $\quad C = \dfrac{Q}{V_0} = \varepsilon \dfrac{S}{a} > \varepsilon_0 \dfrac{S}{a} = C_{vacío}$

polarización $\quad \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$.

Aplicado a este caso con $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon$

$$C = \varepsilon \frac{S_2}{a} + \varepsilon_0 \frac{S_1}{a}$$

donde S_K se refiere a las superficies enfrentadas en cada placa que guardan las proporciones:



$$\frac{S}{l} = \frac{S_2}{l-x} = \frac{S_1}{x}$$

$S = lL$; $S_2 = (l-x)L$, $S_1 = xL$

Entonces:

$L = \frac{S}{l}$ $$C = \varepsilon_0 \frac{S}{a} \left\{ \frac{x}{l} + \varepsilon_r \frac{l-x}{l} \right\}$$

2/ La energía U_e almacenada:

$$U_e = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} C_1 V_0 V_0 + \frac{1}{2} C_2 V_0 V_0$$

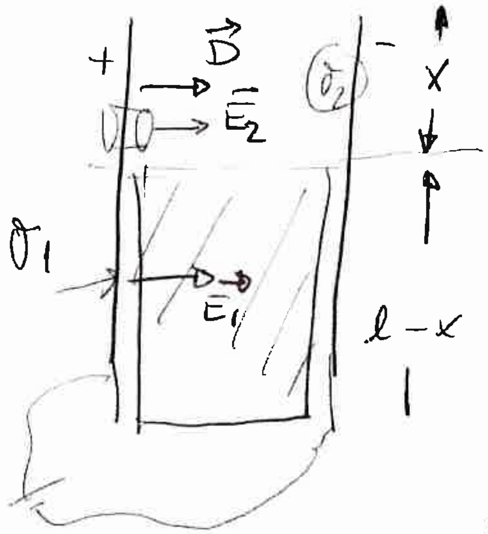
$$= \frac{1}{2} V_0^2 \varepsilon_0 \frac{S}{a} \left\{ \frac{x}{l} + \varepsilon_r \frac{l-x}{l} \right\} = \frac{1}{2} C V_0^2$$

como $\dfrac{dU_e}{dx} = \dfrac{V_0^2 \varepsilon_0 S}{2al}(1 - \varepsilon_r) < 0 \Rightarrow$ si se aumenta x (retiras dieléctrico) U_e disminuye $\Rightarrow U_e|_{con\ dieléc} > U_e|_{sin\ dieléc}$

También puede calcularse de otra forma:

Prob. 5.10 Apéndice: Densidades de carga

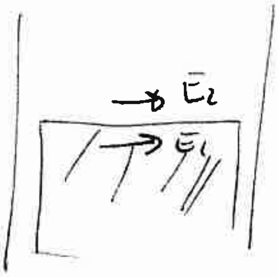
②



$D =$ cargas superf. en conductor σ_2 y σ_1 (+)

$$D_2 = \sigma_2 = \varepsilon_0 E_2$$

$$D_1 = \sigma_1 = \varepsilon E_1$$



continuidad de componentes tangenciales de $\vec E$ => (tangente al medio)

$$\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon} \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \varepsilon_r \sigma_2}$$

o bien

$$E_i = \left|\frac{\Delta V}{a}\right| = \frac{V_0}{a} \Rightarrow$$

$$V_0 = a\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = a\frac{\sigma_1}{\varepsilon} \Rightarrow \sigma_1 = \varepsilon_r \sigma_2$$

Carga polarización en ②

$$\sigma_{2P} = \vec P \cdot \vec n = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_2 \vec i \cdot (-\vec i) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\sigma_2$$

Cargas en la (+)

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sigma_1 \overbrace{S\frac{l-x}{l}}^{S_1} + \sigma_2 \overbrace{S\frac{x}{l}}^{S_2} =$$

$$= S V_0 \frac{\varepsilon_0}{a}\left\{\varepsilon_r\frac{l-x}{l} + \frac{x}{l}\right\} \Rightarrow$$

$$C = \frac{Q}{V_0} = \varepsilon_0 \frac{S}{a}\left\{\frac{x}{l} + \varepsilon_r \frac{l-x}{l}\right\}$$

2) Energía $U_e = \frac{1}{2}\int \rho_e V dv = \frac{1}{2} Q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} Q V_0$

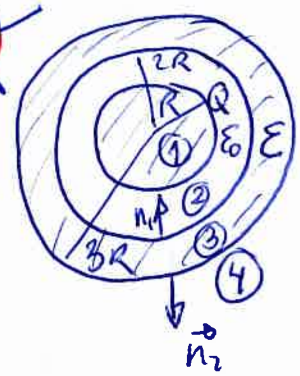
$$= \frac{1}{2} Q_1 V_0 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 =$$

$$= \frac{1}{2} V_0^2 C(x)$$

$$\frac{dU_e}{dx} = \frac{V_0^2 \varepsilon_0 S}{2a}\left\{(1-\varepsilon_r)\frac{1}{l}\right\} < 0$$ a V_0 cte

Si $x \uparrow$ $U_e \downarrow$ → U_e con dielé $>$ $U_e|_{\text{sin diel}}$

~~5.11~~



$\varepsilon_r = 1 + \alpha r$ en $\{2R < r < 3R\} = ③$

los campos son radiales en todas las zonas

con
$$D\, 4\pi r^2 = Q_{int}$$

se tiene:

1) $D_3 = \dfrac{Q}{4\pi r^2}$, $E_3 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \dfrac{1}{1+\alpha r}$

$E_1 = 0$ y $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $E_4 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

2) con $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_3 = \dfrac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \dfrac{Q}{4\pi r^2} \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{Q}{4\pi r^2} \dfrac{\alpha r}{1+\alpha r} \dfrac{\vec{r}}{r}$

$$\begin{cases} \sigma_p(2R) = \vec{n}_1 \cdot \vec{P}(2R) = \left(-\dfrac{\vec{r}}{r}\right) \cdot \vec{P}(2R) = -\dfrac{\alpha Q}{8\pi R} \dfrac{1}{1+2\alpha R} \\ \sigma_p(3R) = \vec{n}_2 \cdot \vec{P}(3R) = \dfrac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{P}(3R) = \dfrac{Q\alpha}{12\pi R} \dfrac{1}{1+3\alpha R} \\ \rho_p = -\nabla \cdot \vec{P} = -\dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) = -\dfrac{Q}{4\pi r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\alpha r}{1+\alpha r}\right) \end{cases}$$

$$= -\frac{Q\alpha}{4\pi r^2} \frac{1}{(1+\alpha r)^2}$$

3) Con $V(r \to \infty) = 0$ (conductor 2 en el infinito)

$$C = \frac{Q}{V_0}$$

y
$$\int_{V_0}^{0} dV = -\int_R^\infty E\, dr = -\left\{ \int_R^{2R} E_2 dr + \int_{2R}^{3R} E_3 dr + \int_{3R}^{\infty} E_4 dr \right\}$$

$$\Rightarrow \quad V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{R} - \alpha \ln \frac{3(1+2\alpha R)}{2(1+3\alpha R)} \right\}$$

Nota: la energía electrostática sería

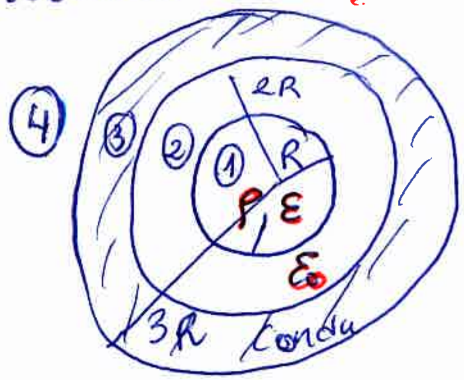
$$U_e = \frac{1}{2}\int dq\, V = \frac{1}{2}\int \sigma(R)\, dS\, V(R) = \frac{1}{2} Q\, V(R)$$

que coincide con la calculada por:

$$U_e = \frac{1}{2}\int \vec{D}\cdot\vec{E}\, dv = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{\infty} \vec{D}\cdot\vec{E}\, 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2\alpha}{8\pi\varepsilon_0{}^2}\left[\frac{1}{\alpha R} + \ln\left[\frac{2(1+3\alpha R)}{3(1+2\alpha R)}\right]\right]$$

Problema de Examen 2011, 12.1



1) $D_1 \, 4\pi r^2 = \rho \frac{4\pi}{3} r^3$, $0<r<R$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon} r \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon}\vec{r}$$

2) $D_2 4\pi r^2 = \rho \frac{4\pi}{3} R^3$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad , R<r<2R$$

3) Como $E_3 = 0$ y $\vec{E}_4 = \vec{E}_2$

$$\int_0^V dV = -\int_\infty^R \vec{E}\cdot d\vec{r} \Rightarrow V_4 = \int_r^\infty E_2 \, dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \quad , r \geq 3R$$

4) $V_3(3R) = V_4(3R) = \frac{\rho}{9\varepsilon_0} R^2$

5) $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_1 = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\rho}{3} \vec{r}$

6) $\sigma(2R) = \varepsilon_0 \vec{n}_{3\to 2} \cdot \vec{E}_2(2R) = (-\vec{u}_r) \cdot \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{(2R)^2} \vec{u}_r$

$Q_i = Q(2R) = \sigma(2R) \cdot 4\pi(2R)^2 = -Q$ (cara interna conductor)

7) $\sigma(3R) = \varepsilon_0 \vec{n}_{3\to 4} \cdot \vec{E}_4(3R) = \vec{u} \cdot \vec{E}_4(3R) = \frac{\rho}{3} \frac{R}{4^2}$

$Q_e = Q(3R) = Q$, $Q|_{conductor} = Q - Q = 0$

8) $\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\rho}{3} 3$

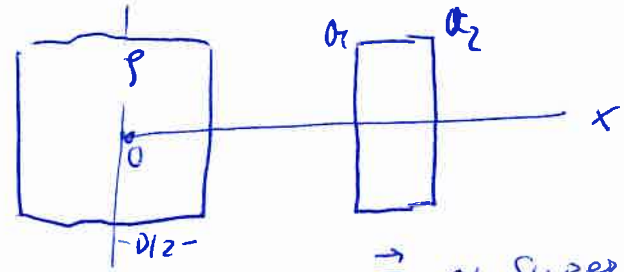
9) $\sigma_P(R) = \vec{n}_{1\to 2} \cdot \vec{P} = \vec{u}_r \cdot \vec{P}(R) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\rho R}{3}$

comprob. $Q_P = \int_0^R \rho_P \, 4\pi r^2 dr + \sigma_P(R) \, 4\pi R^2 = 0$

10) $$U_e|_{dielec} = \frac{1}{2}\int_0^R \vec{D}_1 \cdot \vec{E}_1 \, 4\pi r^2 dr$$

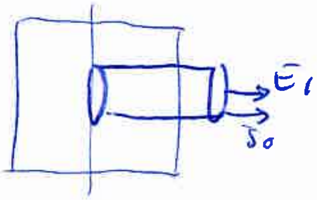
$$= \frac{2\pi}{45} \frac{\rho^2 R^5}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Examen 12-13.3



En cada x, $\vec{E}$ es superposición de $\vec{E}_\rho$ (creado por ρ) y de $\vec{E}_{\theta_1} + \vec{E}_{\theta_2}$ (creados por superficies con cargas θ_1 y θ_2)

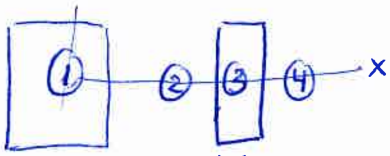
$$E_\rho = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} + E_\rho(0) , & -\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2} \\ E_{\rho 1} , & x > D/2 \end{cases} \quad , \quad E_\rho(0) = 0 \text{ (simetría de carga)}$$



$\rightarrow \oint \vec{E}_\rho \cdot d\vec{S}_0 = Q_0/\varepsilon_0 \rightarrow E_{\rho 1} \cancel{S_0} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \dfrac{D}{2} \cancel{S_0}$

potencial creado por ρ
$$V_\rho = \begin{cases} -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} \\ -\dfrac{\rho D}{2\varepsilon_0} x + V_1 = -\dfrac{\rho D}{2\varepsilon_0} x + \dfrac{1}{8} \dfrac{\rho D^2}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

4/ Campo total:



$$E_1 = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{\theta_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\theta_2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0} - \frac{2a}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0} - \frac{2a}{\varepsilon_0} = -\frac{a}{\varepsilon_0}$$

5/ $V = -\int_0^{D/2} E\,dx = \dfrac{3}{4} \dfrac{aD}{\varepsilon_0}$; $E_{\pm\infty} = \pm\left(\dfrac{D\rho}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\theta_1+\theta_2}{2\varepsilon_0}\right)$

6/ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$; $\begin{cases} D_1 = \rho x - 2a \\ D_2 = -a \\ D_3 = -a + 4a \end{cases}$

$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$ etc