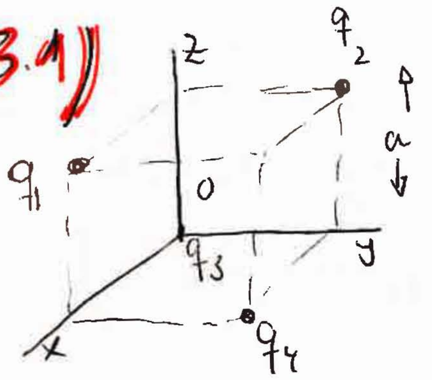
# Problemas Tema 3 (y algunos adicionales)

2024

**3.1)**




Piden el campo creado por las cargas $q_1$, $q_2$ y $q_4$ en el origen y fuerza sobre $q_3$. Es elemental y puede generalizarse para ver el campo en todo punto $\vec{r}$.

Las coordenadas de fuente y de campo serían.

fuente $\rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}\big|_{q_1} = a\vec{i} + a\vec{k} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}\big|_{q_2} = a\vec{j} + a\vec{k} \\ \vec{r}_4 = \vec{r}\big|_{q_4} = a\vec{i} + a\vec{j} \end{cases}$$

campo en P $\rightarrow$ $\vec{r}_3 = 0$ (particular)

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ punto P, cualquiera que no tenga carga puntual

Luego

$$\vec{E} = \sum_{q_i} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{[(x-a)^2+y^2+(z-a)^2]} \frac{(x-a)\vec{i} + y\vec{j} + (z-a)\vec{k}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+(z-a)^2}} + \right.$$

$$+ \frac{q_2}{(x^2+(y-a)^2+(z-a)^2)^{3/2}} \left(x\vec{i} + (y-a)\vec{j} + (z-a)\vec{k}\right) +$$

$$\left. + \frac{q_4}{((x-a)^2+(y-a)^2+z^2)^{3/2}} \left((x-a)\vec{i} + (y-a)\vec{j} + z\vec{k}\right) \right\} \quad (1)$$

que da el campo pedido en el origen si $\vec{r}=0$, o sea $x=y=z=0$.

El potencial en un punto genérico P sería.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+(z-a)^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(y-a)^2+(z-a)^2+x^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{q_3}{\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+z^2}} \right\} \quad (2)$$

y se puede ver que en $x=y=z=0$, da el

valor en el origen $V_0$ que da el potencial que lleva a la energía potencial de $q_3$

$$E_{p3} = q_3 V_0 = q_3 V(0,0,0)$$

por lo que el campo que crean las otras tres para llevar a $q_3$ del origen al infinito es:

$$W = -q_3 (V_\infty - V_0) = -(E_{p3}(\infty) - E_{p3}(0))$$

$$= q_3 V_0$$

que será realizado por el campo si $W > 0$.

El trabajo a realizar (desde el exterior) será $W_a = -W$, de signo opuesto al $W$ pues se supone que en todo punto se aplica la fuerza $\vec{F}_a = -\vec{F} = -q_3 \vec{E}$ opuesta a la del campo en cada punto (creado por las otras cargas) y no se varía la energía cinética de $q_3$.

Observar que de (2) puede obtenerse (1) ya que da el potencial en todo punto $\vec{r}$, $\vec{E} = -\nabla V$.

Nota: Para la energía electrostática de la distribución basta aplicar:

$$U = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_{q_i}(\vec{r}_i) \overset{\text{mejor}}{=} \sum_{\substack{\text{pares}\\ i,j}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \cancel{\frac{q_2 q_1}{r_{21}}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}} \right\}$$

ojo (ya contado)

con $r_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |a\hat{i} - a\hat{j}| = \sqrt{2a^2}$ etc

No vale $\frac{\varepsilon_0}{2}\int \vec{E}^2 dv$ pues $\vec{E}$ no está definido (es $\infty$) donde hay cargas puntuales.

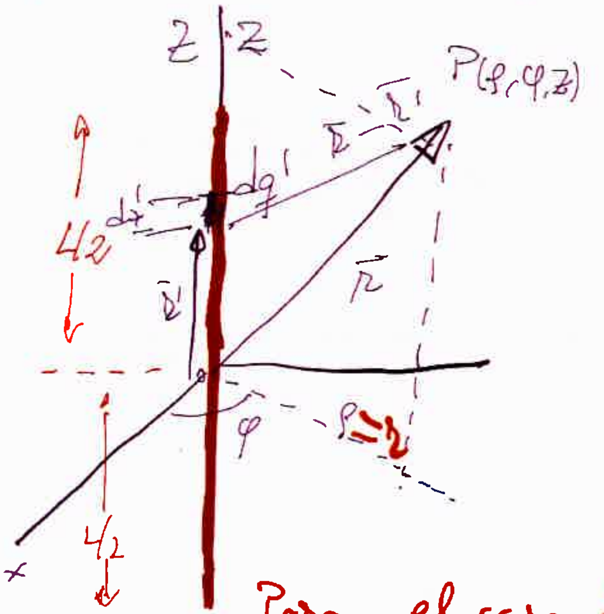
Casos de integración directa.

3.2) Campo creado por un segmento rectilíneo de carga uniforme con densidad lineal de carga $\lambda$.

Piden, en principio, el campo $\vec{E}$ y el potencial creado por el hilo finito de carga en el plano perpendicular al hilo que lo divide en dos partes iguales, no obstante, el problema no se complica en exceso si se evalúa el campo en cualquier punto P del espacio, con coordenadas (de campo) expresadas en polares $(\rho, \varphi, z)$.

Por la simetría del problema (cilíndrica) el campo va a resultar independiente de la variable angular $\varphi$.

Como siempre, evaluemos el campo elemental $d\vec{E}$ creado por un elemento de carga $dq'$ en un punto P del espacio.




Las coordenadas de fuente son

$\vec{r}' = z'\vec{k}$

y las de campo (P):

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{\rho} + z\vec{k} =$

$= \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{j} + z\vec{k}$

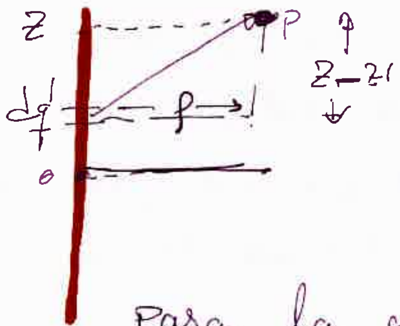
siendo $\lambda$ de $\lambda = dq'/dz'$:

$dq' = \lambda\,dz'$

Para el caso de a) basta tomar $z = 0$.

Entonces, con

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' = \rho^2 + (z-z')^2$$




dando:

$$d\vec{E} = \frac{\lambda dz'}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\,\mathrm{sen}\varphi\,\vec{j} + (z-z')\vec{k}}{\left(\rho^2 + (z-z')^2\right)^{3/2}}$$

para la que resta integrar en la variable $z'$ entre $z' = -L/2$ y $z' = L/2$ para $\varphi$ fijo, por lo que $\vec{\rho} = \rho\vec{u}_\rho = \rho(\cos\varphi\,\vec{i} + \mathrm{sen}\varphi\,\vec{j}) = r_1\vec{u}_1$ (notaciones)

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\rho\vec{u}_\rho\int_{-L/2}^{L/2} dz'\frac{1}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} + \vec{k}\int\frac{(z-z')dz'}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}}\right.$$

Para el que sólo necesitamos dos primitivas que pueden verse en la tabla del libro de problemas

$$I_1 = \int\frac{dz'}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} = -\int\frac{dZ}{(\rho^2+Z^2)^{3/2}} = -\frac{z-z'}{\rho^2\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}$$

(cambio $Z = z-z'$)

$$I_2 = \int\frac{(z-z')\,dz'}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} = -\int\frac{Z\,dZ}{(\rho^2+Z^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}$$

luego: (con $\rho = r$)

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{u}_\rho}{r}\left(\frac{z+L/2}{\sqrt{r^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{r^2+(z-L/2)^2}}\right)+\right.$$

$$+\vec{k}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-L/2)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+L/2)^2}}\right)\Bigg\} \qquad (1)$$

que, para $z=0$ ($P$ sobre el plano $z=0$) da con $\lambda = Q/L$:

$$\vec{E}(\rho,0) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\frac{\vec{u}_\rho}{\sqrt{4\rho^2+L^2}} \quad \text{(radial)}$$

b) Para el potencial se opera igual, partiendo del potencial creado en $P(\rho,\varphi,z)$ por $dq'$:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda\, dz'}{\left(\rho^2+(z-z')^2\right)^{1/2}}$$

que sólo implica la integral

$$I_3^{*} = \int \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} = -\int \frac{dZ}{\sqrt{\rho^2+Z^2}} = -\ln\left[(z-z')+\sqrt{(z-z')^2+\rho^2}\right]$$

dando:

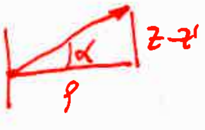
$$V = \int_{z'=-L/2}^{L/2} dV = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left[\frac{(z-L/2)+\sqrt{\rho^2+(z-L/2)^2}}{(z+L/2)+\sqrt{\rho^2+(z+L/2)^2}}\right] \qquad (2)$$

Que es el potencial en cualquier punto $P$ genérico del espacio (independiente del ángulo $\varphi$) y que será entonces válido para obtener $\vec{E}$ de:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{u}_\rho - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} \quad \text{(sin integrar } \vec{E}\text{)}.$$

es el campo en cualquier punto del espacio y como (1)

* Estas integrales pueden resolverse con el cambio de variables

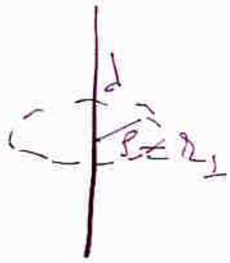



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z-z'}{\rho} \Rightarrow (1+\cos^2\alpha)\,d\alpha = -\frac{dz'}{\rho}, \text{ etc.}$$

El caso del campo generado por un hilo de carga rectilíneo y muy largo ("infinito") puede obtenerse por el procedimiento anterior haciendo las integrales en $z'$ ir de $-\infty$ a $+\infty$, o bien, de las expresiones de los casos anteriores evaluar los límites

$$\lim_{L\to\infty} \vec{E}$$

dando




$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\vec{u}_\rho = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_\perp}{r_\perp^2}$$

con $\vec{r}_\perp = \rho\,\vec{u}_\rho$.

lo que daría un potencial $V$ dado por

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\rho}\vec{u}_\rho \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho} = -\frac{dV}{d\rho} \Rightarrow$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow V = V_0 - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

(no sale de $\lim_{L\to\infty}$ del potencial $V(\rho,z)$ de (2))

donde $\rho_0$ es una distancia dada al hilo en la que el potencial es conocido $V_0 = V(\rho_0)$.

Observar que $V \to \infty$ si $\rho \to \infty$, pues hay carga en el infinito.

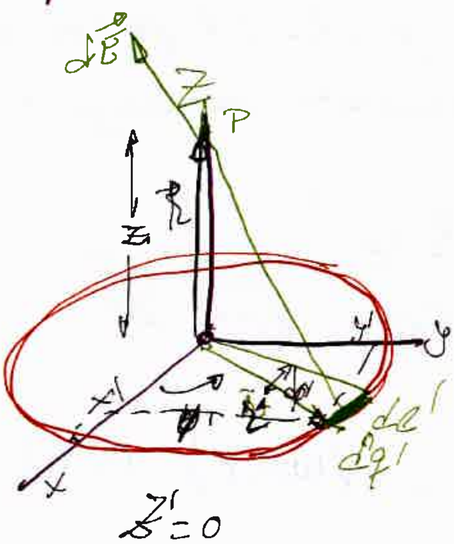
Además tanto $\vec{E}$ como $V$ sólo valen para $\rho > 0$ pues en $\rho = 0$ hay una singularidad (infinito en la densidad de carga $\rho_0 = \left.\frac{\Delta Q}{\Delta V}\right|_{\Delta Vol \to 0} \to \infty$, en un hilo)

3.3/ Piden el campo y el potencial electrostáticos creados por un anillo de carga uni  $\lambda$ (C/m), en cualquier punto del eje OZ. Obtener el campo en otro punto del espacio puede llevar a integrales que resultan no elementales, si bien el procedimiento (integración directa sobre coordenadas de fuentes) es el mismo.

Dado que la carga Q está uniformemente distribuida se tiene que la densidad lineal de carga es

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R} = \frac{dq'}{dl} \quad (C/m)$$

Tomemos un elemento de carga $dq' = \lambda \, dl'$ sobre el anillo que creara en el punto $P(0,0,z)$ el campo elemental $d\vec{E}$:




$z' = 0$

Las coordenadas de P, punto donde se evalúa el campo son (posición de campo)

$$\vec{r} = z\,\vec{k}$$

La fuente $dq' = \lambda \, dl'$ tiene de coordenadas

$$\vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} = R(\cos\phi' \vec{i} + \sin\phi' \vec{j})$$

Siendo la longitud $dl'$ la del arco elemental $dl' = R\,d\phi'$.

Dado que $d\vec{E}$ es:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Con $|\bar{r}-\bar{r}'| = |z\vec{k} - R(\cos\phi'\,\vec{i}+\operatorname{sen}\phi'\,\vec{j})| = \sqrt{R^2+z^2}$

Se tiene :

$$d\vec{E} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda R\,d\phi'}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left[R\cos\phi'\,\vec{i}+R\operatorname{sen}\phi'\,\vec{j}-z\vec{k}\right]$$

Por sustitución directa. Sólo resta ya integrar sobre la variable angular $\phi'$ entre $\theta_1=0$ y $\theta_2=2\pi$, lo que anula las integrales en $\operatorname{sen}\phi'$ y $\cos\phi'$, quedando sólo:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda R\int_0^{2\pi}\frac{z\,d\phi'\,\vec{k}}{(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z\vec{k}}{(R^2+z^2)^{3/2}} =$$

$$= \vec{k}\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \vec{E}(0,0,z) \quad \text{(sólo sobre OZ)} \quad (1)$$

Para el potencial se opera igual. El potencial elemental $dV$ creado en $P$ por el elemento de carga $dq'$ es :

$$dV = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} = \frac{\lambda R\,d\phi'}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

que integrado da

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} = V(0,0,z) \quad \text{(sólo)}$$

Puede comprobarse que, en este caso, el potencial (no válido en todo punto del espacio) $V(z)$ anterior puede, dada la simetría del problema, valer para calcular $\vec{E}$ (1) como :

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$ (Sobre OZ, no en todo $\vec{r}$, ojo)

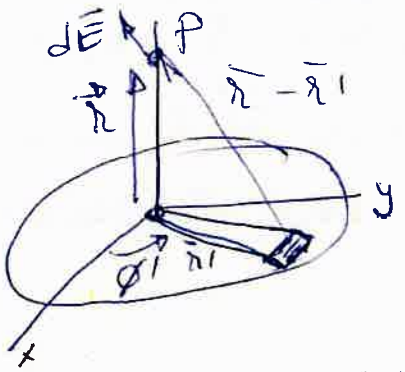
Pero, en general, sería necesario tener $V(\vec{r})$, en todo punto $\vec{r}$, para poder obtener $\vec{E}$ como el gradiente del potencial $V$.

Sugerencia: Calcular el campo que crea el anillo de carga en cualquier punto P de coordenadas $(x, y, 0)$ con $|x|<R$ y $|y|<R$ (puntos del círculo que limita el anillo en su plano).

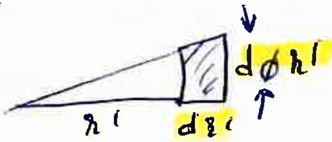
Nota: Dejar indicada la integral resultante (no intentar resolverla!!).

3.4 **Disco** de carga $\sigma$ uniforme (1)

$$\sigma = \frac{dq'}{ds'} = \frac{Q}{\pi R^2}$$




Tomando el elemento de superficie de $ds'$ en $\bar{r}'$:




$$ds' = r' d\phi' dr'$$

con las coordenadas de campo y de fuente:

$$r' = \sqrt{x'^2+y'^2} \rightarrow \begin{cases} \bar{r} = z\vec{k} \\ \bar{r}' = r'\cos\phi'\vec{i} + r'\operatorname{sen}\phi'\vec{j} = \vec{r}'_\perp \end{cases}$$

$dq' = \sigma ds'$ es el campo elemental creado por

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds'}{\left(\sqrt{r'^2+z^2}\right)^3}\left(z\vec{k} - r'\cos\phi'\vec{i} - r'\operatorname{sen}\phi'\vec{j}\right)$$

operando primero las integrales angulares

$$d^2\vec{E} \rightarrow \begin{cases} \int_0^{2\pi} d\phi' \cos\phi' = 0 \\ \int_0^{2\pi} d\phi' \operatorname{sen}\phi' = 0 \end{cases}$$

queda sólo la componente en $z\vec{k}$ (se veía por simetría)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R dr' r' \frac{z}{(r'^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\phi' \ \vec{k}$$

con la integral elemental:

$$\int \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int\frac{2\rho\, d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1(-1)}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

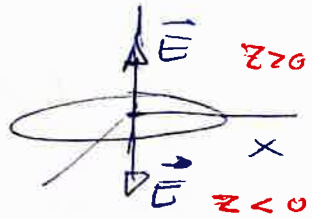
queda

$$\vec{E} = \frac{\vec{k}\,\sigma 2\pi}{2\pi\varepsilon_0} z\left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+r'^2}}\right]_0^R = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z\vec{k}\left[\frac{1}{\sqrt{R+z^2}} - \frac{1}{|z|}\right]$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\operatorname{sig}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{k} = \frac{Q}{2\pi R^2\varepsilon_0}\left\{\operatorname{sig}(z) - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right\}$$

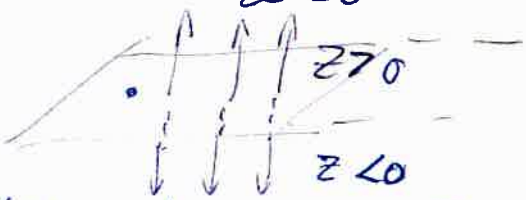
3.4.2 Observar que si $z \to 0$ (e)
el campo se comporta con sentido opuesto en el origen según cara superior o inferior

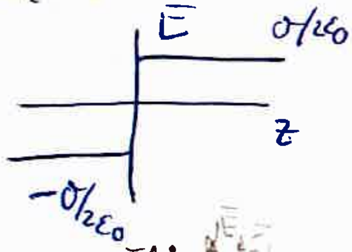
Lim $\lim_{z \to 0^+} \vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k}$



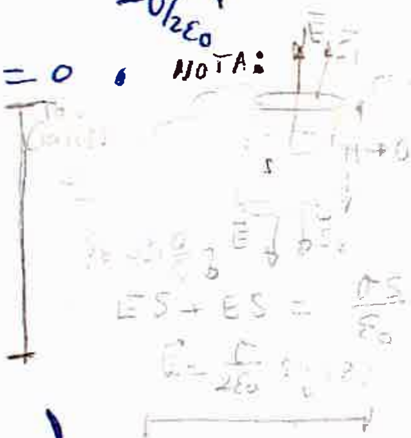

lo mismo ocurre para una lámina infinita $R \to \infty$

$$\lim_{R \to \infty} \vec{E}(z|R) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \, \text{signo}(z) \, \vec{k}$$




El campo es discontinuo en $z=0$. NOTA:



2/ El potencial es

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{\sigma r' dr' d\phi'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}$$

(sobre $\overline{OZ}$)

$$V(0,0,z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$$

En este caso $\vec{E}(z) = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = \vec{E}_z$ sí vale (en $\overline{OZ}$)
el potencial creado por una lámina infinita es tal que:

$$\lim_{R \to \infty} V = \infty \qquad \text{¿por qué?}$$

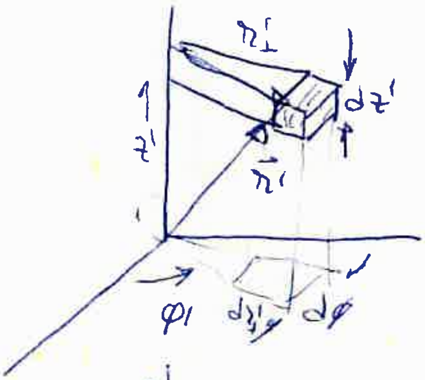
(nota la carga total es $Q = \int \sigma dS' \to \infty$)

3/ El trabajo realizado por campo es $W = -q(V_B - V_A)$
y el que hay que realizar (venciendo fuerzas del campo)

$$W_a = q(V_B - V_A) = q\left(V(z=b) - V(z=+b)\right) = 0$$

Hecho de forma genérica, por si $\rho_q = \rho_q(r, z, \varphi)$

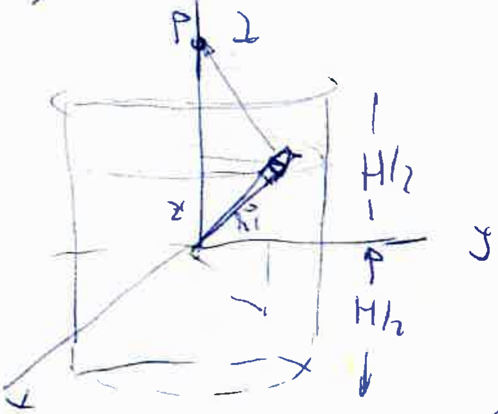
**3.5** El problema puede resolverse en general para densidad $\rho = \rho(r_\perp, z, \phi)$ con el elemento de volumen ($r'_\perp = \rho'_1$ cilíndricas) ①




$$dv' = (r'_\perp\, d\phi')(dr'_\perp)(dz')$$

siendo $r'_\perp = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ la variable radial.

Las variables de fuente y de campo son, en punto P:




$$\left\{\begin{aligned} \vec{r}' &= r'_\perp(\cos\phi'\,\vec{i} + \operatorname{sen}\phi'\,\vec{j}) + z'\,\vec{k} \\ \vec{r} &= z\,\vec{k} \end{aligned}\right.$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r'^2_\perp + (z - z')^2$$

El campo creado por el elemento de carga es: $(dq' = \rho(\vec{r}')\, dv')$

$\downarrow d\vec{E}$

$$d\vec{E} = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\rho(\vec{r}')\, r'_\perp\, dr'_\perp\, dz'\, d\phi'}{(r'^2_\perp + (z - z')^2)^{3/2}} \bullet$$

$\bullet\ (r'_\perp \cos\phi',\ r'_\perp \operatorname{sen}\phi',\ z - z')$ con $\rho = \rho_0$

Las integrales en $\phi'$ dan cero (simetría)

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi'\, d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos\phi'\, d\phi' = 0$$

y sólo queda la contribución en $\vec{k}$

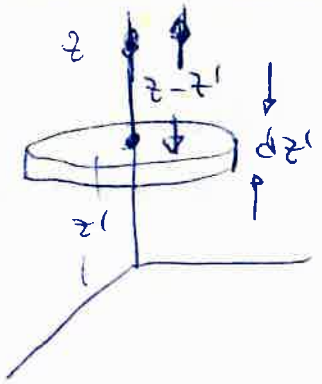
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\rho_0 \int_{z'=-H/2}^{H/2} dz'(z - z') \int_{r'_\perp = 0}^{R} \frac{r'_\perp\, dr'_\perp}{(r'^2_\perp + (z - z')^2)^{3/2}}\, \vec{k}$$

Las dos integrales son inmediatas. No obstante la integral en la variable radial da, (3.5) ②

(1) $$\vec{E} = \int_{z'=-H/2}^{H/2} \frac{\rho\, dz'}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{(z-z')}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}}\right)\vec{k}$$ en $\left(z > \frac{H}{2}\right)$ (1')

de sig(z-z')

Se ve claramente que ~~por~~ la superposición de discos de carga situados en $z'$ se obtendría este campo. El campo creado por un disco de carga (prob. 3.4) sería



$$d\vec{E}' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{(z-z')}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}}\right)\vec{k}$$

a la distancia $z_1 = z - z' > 0$ del centro del disco. La carga en superficie $\sigma$ (equivalente) se obtendría de

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{\rho_0\, \pi R^2\, dz'}{\pi R^2} = \rho_0\, dz' \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

en coherencia con (1).

Integrando en $z'$ (integral inmediata tipo $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$) con la carga total:

$$Q = \int \rho\, dv = \int_0^R r_1' dr_1' \int_{z'=-H/2}^{H/2} dz' \int_0^{2\pi} d\phi' \rho(r_1', z', \phi')$$

$$= \rho_0\, \pi R^2 H$$

da

$$\vec{E} = \vec{k}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left[1 + \sqrt{\frac{R^2}{H^2} + \left(\frac{z}{H} - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\frac{R^2}{H^2} + \left(\frac{z}{H} + \frac{1}{2}\right)^2}\right]$$

en $z \geq H/2$.

**Nota** para cualquier $z$ habría que integrar (1')

(1') $$\vec{E} = \vec{k}\int_{-H/2}^{H/2} \frac{\rho_0\, dz'}{2\varepsilon_0}\left[\operatorname{sig}(z-z') - \frac{(z-z')}{\sqrt{R^2+(z-z')^2}}\right]$$ ; $\operatorname{sig}(z) = \frac{z}{|z|}$ (signo de)

Nota: Observad que con el problema 3.5 se ha pasado con las sucesivas integraciones por los campos de un sector(disco) de carga (tras integrar en $\theta'$ y en $r'_\perp$) y el campo de un anillo de carga de radio $r'_\perp$ tras integrar en el ángulo $\theta'$. De hecho, el campo del anillo de carga $\lambda$ podría ser base para calcular el campo del disco, que tendría carga de densidad superficial $\sigma$ y densidad lineal del anillo:

$$\lambda = \frac{dq'}{2\pi r'_\perp} = \frac{\sigma \cancel{2\pi r'_\perp}\, dr'_\perp}{\cancel{2\pi r'_\perp}} = \sigma\, dr'_\perp$$

e integrar después el campo del anillo con $R \to r'_\perp$ entre 0 y R.

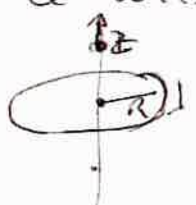
También, el campo del disco podría ser base para el campo del cilindro, situando un disco a la distancia $(z-z')$ del punto P del eje. La z del campo del disco pasaría a $z-z'$ y su densidad superficial a

$$\sigma = \frac{dq'}{S} = \frac{\rho \pi r'^2_\perp dz'}{\pi r'^2_\perp} = \rho\, dz' \quad \text{con } r'_\perp = R.$$

Importantes aquí:

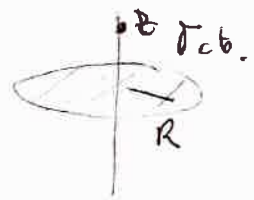
Campo de anillo de carga $\lambda$ en punto z cualquier

$\lambda$ cte.




$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,\vec{k}}{\left(\sqrt{z^2+R^2}\right)^3} = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\frac{z\,\vec{k}}{\left(\sqrt{z^2+R^2}\right)^3} \quad (\forall z)$$

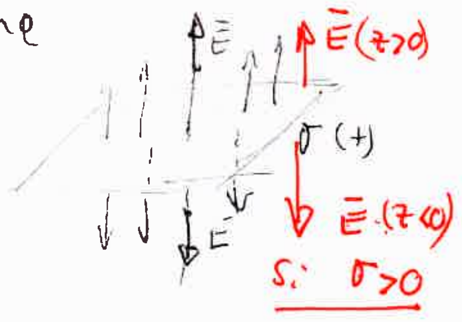
Campo sobre OZ creado por disco de carga $\sigma$ C/m²




$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{|z|}{z} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\text{sig}\,z - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\vec{k}$$

$(z \neq 0)$

y si $R \to \infty$ (plano infinito de carga $\sigma$ uniforme




$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\text{sig}(z)\,\vec{k} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{|z|}{z}\,\vec{k} \quad (z \neq 0)$$

Los potenciales $V(z)$ de cada caso sobre cada punto P del eje OZ habría que calcularlos por integración directa, sin embargo para el plano infinito el campo $\vec{E}$ anterior vale para todo punto del espacio $P(x,y,z)$ y depende sólo de $z$, por ello:

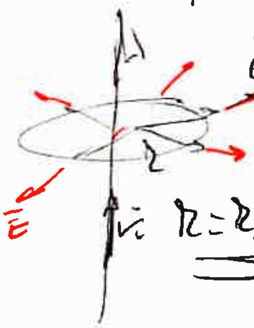
$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sig}(z)\,\vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} + 0$$

da

$$V - 0 = -\int_0^z \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{sig}(z)\,dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z| = V(z)$$

donde se ha tomado la referencia de potencial nulo en $z=0$ (no puede tomarse $V=0$ en el infinito, hay carga en el infinito!!)

Como para el hilo de carga $\lambda$ infinito




$\vec{u}_r$: $r = r_\perp = \rho$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r \Rightarrow$$

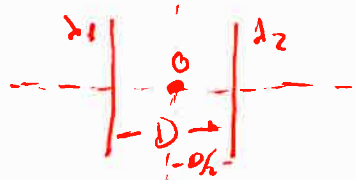
$$\int_{V=0}^{V} dV = -\int_{r=r_0}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r} \Rightarrow$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}$$

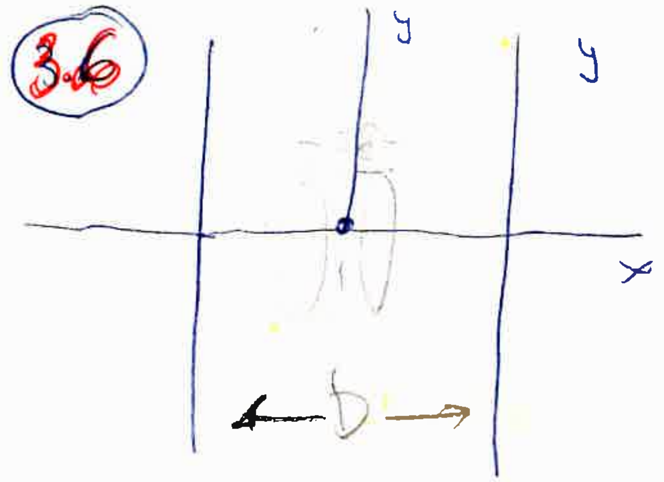
donde $r_0$ es la distancia a la que $V(r_0)=0$

Nota: se ha escrito $r$ como la distancia al hilo, variable $\rho$ de coordenadas cilíndricas $\rho = r = r_\perp$.

Sugerencia: Dos hilos de cargas $\lambda_1$ y $\lambda_2$ separados D met. en el vacío ¿dónde $\vec{E} = 0$?



3.6




Carga en densidad

$$\rho = 2\rho_0 \frac{|x|}{D}$$ (1)

en $-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}$

Obviamente la carga total es infinita, se trata de una aproximación al campo creado en una distancia $|x|$ entre 0 y $D/2$ considerando que en eje $\overline{OY}$ la carga se distribuye como homogénea en y hasta $|y|$ grande.

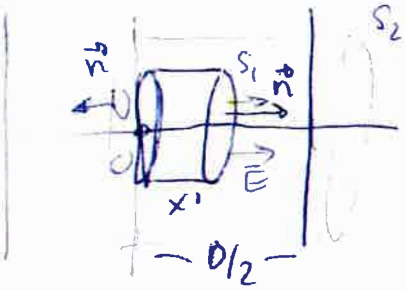
Puede resolverse aplicando Th. Gauss tomando superficies gaussianas tipo "caja píldoras".

1º → Por simetría de distribución de carga el campo en $x=0$ es nulo


$$E(x=0) = 0 \ , \forall y$$

$$\vec{E} = E\,\vec{i} \quad (\text{simetría})$$

A la dcha. de $x = 0$ : $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$




En $S_1$ : (sólo en bases hay flujo)

$$E S_1 + 0 + E(0)(-S_1) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_{S_1} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x<D/2} \rho\, dv$$

con $dv = S\,dx'$ si $0<x<\frac{D}{2}$

$$\cancel{E \cdot S_0}^{\,0} + E\,S_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{x<D/2} S_1\, 2\rho_0 \frac{x'}{D}\, dx' \Rightarrow$$

si $x \geq D/2$ (superficie $S_2$)

$$E S_2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{D} S_2\, 2\rho_0 \frac{x'}{D}\, dx'$$

Por lo que en $x \geq 0$ el campo es (3.6.2)

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 x^2}{D \varepsilon_0} \vec{i} &, \ 0 \leq x \leq D/2 \\ \dfrac{\rho_0 D}{4 \varepsilon_0} \vec{i} &, \ x \geq D/2 \end{cases}$$

y el potencial en $x \geq 0$

$$E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow$$

$$\int_0^V dV = -\int_{x=0}^{x<D/2} E\, dx \Rightarrow V = -\frac{\rho_0 x^3}{3 \varepsilon_0 D} \quad (0 \leq x \leq D/2)$$

$$V = -\int_0^{D/2} \frac{\rho_0 x'^2}{D \varepsilon_0} dx' - \int_{D/2}^{x>D/2} \frac{\rho_0 D}{4 \varepsilon_0} dx' =$$

$$= \frac{\rho_0 D}{4 \varepsilon_0} \left( \frac{D}{3} - x \right) \quad \text{si } x \geq D/2$$

En la región $x < 0$ se opera igual y, por simetría del problema, equivale a cambiar $X$ por $(-x)$ e $\vec{i}$ por $-\vec{i}$ en los resultados anteriores.

También puede resolverse resolviendo la ecuación de Poisson $\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = -\frac{dE}{dX}$$

en $x \geq 0$

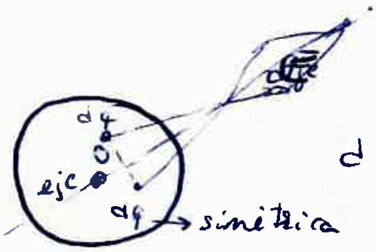
$$\int dE = \int \frac{\rho}{\varepsilon_0} dx \Rightarrow \begin{cases} E - \cancelto{0}{E(0)} = \displaystyle\int_{x=0}^{x<D/2} \frac{\rho(x')}{\varepsilon_0} dx' \\ E - \cancelto{0}{E(0)} = \displaystyle\int_0^{D/2} \frac{\rho(x')}{\varepsilon_0} dx' + \int_{D/2}^{x>D/2} \frac{\cancel{\rho(x')}}{\varepsilon_0} dx' \end{cases}$$

no hay carga

y de $E = -\dfrac{dV}{dx} \Rightarrow -\int dV = \int E\, dx$ como antes.

Observar que, además del dato $V(x=0) = 0$ hace falta otro para resolver el problema, en este caso $E(0) = 0$ por la simetría en distribución de carga, sin tal simetría ... faltaría información.

Prob 37. La ley de Gauss es útil aquí para (1) determinar el campo $\vec{E}$, dada la simetría esférica si la densidad $\rho$ depende sólo de $|\vec{r}| = r$, al ser entonces el campo radial




$d\vec{E} = d\vec{E}(r)$

Por lo que:

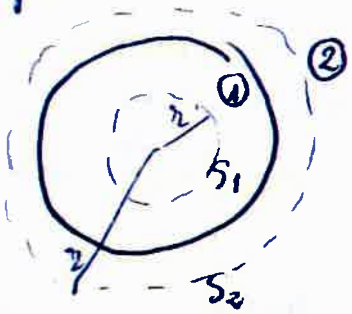
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(S)}{\varepsilon_0}$$

da información de E si la superficie S se elige convenientemente (tal que E sea uniforme sobre ella).

a) Carga superficial de densidad superficial

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Eligiendo superficies esféricas de centro O, dentro y fuera de la esfera:




$$\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = 0$$

$$E_1 4\pi r^2 = 0,$$

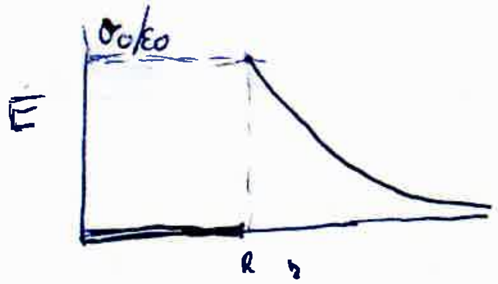
$$\left( d\vec{S} = dS\,\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad \left( \vec{E} = E\,\frac{\vec{r}}{r} \right)$$

$$\vec{E}_1 = 0 \quad \text{si} \quad 0 < r \leq R$$

$$\oint \vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E_2 4\pi r^2$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \quad \text{si } r > R$$

con $\vec{E}_2(r\to R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{(\vec{R}/R)}{R^2} = \dfrac{Q}{S}\dfrac{\vec{n}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$




Para el potencial:

$$E = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow$$

$$\int_0^V dV = -\int_{r\to\infty}^{r} E\,dr$$

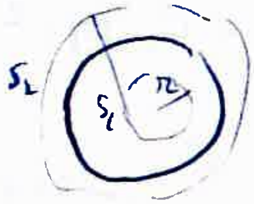
se tiene: (integrado desde $r\to\infty$, $V=0$, hacia el interior:

②

$$V_2 - 0 = -\int_\infty^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr \Rightarrow V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, \quad R<r<\infty$$

$$V_1 - V(R) = -\int 0\,dr \Rightarrow V_1 = V_2(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{en } 0\le r\le R$$

b) Para la esfera de carga homogénea $\rho=\rho_0$ se opera igual



$$\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{s}_1 = \frac{Q_{int(S_1)}}{\varepsilon_0}$$

$$E_1\, 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \rho(r')\,4\pi r'^2 dr'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3}{\varepsilon_0}$$

luego

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{R^3}, \quad 0<r<R$$

y

$$\oint \vec{E}_2\cdot d\vec{s}_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad r\ge R$$

y el potencial:

$$\int_0^{V_2} dV = -\int_\infty^{r\ge R} E_2\,dr \Rightarrow V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}, \quad r\ge R$$

$$\int_{V_2(R)}^{V_1} dV = -\int_R^r E_1\,dr \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(r^2 - R^2)$$

$$V_1 = \frac{3}{8}\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^3}, \quad 0\le r\le R$$

dando $$V(r=0) = \frac{3}{8}\frac{Q}{\pi\varepsilon_0 R}$$

c/ Distribución no homogénea con (isótropa) ③

$$\rho = kr = \frac{dq}{dV}$$

da

$$Q = \int \rho \, dV = \int_0^R k r' \, 4\pi r'^2 dr' = k \, 4\pi \frac{R^4}{4} = k\pi R^4$$

determinando $k = Q/\pi R^4$.

Como antes:

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \rho(r') \, 4\pi r'^2 dr' = E_1 \, 4\pi r^2$$

lleva a

$$\vec{E}_1 = \frac{k r^2}{4\varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^4}\frac{\vec{r}}{r}, \quad 0<r<R$$

y $\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{k}{4\varepsilon_0}\frac{R^4}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Para el potencial (de nuevo $V(\infty) = 0$):

$$\int_0^{V_2} dV = -\int_\infty^r E_2 \, dr' \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{kR^4}{4\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{si } r \geq R$$

$$\int_{V_2(R)}^{V_1} dV = -\int_R^r E_1(r') dr' \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{k}{12\varepsilon_0}\left(4R^3 - r^3\right) \quad \text{en } \{0 \leq r \leq R\}.$$

Nota: Energía electrostática

$U_e$ de esfera de carga $\rho = \rho_0$ uniforme **3.7 b)**

$$E = \begin{cases} E_1 = \dfrac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} & \text{si } 0 < r < R \\ E_2 = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2} & \text{si } r > 0 \end{cases} \quad \text{y } V = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & \text{si } r \geq R \\ \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{2}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) & \text{si } 0 < r < R \end{cases}$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{Vol} dq\, V(r) = \frac{1}{2}\int \rho_0 (4\pi r^2 dr)\, V_{int}(r) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4\pi\rho_0^2}{6\varepsilon_0}\int_0^R r^2\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)dr = \frac{\rho_0^2 R^5}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{15} = \frac{\cancel{4}\, Q^2}{60\pi\varepsilon_0 R} = \ldots$$

o bien

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{Vol(\infty)} E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{\int_0^R 4\pi r^2 dr\, E_1^2 + \int_R^\infty 4\pi r^2 dr\, E_2^2\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\rho_0^2 4\pi}{9\varepsilon_0^2}\left\{\int_0^R r^2 r^2 dr + R^6\int_R^\infty r^2\frac{dr}{r^4}\right\} =$$

$$= \frac{\rho_0 4\pi}{18\varepsilon_0}R^5\left(\frac{1}{5} + 1\right) = \frac{4\pi}{15}\frac{\rho_0^2 R^5}{\varepsilon_0} = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{5}Q\,V(R)$$

La energía electrostática si $Q$ está sólo en la superficie se evalúa igual (caso 3.7 a)) pero como $E_1 = 0$ (interior):

$$U_e = \frac{1}{2}\int_R V(R)\,dq = \frac{1}{2}Q\,V(R) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

o bien:

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{r=0}^\infty \dot{E}^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty E_2^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

que es menor que si Q está repartida en el volumen

Para el caso de $\rho = K r = \dfrac{Q r}{\pi R^4}$

la energía electrostática almacenada será,

$$U_e(C) = \frac{1}{2}\int_{vol} \rho\, dv\, V_1(r) = \frac{1}{2}\int_{r=0}^{R} K r\, V_1(r)\, 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{K}{2}\int_0^R r^3 \left(4R^3 - r^3\right) dr \, \frac{4\pi K}{12\varepsilon_0} =$$

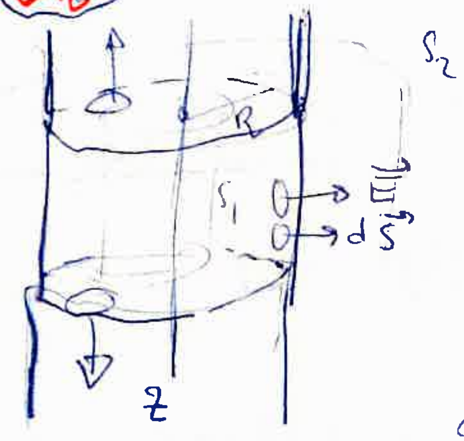
$$= \frac{4\pi K^2}{24\varepsilon_0}\left\{ 4\frac{R^7}{4} - \frac{R^7}{7} \right\} = \frac{\pi K^2}{\cancel{6}\varepsilon_0}\,\frac{\cancel{6}R^7}{7} = \frac{Q^2}{7\pi\varepsilon_0 R}$$

o bien

$$U_e(C) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left\{ \int_0^R E_1^2(r)\, 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E_2^2(r)\, 4\pi r^2 dr \right\}$$

(ver si da lo mismo)

**3.8** Cilindro de carga de $H \to \infty$ ①




Por Th. Gauss sobre cilindros concéntricos de áreas $S_1$ y $S_2$ dentro y fuera de la distribución.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{int} \rho \, dv$$

El campo es radial (simetría) por lo que:

$dV_{vol} = 2\pi r dr dz \rightarrow$ $$E_\perp S_{lateral} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

En cada región $\vec{E} = E(r_\perp = r)\, \vec{u}_\perp$

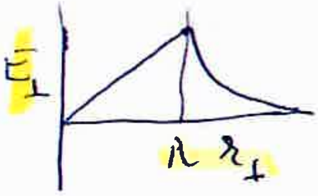
$$E_1 \, 2\pi r H = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{r=0}^{r<R} H \, 2\pi r dr \, \rho(r)$$

$$E_1 \, 2\pi r H = \frac{1}{\varepsilon_0} H \pi r^2 \rho_0$$

$$E_2 \, 2\pi r H = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^R H \, 2\pi r dr \, \rho_0$$

da:

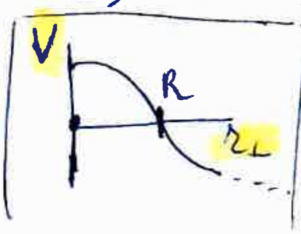
$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r & , \; 0 < r < R \\[2ex] \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \dfrac{R^2}{r} & , \; r \geq R \end{cases}$$




y para el potencial, con $V(R) = 0$,

$$\int dV = -\int E \, dr$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{V_1} dV_1 = -\int_R^{r<R} E_1 \, dr \\[2ex] \displaystyle\int_0^{V_2} dV_2 = -\int_R^{r \geq R} E_2 \, dr \end{cases} \Rightarrow V = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) & , \; 0<r<R \\[2ex] -\dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln \dfrac{r}{R} & r \geq R \; * \end{cases}$$




Observar $\longrightarrow$ (*como hilo de carga infinito con $\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta z} = \frac{\rho_0 \pi R^2 \Delta z}{\Delta z}$)

(3.8) 

Nota: La energía electrostática de esta distribución es infinita (hay carga en el infinito) no obstante, puede calcularse la energía por unidad de longitud

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{z_0}^{z_0+H} \rho_0 \, dz \int_{r=0}^{R} 2\pi r \, dr \; V_1(r) \Rightarrow$$

$$\frac{U_e}{H} = \overline{U}_e\left(\frac{J}{m}\right) = -\rho_0 2\pi \int_{r=0}^{R} \frac{r\,dr}{2} \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{R^2}-1\right)$$

$$= -\frac{\rho_0^2 \pi}{2\varepsilon_0} R^2 \left(\frac{R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = \pi\frac{\rho_0^2 R^4}{8\varepsilon_0}$$

Si el cilindro es infinito pero su densidad de carga (diapositiva 22) es

$$\rho(z) = \rho_0 \frac{R^2}{z^2+R^2} \quad (\text{si } 0 \le r \le R, \forall z)$$

hay que proceder por integración directa lo que daría como en el problema 3.5

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \rho_0 \int_{z'=-\infty}^{\infty} \frac{R^2}{R^2+z'^2} dz' \int_{r_\perp'=0}^{R} \frac{r_\perp' \, dr_\perp'}{\left(r_\perp'^2 + (z-z')^2\right)^{3/2}} \vec{k}$$

en $\vec{r} = z\vec{k}$.

La carga total es $\infty$

$$Q = \int_V \rho \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\phi' \int_{z'=-\infty}^{\infty} dz' \int_0^R \rho_0 \frac{R^2}{z'^2+R^2} r_\perp' \, dr_\perp'$$

$$= \rho_0 \pi R^2 R^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{z'^2+R^2} = \rho_0 \pi^2 R^3 < \infty$$

Obtener $\vec{E}$ en cualquier punto $(\vec{r}_\perp, z)$ no es simple, por supuesto, como $E_z \neq 0$ en $(OZ)$ el Teorema de Gauss no es muy útil (se pierde la simetría del caso anterior).

- **Problema 3.8 bis**

Determinar en todas las regiones del espacio el campo $\boldsymbol{E}$ y potencial $V$ electrostáticos creados por una distribución de carga sobre un cilindro de radio $R$, con su eje sobre OZ y lo suficientemente largo como para considerarlo infinito (efectos de borde despreciables). Tómese como nulo el potencial para $r = 3R$, siendo aquí $r$ la variable radial $\rho$ de las coordenadas cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$. La carga se distribuye con densidad lineal de carga neta $\lambda$ a lo largo del cilindro, en los tres casos siguientes:

a) Uniformemente sólo sobre la *superficie* lateral del cilindro (en su interior hay vacío). Verificar que la densidad superficial de carga es $\sigma_o = \lambda/(2\pi R)$.
b) De modo uniforme por todo el *volumen* del cilindro. Verificar que la densidad volumétrica de carga es $\rho_o = \lambda/(\pi R^2)$.
c) Con densidad volumétrica radialmente variable $\rho_1 = k\,\rho = k\,r$, donde $k$ es una constante a determinar en función de $\lambda$ y $R$.

**Solución :**

a) Cilindro de carga con densidad superficial $\sigma_o$ :

$$r < R, \quad \boldsymbol{E} = 0 \qquad V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3 = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o} R \ln 3$$

$$r > R, \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\mathbf{e}_r = \frac{\sigma_o}{\varepsilon_o}\frac{R}{r}\mathbf{e}_r \qquad V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{3R}{r}\right)$$

b) Cilindro de carga con densidad volumétrica uniforme$\rho_o$

$$r < R, \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^2}\mathbf{e}_r = \frac{\rho_o}{2\varepsilon_o}\mathbf{r} \qquad V = \frac{\lambda}{4\pi\,\varepsilon_o}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

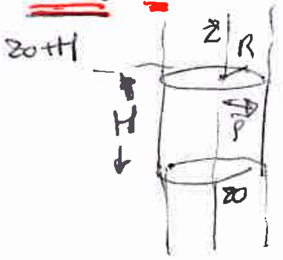
$$r > R, \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\mathbf{e}_r = \frac{\rho_o R^2}{2\varepsilon_o}\frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad ; \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{3R}{r}\right)$$

c) Cilindro de carga con densidad variable con carga neta por cada unidad de longitud $\lambda = 2\pi\, k\, R^3/3$.

$$r < R, \quad \mathbf{E} = \frac{kr^2}{3\varepsilon_o}\mathbf{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{r}{R^3}\mathbf{r} \quad ; \quad V = \frac{\lambda}{6\pi\,\varepsilon_o}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln 3$$

$$r > R, \quad \mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o r}\mathbf{e}_r \quad ; \quad V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{3R}{r}\right)$$

3.18 bis Cilindro de carga $\lambda$ C/m, largo. (1)



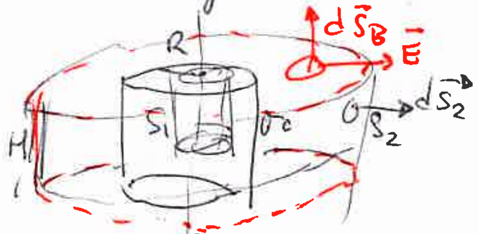

$\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} \pm \vec{r} = \vec{r}_\perp$ (notación)

Por simetría

$$\vec{E} = \vec{E}(\rho) = E(\rho)\,\frac{\vec{\rho}}{\rho} = E\,\vec{u}_\rho = E\,\vec{e}_\rho$$

$V(3R) = 0$ (potencial de referencia)

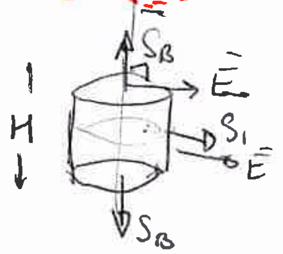
a) Carga en lámina (superficie lateral del cilindro) con densidad superficial $\sigma_0$ tal que: uniforme




$$\sigma_0 = \frac{\Delta q}{\Delta S_{lat.}} = \frac{dq}{dS_R} = \frac{\lambda H}{2\pi R H} = \frac{\lambda}{2\pi R} \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

Por ley de Gauss sobre superf. cilíndricas $S_1$ y $S_2$

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

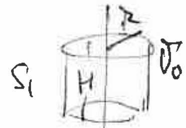



con
$$\begin{cases} \vec{E} = E\,\vec{e}_r \\ d\vec{S} = dS\,\vec{e}_r & \text{(lateral)} \\ d\vec{S}_B = dS_B\,\vec{k} & \text{(en las bases)} \end{cases}$$

$$\phi = E S_L + \cancel{\vec{E}\cdot \vec{S}_{B_1}}^{\,0} + \cancel{\vec{E}\cdot \vec{S}_{B_2}}^{\,0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$0 + 0$

en la región (1), con $0 \leq \rho = r < R$




$$E_1\, 2\pi r H = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = 0$$

en la región (2) con $\rho = r > R$

$$E_2\, 2\pi r H = \frac{Q_{int(2)}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{e}_r$$

Para el potencial

Por simetría cilíndrica
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{d\rho}\frac{\vec{\rho}}{\rho} = E\,\frac{\vec{\rho}}{\rho}$$

luego

Con la referencia $E_\rho = -\dfrac{dV}{d\rho} \Rightarrow dV = -E\,d\rho$

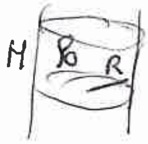
en (2)
$$\int_{V_2=0}^{V_2} dV = -\int_{\rho=3R}^{r} E_2\,d\rho \Rightarrow V_2 = -\int_{3R}^{r} \frac{\lambda\,d\rho}{2\pi\varepsilon_0 \rho} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{3R}{r}$$

en (1)
$$\int_{V_2(R)}^{V_1} dV = -\int_R^r E_1\,dr = 0 \Rightarrow V_1 = V_2(R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3$$

(continuidad de V)

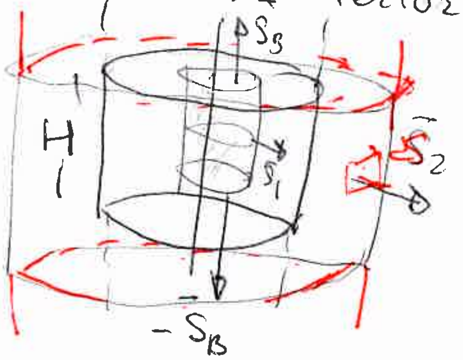
$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} R \ln 3$$

b) Carga uniforme en volumen, con densidad




$$\rho_0 = \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} = \frac{\lambda H}{\pi R^2 H} = \frac{\lambda}{\pi R^2} \quad (C/m^3)$$

Eligiendo superficies gaussianas cilíndricas $S_1$ y $S_2$ interior y exterior a la distribución, con $\vec{E} = E\,\vec{\rho}/\rho$:




$0 < r < R \Rightarrow \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}(S_1)}{\varepsilon_0}$

$$0 + 0 + E_1 2\pi r H = \frac{\int \rho_0 \, dV}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 V_{ol}^{(1)}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi r^2 H}{\varepsilon_0}$$

dando

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \frac{r}{R} \vec{e}_r$$

y

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \frac{Q_{in}}{\varepsilon} \Rightarrow$$

$$E_2 2\pi r H = \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r \quad \text{(como antes hilo)}$$

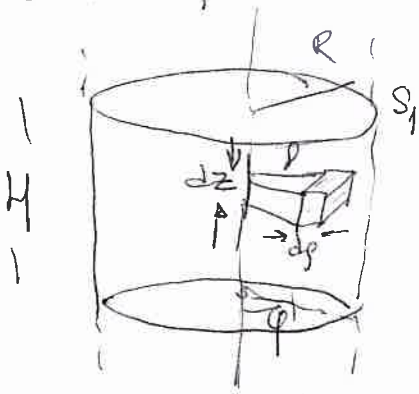
Para $V(r)$:

$$\int_0^{V_2} dV = -\int_{\rho=3R}^{\rho=r \geq R} E_2 \, d\rho \Rightarrow V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{3R}{r}\right)$$

y

$$\int_{V_2(R)}^{V_1} dV = -\int_{\rho=R}^{r} E_1 \, d\rho \Rightarrow V_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln 3 - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln 3 + \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right.$$

c/ Con $\rho_1 = kr$ variable. Ahora $\rho_1$ depende de $r_\perp$ luego hay que contar en $S_1$ la integración en volumen con dependencia radial:



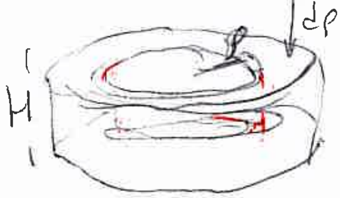

$$Q_{int} = \int_{V_1} \rho_1(\rho)\, dV_1' =$$

$$= \int_{Vol} \rho_1(\rho)\, d\varphi\, \rho\, d\rho\, dz$$

integrando en $\varphi$ ($0$ a $2\pi$) y en $z$ (de $z_0$ a $z_0 + H$)

$$Q_{int} = \int_{\rho=0}^{r} \rho_1(\rho)\, 2\pi\rho\, d\rho\, H$$

que equivale a integrar sobre un anillo circular de volumen elemental:




$$dV = 2\pi\rho\, d\rho\, H$$

válido al ser $\rho_1 = \rho_1(\rho)$ no dependiente de $\varphi$ ni de $z$.

Con las superficies $S_1$ en ① y $S_2$ en ② y siendo $\bar{E}$ radial, como antes: ③

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Para calcular $k$, consideramos:

$$\rho_1(\rho) = \frac{dq}{dV} \Rightarrow Q = \int_{vol.} dq = \int_{\rho=0}^{R} \rho_1(\rho) 2\pi H \rho \, d\rho = \lambda H$$

sobre una porción de altura $H$ y carga $\lambda H$, lo que da

$$\lambda = K 2\pi \frac{R^3}{3} \Rightarrow K = \frac{3\lambda}{2\pi} R^{-3} \quad (C/m^4)$$

en ① $\{0 \leq \rho < R\}$:

$$E_1 2\pi r H + 0 + 0 = \frac{\int_0^r k\rho \, 2\pi \rho H \, d\rho}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\varepsilon_0} \frac{r^3}{3} k$$

dando

$$\vec{E}_1 = \frac{K r^2}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \left(\frac{r^2}{R^2}\right) \frac{\vec{r}}{r}$$

En $\{r > R\}$

$$E_2 2\pi r H = \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$$ (como e a) y b)

y Análogamente, para el potencial

en ② $$\int_0^{V_2} dV = -\int_{\rho=3R}^{r} E_2 \, d\rho$$

$$V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{3R}{r}\right)$$

y en ①

$$\int_{V_2(R)}^{V_1} dV = -\int_{\rho=R}^{r<R} E_1 \, d\rho \Rightarrow -\int_R^r \frac{K\rho^2}{3\varepsilon_0} d\rho = -\int_R^r \frac{3\lambda \, \rho^2 d\rho}{2\pi\varepsilon_0 R^3 3}$$

$$V_1(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln 3 + \frac{\lambda}{6\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln 3 + \frac{1}{3} - \frac{r^3}{3R^3}\right\}$$

Prob. 3.9

Puede resolverse por superposición de distribuciones de carga. La distribución dada se vería como la superposición de una esfera de radio $R$ y carga $\rho_0$ con otra de radio $R' = R/2$ y densidad de carga $\rho' = -\rho_0$ (1)

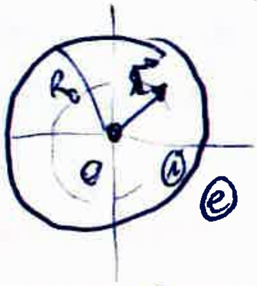

El campo en cada punto P del espacio sería la suma de los campos $\bar{E}_1$ y $\bar{E}_2$ creados en el punto por cada distribución por separado


$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{r}'$

luego

$\vec{r}_h = \vec{r}' = \vec{r} - \frac{R}{2}\vec{i}$

Hay que distinguir tres regiones, I, II y III y usar el resultado genérico del campo creado por una esfera de carga homogénea con centro en un punto O:




En $0 < r < R_0$

$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = Q_{int}/\varepsilon_0 \Rightarrow E_i 4\pi r^2 = \dfrac{\rho_0 \frac{4\pi}{3} r^3}{\varepsilon_0}$

Por simetría radial, en el interior:

$$\bar{E}_i = \frac{\rho_0 R_0^3}{3\varepsilon_0}\frac{r}{R_0^3}\vec{u}_r = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

y en el exterior de la esfera:

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_e 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_e = \frac{\rho_0 \frac{4\pi}{3} R_0^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Aplicando este resultado a las esferas de radios $R$ y $R/2$ con centros en $O$ y $O'$ que ~~dan~~ los campos:

$$\bar{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r}, & \text{si } 0 < r \leq R \\[2ex] \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}, & \text{si } r \geq R \end{cases} \qquad \bar{E}_2 = \begin{cases} \dfrac{-\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r}', & \text{si } 0 \leq r' \leq R/2 \\[2ex] -\dfrac{\rho_0 (R/2)^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}'}{r'^3}, & \text{si } r' \geq R/2 \end{cases}$$

Con estos valores, el campo resultante es: ②

- En el interior del hueco

$$\vec{E}_I = \vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r}_h = \frac{\rho_0 R}{6\varepsilon_0}\vec{i} \quad \text{(uniforme)}$$

- En la zona con carga $\rho_0$:

$$\vec{E}_{II} = \vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho_0 (R/2)^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - R/2\,\vec{i}}{(r^2 + R^2/4 - Rx)^{3/2}}$$

- En el exterior de la distribución:

$$\vec{E}_{III} = \vec{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\rho_0 (R/2)^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r} - R/2\,\vec{i}}{|\vec{r} - R/2\,\vec{i}|^3}$$

**Nota:** En todos los casos la energía electrostática de cada distribución (3.7) puede calcularse de la forma:

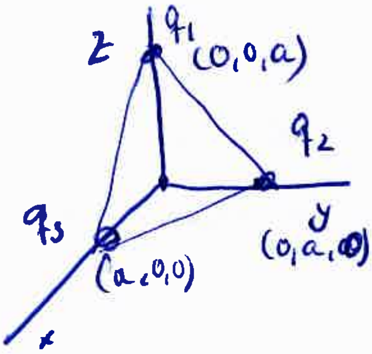
$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^\infty E^2(r)\underbrace{(4\pi r^2 dr)}_{dV} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_0^R E_1^2\, 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty E_2^2\, 4\pi r^2 dr\right)$$

que da integrales simples pues la densidad de carga $\rho_q(\vec{r}) = \rho_0$ es una función regular, constante donde hay carga y nula fuera (discontinua)

3.10 Distribución de cargas puntuales. ridea la energía electrostática almacenada por la distribución de cargas (por el campo que crea) pero no es válida aquí:

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{V_\infty} E^2\, dv$$

pues $\vec{E}$ diverge en los puntos $\vec{r}_i$ ocupados por las cargas puntuales (singularidades de $\rho_q$). Por tanto, puede aplicarse:




a) $$U_e = \sum_{\substack{\text{pares } i,j \\ i\neq j}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

con $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$ para cada par $i,j$. Se tiene:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1 q_2}{\sqrt{2}\,a} + \frac{q_1 q_3}{\sqrt{2}\,a} + \frac{q_2 q_3}{\sqrt{2}\,a}\right\} = \frac{11\, q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}}$$

que coincide con:

$$U_e = \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} \frac{1}{2}\left[q_i\, V_{q_i}(r_{ij})\right] =$$ ($V_{q_i}$: $V$ creado por todas menos $q_i$)

$$= \frac{1}{2}\left[q_1 V_{2,3}(\vec{r}_1) + q_2 V_{1,3}(\vec{r}_2) + q_3 V_{1,2}(\vec{r}_3)\right]$$

b) La energía potencial de $Q$ en $(0,0,0)$ será:

$$U_p = Q\,V(0) = Q\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{a} + \frac{q_3}{a}\right)\right\} =$$

$$= Q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6q}{a}\right) = Q\frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a} = E_p$$

($V(0)$ es el potencial en el origen, creado por $q_1, q_2$ y $q_3$).

c) $U_e'$ será la energía que ya había almacenada más la necesaria para traer $Q$ al origen en el potencial creado por las anteriores $q_1, q_2$ y $q_3$, o sea:

$$U_e' = U_e + U_p$$ que coincide con: $(q_4 = Q)$

$$U_e' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right\}$$ (verificarlo)

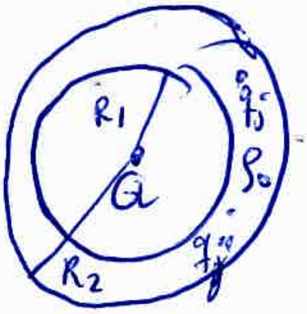
3.11/ Ahora hay que calcular la energía almacenada por la distribucción que tiene una carga puntual Q y carga distribuida regularmente en la cáscara esférica concéntrica. De nuevo, al haber una carga puntual, no vale

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{V\infty} \varepsilon_0 E^2 dv$$

Hay que aplicar la relación anterior:

$$U_e = \sum_{\text{Pares}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q_j}{|\bar r_i - \bar r_j|}$$

en la que podemos interpretar $q_i$ como $Q = q_1$ y cada $q_j$ como una carga elemental ($dq'$ en realidad) dentro de la cáscara:




$U_e$ será:

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{ Q\sum_{j} \frac{q_j}{|\vec r_j - \vec r_1|} + \sum^{\text{Pares}}_{\substack{j,j' \\ j\neq j'}} \frac{q_j q_{j'}}{|\bar r_j - \bar r_{j'}|}\right\}$$

$$= U_{e1} + U_e|_{\rho_0} \qquad (1)$$

donde:

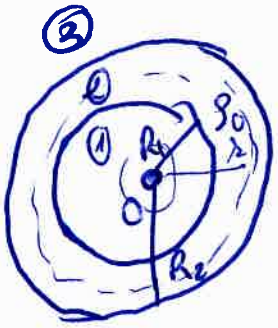
$$U_{e1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\sum_j \frac{q_j}{|\bar r_j - \bar r_1|} = Q\left(\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0|\bar r_j - 0|}\right) = Q\, V_{\rho_0}(r=0)$$

donde se ha interpretado la suma en $q_j$ como el potencial que crea la distribución de densidad $\rho_0$ en el punto donde está $q_1 = Q$, en el origen.
El segundo término, de nuevo, con $q_j = dq'$ etc. se interpreta como la energía almacenada por la distribución de carga regular con densidad $\rho_0$:

$$U_e|_{\rho_0} = \sum_{j,j'} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j q_{j'}}{r_{jj'}} \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{\text{Vol. con } \rho_0} dq\, V_{\rho_0}(\vec r) = \frac{1}{2}\int_{V\text{cáscara}} \rho_0\, dv\, V_{\rho_0}(r)$$

con $dv = 4\pi r^2 dr$ y $V_{\rho_0}$ el potencial debido a $\rho_0$

Necesitamos entonces el potencial $V_{\rho_0}$ creado por la cáscara de carga en todo punto del espacio, que puede resolverse por la ley de Gauss (es ahora un "cáscara" con hueco centrado, a diferencia de la del caso 3.9, pero se opera igual)




Por simetría

$$\oint_{S_{esfera}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

en cada región ①, ② y ③:

$$\begin{cases} E_1 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E_1 = 0 \\ E_2 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{r} \rho_0 dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0 \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3) \\ E_3 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \rho dv = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\rho_0\left(\frac{4\pi}{3}R_2^3 - \frac{4\pi}{3}R_1^3\right)}_{Q_{\rho_0}} \end{cases}$$

donde $R_1 = R/2$ y $R_2 = R$, siendo: el potencial, de $E = -dV/dr$:

$$\int_{V_3}^{0} dV = -\int_{r}^{\infty} E_3 dr \Rightarrow V_3 = \frac{Q_{\rho_0}}{4\pi\varepsilon_0 r}, \text{ si } r \geq R$$

$$\int_{V_3(R)}^{V_2} dV = -\int_{R}^{r} E_2 dr \Rightarrow V_2 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(r^2 + \frac{R^3}{4r}\right) \text{ si } \frac{R}{2} \leq r \leq R$$

$$\int_{V_2(R/2)}^{V_1} dV = 0 \Rightarrow V_1 = V_2\left(\frac{R}{2}\right) = \frac{3\rho_0 R^2}{8\varepsilon_0} \quad \text{si } 0 \leq r \leq R/2$$

por lo que, de (4):

$$U_e = Q V_1(0) + \frac{1}{2}\int_{r=R/2}^{R} \rho_0 dv\, V_2(r) = Q\frac{3\rho_0 R^2}{8\varepsilon_0} +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{R/2}^{R} \rho_0 4\pi r^2\left[\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(r^2 + \frac{R^3}{4r}\right)\right] = \frac{3Q\rho_0 R^2}{8\varepsilon_0} + \frac{47\pi}{240}\frac{\rho_0^2 R^5}{\varepsilon_0}$$

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONAUTICOS

FISICA II (**Problema E1**) 19.09.2008

APELLIDOS ______________________ NOMBRE ____________ Grupo __ N° _ _ /_ _ _

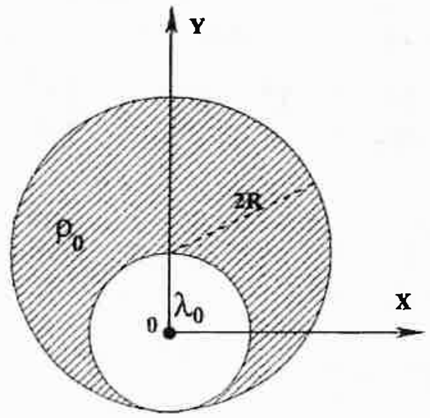
Un sistema está compuesto por un hilo y un cilindro muy largo, de radio *2R*, cuyo eje es paralelo al eje OZ, cargado con densidad volumétrica de carga $\rho_0$ uniforme, excepto en un hueco cilíndrico excéntrico de radio *R*, a lo largo de cuyo eje (OZ) se ubica el hilo con densidad lineal de carga $\lambda_0$ constante, como se muestra en la figura. Se pide:

1.- Valor de $\lambda_0$ para que la carga por unidad de longitud del sistema sea nula.

2.- Campo **E** en todos los puntos del espacio.

3.- Fuerza por unidad de longitud sobre el hilo.

**NOTA:** Debe usarse la notación del enunciado.



1.- $\frac{Q}{H} = \frac{dQ}{dz} = \frac{\left[\rho_0\left(\pi(2R)^2 - \pi R^2\right) + \lambda_0\right] H}{H} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = -3\pi R^2 \rho_0$ 0.5 0.5

$\boxed{1}$

2.- Por superposición de tres distribuciones de carga:

$\boxed{7}$

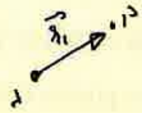

1

y usando:

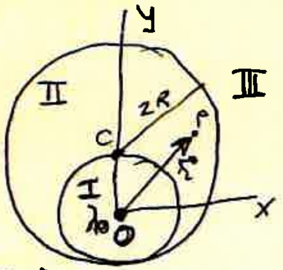
Campo de un cilindro de carga $\rho$ ; Campo de un hilo de carga

1

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r}_1 & \text{si } |r_1| \leq a \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{a^2}{r_1^2} \vec{r}_1 & \text{si } |r_1| \geq a \end{cases}$$



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_1}{r_1^2}$$ 0.5




Se tiene:

- En la región I:

$$\vec{E}_I = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \vec{CP} - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \vec{r} + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} =$$ 1

$$= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(3 \frac{R^2}{r^2} \vec{r} + R\vec{j}\right)$$ 0.5

0.5
$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{CP} = \vec{r} - R\vec{j} \\ r^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

- En II

$$\vec{E}_{II} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \vec{CP} - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \vec{r} + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} =$$ 1

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(\vec{r} - R\vec{j} - \frac{4R^2}{r^2} \vec{r}\right)$$

y en III:

$$\vec{E}_{III} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{\vec{CP}}{|\vec{CP}|^2} (2R)^2 - \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \vec{r} + \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2} =$$ 1

$$= 2 \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{R^2}{x^2 + (y-R)^2} (\vec{r} - R\vec{j}) - \frac{R^2}{r^2} \vec{r}\right)$$ 0.5

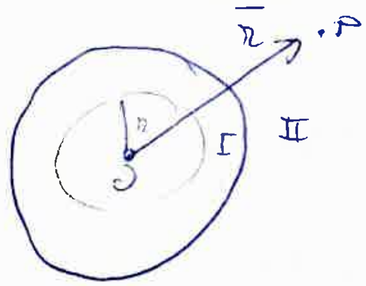
3.- $d\vec{F} = dq\, \vec{E}_p = \lambda_0 dz \left(\vec{E}_{\rho_0} + \vec{E}_{-\rho_0}\right) = \lambda_0 dz \left(-\frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0} \vec{j}\right)$ 1

$\boxed{2}$ ($\vec{E}_\rho$ campo creado por $\rho_0$, $\vec{E}_I - \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \vec{r}/r^2$)

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dz} = \frac{\vec{F}}{H} = -\lambda_0 \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0} \vec{j} = \frac{3\pi\rho_0^2 R^3}{2\varepsilon_0} \vec{j}$$ 1

PREVIO: Más sobre esferas de carga. 1

Esfera de carga $\rho = \rho(r)$ y $\nabla^2 V$.

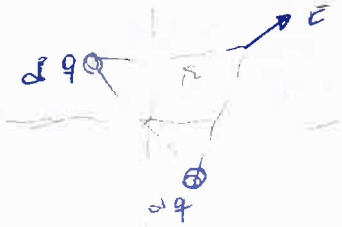



$$Q = \int_V \rho \, dv = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

Si $\rho = \rho_0$

$$Q = \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}$$

Campo radial, por simetría




$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \int E(r) \, dA = ES$$

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{vol.} \rho(r) \, dv$$

$\rho = \rho_0$:

$$E = \begin{cases} E_i = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{r}{R^3} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{r}{R^3}, & 0 \le r \le R \\ E_e = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

Potencial $\quad -E \, dr = dV \Rightarrow \displaystyle\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$

$$V = \begin{cases} V_i = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \left( \dfrac{3}{2} - \dfrac{r^2}{2R^2} \right) \\ V_e = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

$$\rightarrow \int_\infty^{r \geq R} dV = V_e(r) - 0 = -\int_\infty^{r \geq R} E_e(r') \, dr' = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\int_R^{r \le R} dV = V_i(r) - V(R) = -\int_R^r E_i(r') \, dr'$$

Energía almacenada (distribución regular $\rho$)

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \rho V \, dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \left[ \int_0^R E_i^2(r) 4\pi r^2 dr + \right.$$

$$\left. + \int_R^\infty E_e^2 \, 4\pi r^2 dr \right] = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (\text{si } \rho = \rho_0)$$

($\rho$ es función regular, no es divergente en ningún punto al no haber cargas puntuales, sobre hilos o sobre láminas)

Si se coloca una carga puntual $Q_2$ en origen: (2)

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3} + \vec{E}\Big|_{esfera} \\ V = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} + V\Big|_{esfera} \end{cases}$$

y

$$U_e = \sum_{pares} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = Q_2\left[\sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_j - 0|}\right] + \sum_{\substack{pares \\ en\ \rho_0}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

$$= Q_2 V_{\rho_0}(r=0) + \frac{1}{2}\int_{esfera} \rho\, dv\, V$$

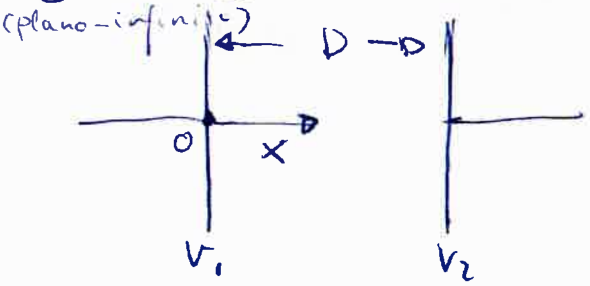
$$= Q_2 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3QQ_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{Q}{Q_2}\right)$$

La expresión

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dv$$

no vale pues saldría $\int_0 \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr \to \infty$ diverg.

Condensador (plano-infinito) con densidad $\rho(x)$, condiciones: $V(0) = V_1$, $V(D) = V_2$



$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$ (Poisson)

como: $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

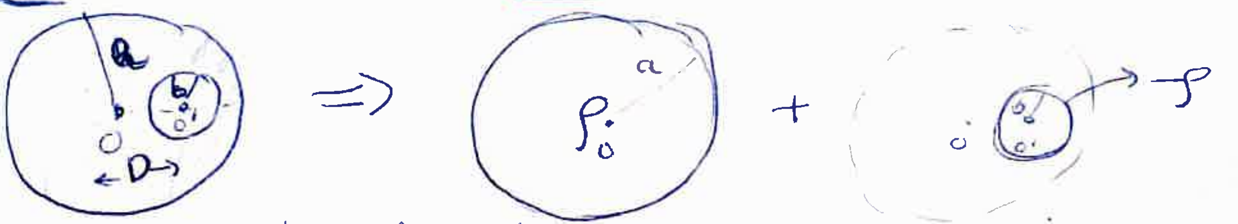
$$\Rightarrow \frac{dV}{dx} = -\int_0^x \frac{\rho(x')dx'}{\varepsilon_0} + cte \Rightarrow$$

Si $\rho = \rho_0$ (cte) $\Rightarrow V = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\rho_0 x^2}{\varepsilon_0} + Ax + B$ (A, B constantes)

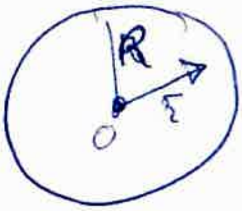
determina A, B
$$\left.\begin{cases} V_1 = B = V(0) \\ V_2 = -\dfrac{\rho_0 D^2}{2\varepsilon_0} + AD + B = V(D) \end{cases}\right\} \quad V = \left[\frac{V_2 - V_1}{D} + \frac{\rho_0 D}{2\varepsilon_0}\right]x + V_1 - \frac{\rho_0 x^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\vec{i} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}x\vec{i} - \left[\frac{\Delta V}{D} + \frac{\rho_0 D}{2\varepsilon_0}\right]\vec{i}$$

# Esfera ($\rho$) con hueco excéntrico de radio b

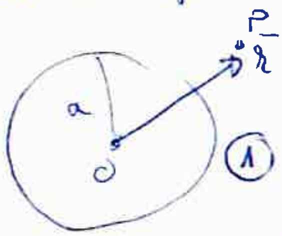



Por superposición de esfera de carga $\rho$ y radio a con otra de carga $(-\rho)$ y radio b en O', usando resultados de esfera de carga homogénea

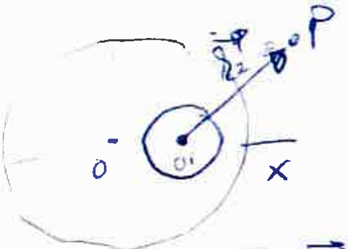



$$E = \begin{cases} \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{r}{R^3} \quad , r < R & \text{(interior)} \\ & \text{(radial)} \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \quad , r \geq R & \text{(exterior)} \end{cases}$$

Entonces, si $\vec{r}$ y $\vec{r}_2$ son los vectores de posición del punto campo relativos a los orígenes O y O', los campos creados por cada esfera son:




$$\vec{E}_1 = E_1 \frac{\vec{r}}{r} \; ; \; E_1 = \begin{cases} E_{1i} = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{r}{a^3} \quad , r < a \\ E_{1e} = \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \quad , r \geq a \end{cases}$$




$$\vec{E}_2 = E_2 \frac{\vec{r}_2}{r_2} \; ; \; E_2 = \begin{cases} E_{2i} = -\dfrac{\rho b^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{r_2}{b^3} \quad , r_2 < b \\ E_{2e} = -\dfrac{\rho b^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r_2^2} \quad , r_2 \geq b \end{cases}$$

con
$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{OO'} = \vec{r} - D\vec{i} = (x-D, y, z) \end{cases}$$

En el interior del hueco, el campo sería

$$\vec{E}_{hueco} = \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{2i} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} D\vec{i}$$

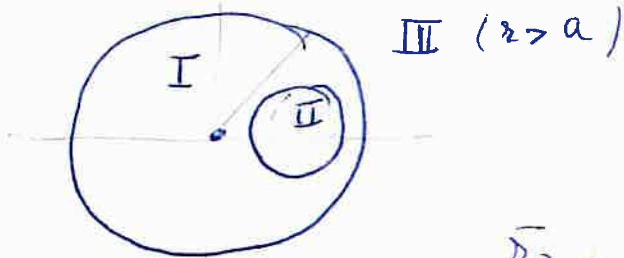
que es uniforme !!! y sería cero si O' → O.

La carga total de la distribución es (2)

$$\int_{V_e} \rho\, dv = Q = \rho V_{ve} = \rho\left(\frac{4\pi}{3}a^3 - \frac{4\pi}{3}b^3\right)$$

luego
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}(a^3 - b^3)}$$

El campo en cada una de las tres regiones I, II y III:




sería, con $\vec{r}_2 = \vec{r} - D\vec{i}$

$$\frac{\vec{r}_2}{r_2} = \frac{(x-D)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{[(x-D)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} = \frac{\vec{r} - D\vec{i}}{|\vec{r} - D\vec{i}|}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_I = \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{2e} \\ \vec{E}_{II} = \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{2i} \\ \vec{E}_{III} = \vec{E}_{1e} + \vec{E}_{2e} \end{cases}$$

Para el potencial creado por la distribución se opera igual, con el potencial creado por esfera de carga uniforme, de radio R (en O):

con $\vec{r}$ en O: $$V = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right), & 0 < r \le R \\ \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Así:

$$V_1 = \begin{cases} V_{1i} = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2}\right) \\ V_{1e} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} \end{cases}; \quad V_2 = \begin{cases} V_{2i} = \frac{-\rho b^2}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3}{2} - \frac{r_2^2}{2b^2}\right), \\ V_{2e} = -\frac{\rho b^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r_2} \quad \text{(exte. al hueco)} \end{cases}$$

y $V = V_1 + V_2$ en las regiones I, II y III.

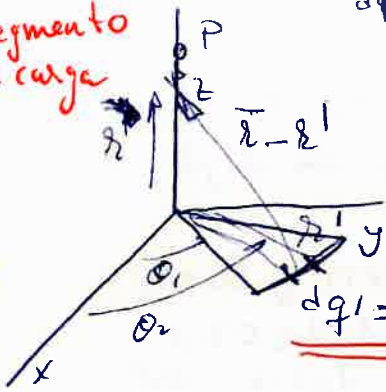
¿Cómo resolverías el problema si el hueco ~~tl~~ tuviera carga de densidad $\rho_1$?

¿Y si en el centro del hueco hay carga puntual $Q_0$?

Adicional 1 Carga $Q$, densidad uniforme $\lambda$ ①

Segmento de carga

$d\vec{E} = k \frac{dq}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} (\vec{r}-\vec{r}') \Rightarrow \lambda = \frac{Q}{\ell} = \frac{Q}{R(\theta_2-\theta_1)} = \frac{dq'}{d\ell'}$




$dq' = \lambda d\ell'$


$, d\ell' = R\,d\theta'$

Las posiciones de puntos de campo y de fuentes son

$$\begin{cases} \vec{r} = z\vec{k} \\ \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} = R(\cos\theta'\vec{i} + \operatorname{sen}\theta'\vec{j}) \end{cases}$$

Entonces

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = |z\vec{k} - \vec{r}'|^2 = x'^2 + y'^2 + z^2 = R^2 + z^2$$

El campo diferencial creado por $dq'$ en P es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, d\ell'}{(R^2+z^2)^{3/2}} \frac{-R(\cos\theta'\vec{i} + \operatorname{sen}\theta'\vec{j}) + z\vec{k}}{1}$$

Sólo se requieren las primitivas

$$I_c(\theta') = \int d\theta' \cos\theta' = \operatorname{sen}\theta'$$
$$I_s(\theta') = \int d\theta' \operatorname{sen}\theta' = -\cos\theta'$$
$$I_0(\theta') = \int d\theta' = \theta'$$

lo que da

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} \left[ z\vec{k} - R\frac{\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\vec{i} + \right.$$
$$\left. + R\frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\vec{j} \right] \quad \text{si } \theta_2 \xrightarrow{\lim} \theta_1$$

$$\lim_{\theta_2\to\theta_1} \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}} \left[ -R\cos\theta_1\vec{i} - R\operatorname{sen}\theta_1\vec{j} + z\vec{k} \right]$$

(carga puntual en $\theta_1$)

El potencial sería:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda\, d\theta'}{\sqrt{z^2+R^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}} \frac{\theta_2-\theta_1}{\theta_2-\theta_1} \nearrow 1$$

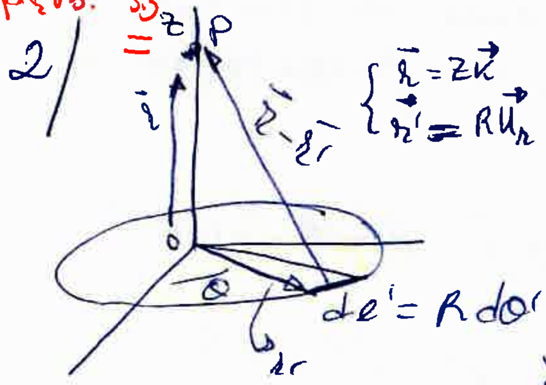
no depende de $\theta_2$ y $\theta_1$ !!!!! sobre el eje oz (sólo)

(Ad.) .2 Observad que el campo $\vec{E}$ **no** sale de (21)

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

pues $V$ es para un caso particular (sólo evaluado en $\overline{OZ}$, no en $(x,y,z)$ como se dijo en el problema 3.2).

prob. 3.3

2/ 


Basta hacer $\theta_2 = 2\pi$ y $\theta_1 = 0$ en el caso anterior, o bien hacerlo desde el principio con

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi L}$$

y extendiendo las integrales entre $0$ y $2\pi$ sobre $\theta'$.

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k} \\[2ex] V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \end{array}\right.$$

(sobre eje OZ sólo)

$\left(\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = E(0,0,z)\vec{k}\right.$ por condiciones de simetría$\left.\right)$

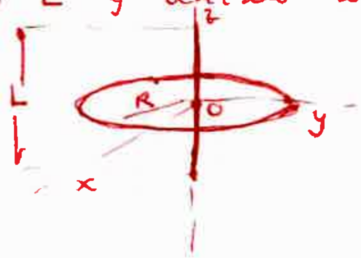
En este caso sí se da que (por la simetría)

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

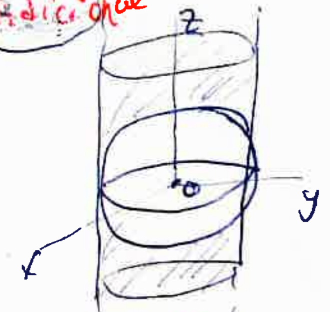
pero... no vale como regla general sin tener $V(\vec{r})$.

Del mismo modo que $V(z=0) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R}$ y $E(0) = 0$, son casos particulares.

3/ Sugerencia: Evaluar el campo $E$ creado en $(0,0,z)$ con $|z| > L/2$ por la superposición de las dos distribuciones anteriores (segmento $L$ y anillo $2\pi R$). Lo mismo para el potencial $V(0,0,z)$.



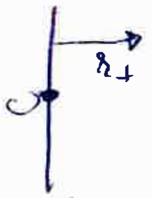
Adicional




Cilindro de carga $\rho_0$ con hueco esférico

Este problema combina la esfera de carga (carga homogénea) y el cilindro de carga, puede verse como la superposición de la carga de un cilindro infinito de densidad $\rho_0$ y una esfera de carga $\rho_1 = -\rho_0$ centrada en O y radio R. (1)

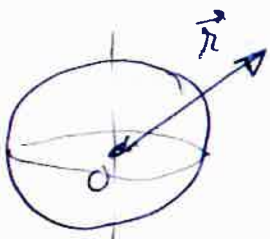

El campo creado por el cilindro a la distancia $r_\perp$ del hilo es ( $\rho|_{\text{coordenada radial}} = r_\perp$ )




$$\vec{E}_c = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r_\perp \vec{u}_\perp = \vec{E}_{c1}, & 0 < r_\perp < R \\[2ex] \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \dfrac{R^2}{r_\perp} \vec{u}_\perp = \vec{E}_{c2}, & r_\perp \geq R \end{cases}$$

según el problema 3.8.

El campo creado por la esfera de carga $\rho_1 = -\rho_0$ es

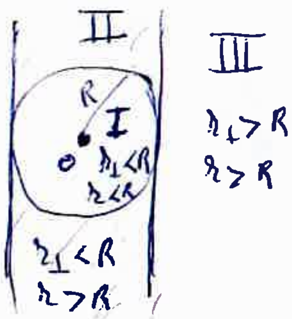



$$\vec{E}_e = \begin{cases} -\dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \left(\dfrac{r}{R^3}\right) \vec{u}_r = \vec{E}_{e1}, & \text{si } 0 \leq r \leq R \\[2ex] -\dfrac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} \vec{u}_r = \vec{E}_{e2}, & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} \vec{r}_\perp = x\vec{i} + y\vec{j}\,; \quad \vec{u}_\perp = \dfrac{\vec{r}_\perp}{r_\perp} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\[2ex] \vec{u}_r = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{\vec{r}_\perp + z\vec{k}}{\sqrt{r_\perp^2 + z^2}} \end{cases}$$

Hay que distinguir 3 zonas I, II y III según:




$$\vec{E}_I = \vec{E}_{c1} + \vec{E}_{e1} =$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \vec{r}_\perp + \left(-\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0} \vec{r}\right)$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_\perp}{6} - \frac{z\vec{k}}{3}\right)$$

39②

$$\vec{E}_{II} = \vec{E}_{e1} + \vec{E}_{e2} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\vec{r}_\perp - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{R^3}{3r^3}\right)\vec{r}_\perp - \frac{R^3}{3r^3} z\vec{k}\right)$$

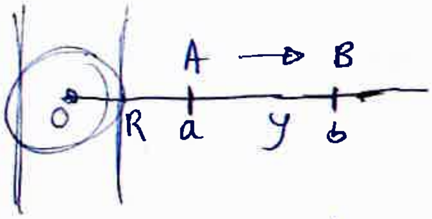
y

$$\vec{E}_{III} = \vec{E}_{c2} + \vec{E}_{e2} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{r_\perp^2}\vec{r}_\perp - \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^3}\vec{r}$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{R^2\vec{r}_\perp}{2r_\perp^2} - \frac{R^3}{3(r_\perp^2+z^2)^{3/2}}(\vec{r}_\perp + z\vec{k})\right]$$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{R^2}{2r_\perp^2} - \frac{R^3}{3r^3}\right)\vec{r}_\perp - \frac{R^3}{3r^3} z\vec{k}\right]$$

2/ Trabajo realizado por el campo para llevar a $q$ desde $A\,(0,a,0)$ a $B\,(0,b,0)$ con $b > a > R$. Obviamente




$$W = \int_A^B q\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -q\int_A^B dV$$

$$= -q(V_B - V_A)$$

pero al no haber obtenido antes $V(\vec{r})$, conviene integrar directamente con $\vec{E} = \vec{E}_{III}$ ($W$ es independiente de la trayectoria entre A y B):

$$W = \int_A^B q\,\vec{E}_{III}(x=0,y,z=0)\cdot(\cancel{dx}\overset{0}{\vec{i}} + dy\,\vec{j} + \cancel{dz}\overset{0}{\vec{k}})$$

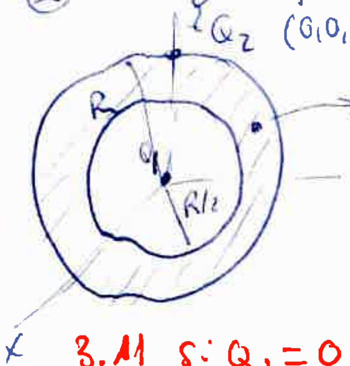
$$= q\int_{y=a}^{b} dy\,\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\left(\frac{R^2}{2y^2} - \frac{R^3}{3y^3}\right)y - \cancel{\frac{R^3}{3y^3}\,0}\right]$$

$$= \frac{q\rho_0}{\varepsilon_0}\int_a^b dy\left[\frac{R^2}{2y} - \frac{R^3}{3y^2}\right] = \frac{\rho_0 q}{\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2}\ln y + \frac{R^3}{3y}\right]_a^b$$

$$= q\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{R^2}{2}\ln\frac{b}{a} + \frac{R^3}{3}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\right]$$

Adición al 3.11 Energía $U_e$ de cáscara de carga $\rho_0$ y dos cargas puntuales $Q_1$ y $Q_2$ (2)

(1)




La energía sería

$$U_e = \sum_{\text{pares}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} =$$

$$= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} + Q_1 \sum_{j\in\rho_0} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{1j}} + Q_2 \sum_{j\in\rho_0} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{2j}} + \sum_{i,j\in\rho_0} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

3.11 si $Q_2 = 0$

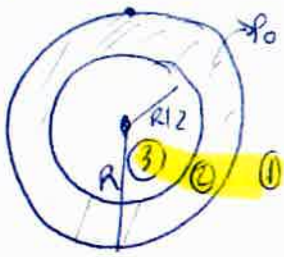
$$= \underset{(1)}{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}} + \underset{(2)}{Q_1 V_{\rho_0}(r=0)} + \underset{(3)}{Q_2 V_{\rho_0}(r=R)} + \underset{(4)}{\frac{1}{2}\int_{\text{en } \rho_0} \rho_0 \, dv \, V_{\rho_0}(r)}$$

(1) → Par $Q_1 Q_2$ ; (2) → contribución $Q_1$ por el potencial de la distribución $\rho_0$ en $r_1 = 0$

(3) $Q_2$ en posición $r = r_2 = R$ en el potencial creado por $\rho_0$

(4) contribución de la distribución regular $\rho_0$.

Sólo hace falta conocer el potencial $V_{\rho_0}$ creado por la carga en la cáscara → Por Gauss




$$E = \begin{cases} E_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r > R \ ; \ Q = \dfrac{7}{6}\pi R^3 \rho_0 \\ E_2 = \dfrac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(r - \dfrac{R^3}{8r^2}\right), & \dfrac{R}{2} < r < R \\ E_3 = 0 \end{cases}$$

(Ver esfera con hueco) y $\int dV = -\int E\, dr \Rightarrow$

$$V_{\rho_0} = \begin{cases} V_1 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r \geq R \\ V_2 = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho_0}{6\varepsilon_0}\left(r^2 + \dfrac{R^3}{4r}\right), & \dfrac{R}{2} \leq r \leq R \\ V_3 = \dfrac{3\rho_0 R^2}{\varepsilon_0 8}, & r \leq \dfrac{R}{2} \end{cases}$$

**Sólo V2 interviene para Ue pues la densidad de carga es diferente de cero sólo en esta región .**

Con $V_3$ y $V_1(R)$ :

$$U_e = \underset{(1)}{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R}} + \underset{(2)}{Q_1 \underbrace{\frac{3\rho_0 R^2}{8\varepsilon_0}}_{V_1(0)}} + \underset{(3)}{Q_2 \underbrace{\frac{7\rho_0 R^2}{24\varepsilon_0}}_{V_1(R)}} + \underset{(4)}{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{47\pi\rho_0^2 R^5}{120\varepsilon_0}}_{U_e(\rho)}}$$

ver que coincide con 3.11 si $Q_2 = 0$ y $Q_1 = Q$.