

Prob. 7.1 Nota: cambias eje x por z en enunciado 7.1
7.1 Movimiento de una carga en un campo electrico magnetico (\vec{E}, \vec{B}) constante. (1)

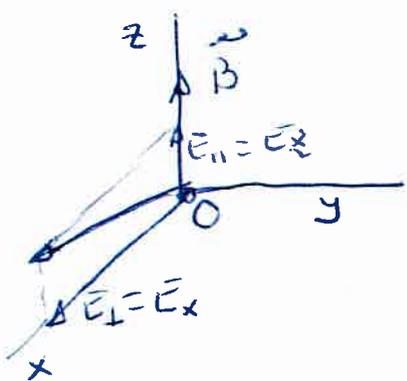
Si $\vec{B} = B \vec{u}$ vector uniforme, podemos tomar \vec{u} como el unitario a lo largo de un eje fijo, oz , por ejemplo:

$$\vec{B} = B \vec{k} \quad \text{eje, cambias a } i \text{ para 7.1} \\ (B \text{ constante})$$

Si el campo $\vec{E} = |\vec{E}| \vec{u}_E$ tambien es uniforme, podemos descomponerlo en dos, un vector \vec{E}_{\parallel} paralelo a \vec{B} y otro perpendicular \vec{E}_{\perp} a \vec{B} , sin perdida de generalidad:

$$\vec{E} = E_{\parallel} \vec{k} + E_{\perp} \vec{u}_{\perp} = E_z \vec{k} + E_x \vec{i}$$

segun ejes oz y ox .



Condiciones iniciales

$$\vec{v}(t=0) = v_{ox} \vec{i} + v_{oy} \vec{j} + v_{oz} \vec{k}$$

y, sin perdida de generalidad tomamos la posicion inicial en el origen de ese sistema coordenado.

$$\vec{r}(0) = 0$$

La ecuacion del movimiento, ley o fuerza de Lorentz es

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ = q (E_x \vec{i} - v_x B \vec{j} + v_y B \vec{i})$$

donde:

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{qE_x}{m} + \frac{qB}{m} v_y = \frac{qE_{\perp}}{m} + \omega v_y & (1) \\ \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x = -\omega v_x & (2) \\ \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \frac{qE_z}{m} = \frac{qE_{\parallel}}{m} & (3) \end{cases}$$

donde $\omega = qB/m$ (en s^{-1}).

A) El caso más simple se da para $B = 0$, entonces

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (3) \quad (2)$$

da una aceleración constante y movimiento uniformemente acelerado por tanto:

$$\int \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}}{m} t$$

$$\int \vec{x} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \frac{q\vec{E}}{m} t^2 \quad (4)$$

dando trayectorias rectilíneas o parabólicas según sea \vec{v}_0 .

B) Si: $\vec{E} = 0$, entonces

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{a}$$

que da aceleración tangencial nula

$$a_t = \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{a} = 0$$

luego (para) $\vec{a} = \vec{a}_c$ (toda la aceleración es centrípeta) y $|\vec{v}|$ será constante.

$$\text{de } \begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y \\ \dot{v}_y = -\omega v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \ddot{v}_x = +\omega \dot{v}_y = -\omega^2 v_x$$

o sea $\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \quad (5)$

ecuación armónica de solución

$$v_x = A \cos \omega t + C \sin \omega t$$

con A y C constantes a determinar de $\vec{v}(t=0)$. Para v_y :

$$v_y = \frac{\dot{v}_x}{\omega} = -A \sin \omega t + C \cos \omega t$$

Como $v_x(0) = v_{0x}$ y $v_y(0) = v_{0y}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & v_x = v_{0x} \cos \omega t + v_{0y} \sin \omega t = \dot{x} \\
 (7) \quad & v_y = -v_{0x} \sin \omega t + v_{0y} \cos \omega t = \dot{y} \\
 (8) \quad & v_z = v_{0z} = \dot{z}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

de (6)² + (7)² se tiene:

$$\begin{cases}
 v_x^2 + v_y^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = v_{\perp 0}^2 \\
 v_z^2 = v_{0z}^2
 \end{cases}
 \Rightarrow |\vec{v}|^2 = v_0^2$$

no varía la energía cinética $E_c = mv^2/2$. Integrandolo, la posición es:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_x dt \Rightarrow x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_{0y}}{\omega} (\cos \omega t - 1) \tag{9}$$

$$y = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{v_{0y}}{\omega} \sin \omega t \tag{10}$$

$$z = v_{0z} t \tag{11}$$

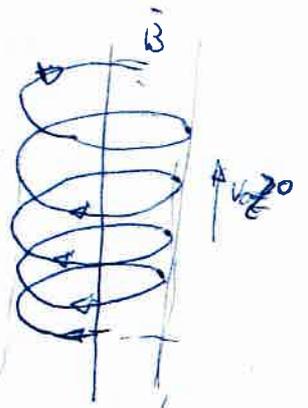
de las ecuaciones de la trayectoria, en particular

$$\left(x - \frac{v_{0y}}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{v_{0x}}{\omega}\right)^2 = \frac{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}{\omega^2} = \frac{v_{\perp 0}^2}{\omega^2} = R_c^2$$

que es una circunferencia (a cada z fijo) con centro en $(v_{0y}/\omega, -v_{0x}/\omega, z)$. Como en OZ el movimiento es uniforme, la trayectoria es una hélice de radio de curvatura constante*¹ y la partícula gira alrededor a la línea de campo \vec{B} con velocidad angular

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} = \frac{q\vec{B}}{m} \vec{k} = \omega \vec{k}$$

observa que el sentido de giro depende del signo de la carga



*¹ Nota: $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_c = \frac{q\vec{B}}{m} (\vec{v} \times \frac{\vec{B}}{B}) = \vec{\Omega} \times \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = -\frac{q\vec{B}}{m} (\text{sen}^{\dagger})$$

7.2) Si además hay campo \vec{E} , se tiene, de (1), (2) y (3), como para (6), (7) y (8):

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & \ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \Rightarrow v_x = A' \cos \omega t + C' \sin \omega t \\
 (13) \quad & \dot{v}_y = \dot{v}_x / \omega - \frac{q E_x m}{m q B} = -A' \sin \omega t + C' \cos \omega t \\
 (14) \quad & \dot{v}_z = \frac{q E_z}{m} t + v_{0z}
 \end{aligned}$$

con $v_x(0) = v_{0x}$ y $v_y(0) = v_{0y}$ queda: ($\vec{E}_\perp = \vec{E}_x$)

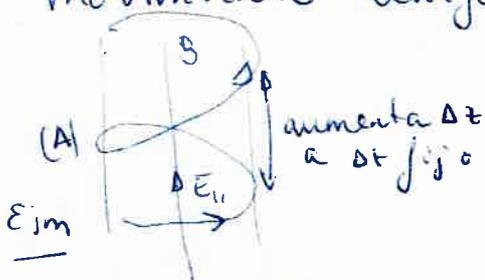
$$\begin{cases}
 v_x = v_{0x} (\cos \omega t - 1) + \left(v_{0y} + \frac{E_x}{B} \right) \sin \omega t = \frac{dx}{dt} \\
 v_y = -v_{0x} \sin \omega t + \left(v_{0y} + \frac{E_x}{B} \right) \cos \omega t - \frac{E_x}{B} \\
 v_z = \frac{q E_z t}{m} + v_{0z} = \frac{dz}{dt}
 \end{cases}$$

e integradas:

$$\begin{cases}
 x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t - \left(v_{0y} + \frac{E_x}{B} \right) \frac{\cos \omega t - 1}{\omega} \\
 y = \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \left(v_{0y} + \frac{E_x}{B} \right) \frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{E_x}{B} t \\
 z = v_{0z} t + \frac{1}{2} \left(\frac{q E_{||}}{m} \right) t^2
 \end{cases}$$

dando trayectorias menos simples que la anterior, pero composiciones de movimientos periódicos en t y líneas en t y/o t^2 (paraboloides curvilíneos).

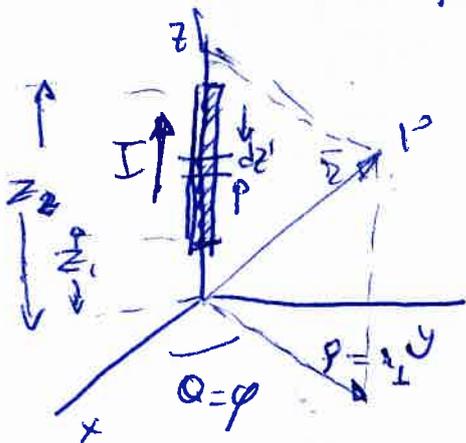
En particular, si $\vec{E}_\perp = \vec{E}_x = 0$ se tendría en cada z fijo un movim. circular, y en OZ un movimiento uniformemente acelerado (A)



Casos particulares: En 7.1 \vec{E} y \vec{B} son paralelos, digamos a lo largo del eje OZ (x en el enunciado). En 7.2 \vec{E} es perpendicular a \vec{B} , tomar \vec{E} paralelo a \vec{O} , sólo aparecen $B=B_z$ y $E=E_x$

y si $E_{||} = 0$, $E_\perp \neq 0$, da hélices de radio variable con traslación a z fijo y M.R.U.A en OZ . Puede particularizarse para $E_\perp = 0$ y $\vec{E} = E_{||} \vec{z}$ caso anterior e intentar representarlo sacando el radio de curvatura.

Prob 7.3) Piden el campo \vec{B} inducido por un hilo o segmento de corriente rectilíneo, de un tramo de un circuito, se entiende. Está resuelto en los apuntes de FII. Sólo piden \vec{B} en el punto P, pero éste es en realidad un punto genérico del espacio:



$$\vec{r} = \vec{\rho} + z\vec{k} = \rho\vec{u}_\phi + z\vec{k}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} =$$

$$= \vec{r}_\perp + z\vec{k}$$

son las coordenadas del punto de campo.

La fuente (vectorial) de campo \vec{B} es un elemento de corriente a lo largo del eje oz

con coordenadas de fuente $\vec{r}' = z'\vec{k} \rightarrow I d\vec{l}' = I dz' \vec{k} \quad (I = \frac{dq}{dt})$

Con ellas, el campo elemental creado por $I d\vec{l}'$ es

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I dz' \vec{k} \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I dz' \vec{k} \times \frac{\vec{\rho} + (z - z')\vec{k}}{(V\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I dz' \frac{\rho \vec{u}_\phi(\phi)}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{3/2}}, \text{ integrando}$$

($\vec{u}_\phi = \cos\phi\vec{i} + \sin\phi\vec{j}$
no depende de fuentes)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{u}_\phi \rho \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{(\rho^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

(usando la primitiva 2. de pag. 4 con $z = z - z'$)

$$\int \frac{dz}{(z^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{z}{x^2 \sqrt{z^2 + x^2}}$$

Se tiene:

$$\vec{B} = \vec{B}(\rho, \varphi, z) = \vec{B}(x, y, z) =$$

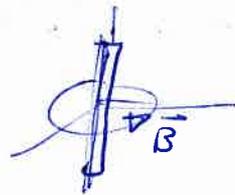
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \left\{ \frac{z - z_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_1)^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{\rho^2 + (z - z_2)^2}} \right\} \vec{u}_\varphi$$

donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\vec{u}_\rho = (x\vec{i} + y\vec{j}) / \sqrt{x^2 + y^2}$.

b) Casos particulares

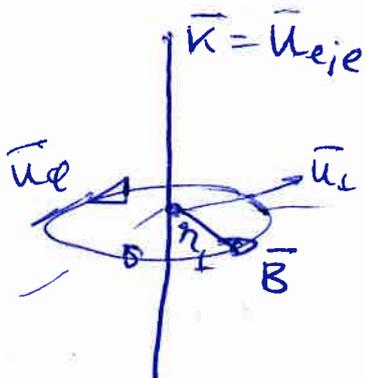
b1) $z_1 = -L/2$ y $z_2 = L/2$ en $z = 0$

$$\vec{B}_L(\rho, \varphi, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\rho^2}} \vec{u}_\varphi$$



b2) Si $L \rightarrow \infty$, equivale a $z_1 \rightarrow -\infty$ y $z_2 \rightarrow \infty$
se tiene el campo de un hilo rectilíneo infinito de corriente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} (\vec{u}_{\text{eje}} \times \vec{u}_\perp)$$



campo importante,
(comparar con \vec{E} de hilo de carga

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 \rho} \vec{u}_\perp$$

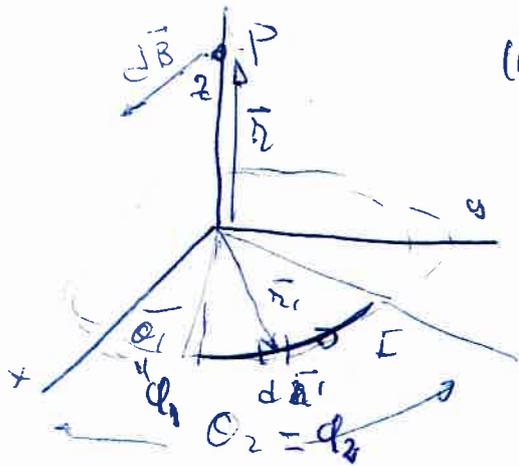
NOTA: Podría calcularse el vector potencial magnet. \vec{A}

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{I dz' \vec{k}}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left| \frac{\rho^2 + (z - z_1)^2}{\rho^2 + (z - z_2)^2} \right|$$

$$\text{y } \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Rob Preliminar, extra: campo de sectores circular de corrientes
 7.4) Campo B inducido por segmento circular de corriente (segmento de circuito circular, en realidad) en un punto del eje. ①

Se opera de forma similar a lo realzado para calcular \vec{E} del segmento circular de carga del tema 5, las integrales son las mismas:



(notación $\theta \leftrightarrow \varphi$)

Coordenadas campo y fuente:

$$\begin{cases} \vec{r} = z \vec{k} \\ \vec{r}' = x' \vec{i} + y' \vec{j} = R \vec{u}_\perp(\theta) \\ = R (\cos \theta' \vec{i} + \sin \theta' \vec{j}) \end{cases}$$

y elemento de línea vector:

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 = d\vec{l} &= R d\theta (-\sin \theta' \vec{i} + \cos \theta' \vec{j}) \\ &= R d\theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Campo elemental debido a $I d\vec{r}_1$

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta' \frac{\vec{u}_\theta \times (z \vec{k} - R \vec{u}_\perp)}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta' \frac{z \vec{u}_\perp(\theta') + R \vec{k}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R d\theta' \frac{z (\cos \theta' \vec{i} + \sin \theta' \vec{j}) + R \vec{k}}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

con:

$$\begin{cases} \vec{u}_\perp \times \vec{u}_\theta = \vec{k} \\ \vec{u}_\theta \times \vec{k} = \vec{u}_\perp \end{cases}$$

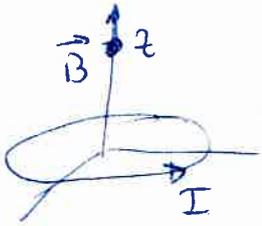
en integrando entre θ_1 y θ_2 :

$$\vec{B} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\vec{B}(\theta) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \left[\vec{i} z \sin \theta' - \vec{j} z \cos \theta' + R \vec{k} \right]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

los casos particulares importantes son:

Prob 7.4

1) $\theta_1 = 0, \theta_2 = 2\pi$ (anillo o espira circular de corriente) (Enunciado de 7.4)



$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(\sqrt{R^2+z^2})^3} \vec{k}$$

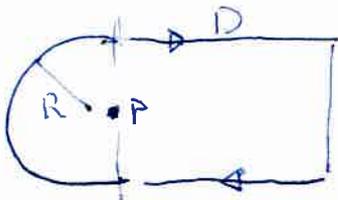
2) El mismo en el origen $z=0$:

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{k}$$

3) Semianillo $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = \pi$

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R^2}{(\sqrt{R^2+z^2})^3} \left(2\frac{z}{R} \vec{i} + \pi \vec{k} \right)$$

Nota: Con estos resultados puede aplicarse el principio de superposición para calcular campos (casi siempre en un punto dado) de distribuciones de corriente como:



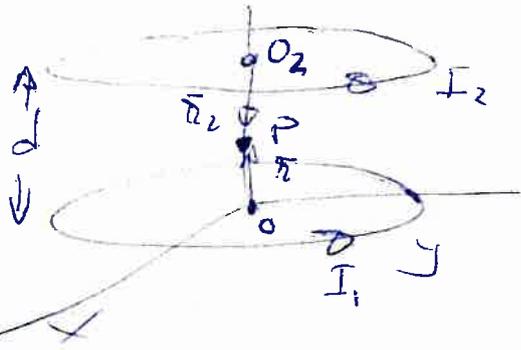
(Ver problema 7.6 que puede resolverse aplicando estos resultados.)

Prob

Campo superposición de dos campos \vec{B} helicoidal

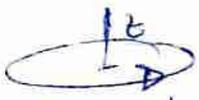
7.5

Bobina de Helmholtz



$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{O_2 P} = \vec{O_2 O_1} + \vec{r} \\ &= -d\vec{u} + z\vec{u} \\ &= (z-d)\vec{u} \\ \vec{r}_1 &= z\vec{u} \end{aligned}$$

El campo de una espira es



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}$$

Espira circular de corriente I

(Prob. 7.4)



1/ luego

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 R^2}{2} \left[\frac{I_1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u} + \frac{I_2}{(R^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \vec{u} \right]$$

valido sólo sobre eje OZ.

2/ $B=0 \Rightarrow$ sólo I_1 opuesta a I_2 sólo I_2 $(I_2 \rightarrow -I_2)$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{I_2}{(R^2 + (z-d)^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{R^2 + (z-d)^2}{R^2 + z^2} = \left(\frac{I_2}{I_1} \right)^{2/3} = \lambda > 0$$

$$(1) \frac{1 + (x-\epsilon)^2}{1 + x^2} = \lambda \quad (x = z/R, \epsilon = d/R)$$

$$\Rightarrow x = \frac{z}{R} = \frac{-\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 \lambda - (\lambda - 1)^2}}{\lambda - 1}$$

hay solución si

$$\epsilon^2 \lambda > (\lambda - 1)^2$$

$$\epsilon = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 \lambda - (\lambda - 1)^2 R^2}}{\lambda - 1}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{d}{R} > \frac{|1 - \lambda|}{\sqrt{\lambda}}, \text{ si } \lambda \leq 1 \Rightarrow d > R \frac{1 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

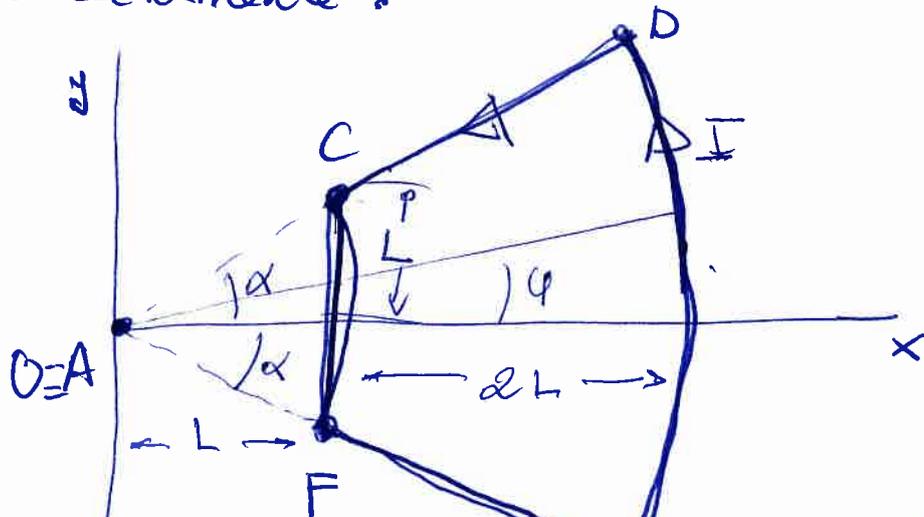
P-egm.

Si $|I_1| = |I_2| = I \Rightarrow B=0 \Rightarrow z=d$.

($\lambda=1$) P-egm (1) queda? $\epsilon^2 - 2\epsilon + 1 = 0$

Prob 7.6

Piden el campo \vec{B} en el origen creado por una espira de corriente formada por segmentos rectilíneos y circulares. Podrían usarse los resultados de los problemas anteriores, pero es mejor integrar directamente.



$$b_{yd} = \frac{L}{L} = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = \pi/4$$

Aplicando Biot-Savart, el campo en $\vec{r} = 0$ sería

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint d\vec{\ell} \times \frac{(0 - \vec{r}')}{|0 - \vec{r}'|^3}$$

que, descomponiendo por tramos es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left\{ \int_C^F -d\vec{\ell}_{CF} \times \frac{\vec{r}'_1}{r'^3} + \int_F^E -d\vec{\ell}'_{FE} \times \frac{\vec{r}'_1}{r'^3} + \int_E^D \frac{-d\vec{\ell}'_{ED} \times \vec{r}'_1}{r'^3} + \int_D^C \frac{-d\vec{\ell}'_{DC} \times \vec{r}'_1}{r'^3} \right\}$$

Pero sobre los tramos rectilíneos \vec{r}'_1 es paralelo a $d\vec{\ell}'_1$ luego $d\vec{\ell}' \times \vec{r}'_1 = 0$, quedando

$$\int_E^D \frac{d\vec{\ell}' \times \vec{r}'_1}{r'^3} = \int_{-L}^L (3L) dy' \vec{u}_y \times \frac{(3L) \vec{u}_x}{(3L)^3} = -\frac{\pi}{6L} \vec{k}$$

$$\int_C^F \frac{d\vec{\ell}' \times \vec{r}'_1}{r'^3} = \int_{+L}^{-L} (dy' \vec{j}) \times \frac{(L\vec{i} + y'\vec{j})}{(L^2 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{L} \vec{k}$$

dando

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \right) \vec{k}$$

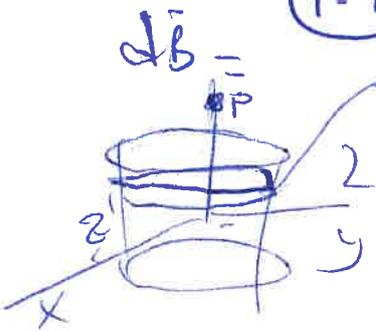
Resolución simple:
espuma

7.7

7.7

0

1



$$dB = \frac{\mu_0 dI'}{2} \frac{R^2}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

$$\frac{L}{NI} = \frac{dz'}{dI'} \Rightarrow dI' = dz' \left(\frac{NI}{L} \right) = nI dz'$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{z'=-L/2}^{L/2} dz' \frac{R^2}{(R^2 + (z-z')^2)^{3/2}}$$

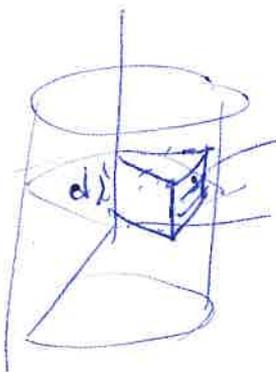
$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{R^2 (z-z')}{\sqrt{R^2 + (z-z')^2}} + \frac{L}{R^2} \right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z+L/2}{\sqrt{R^2 + (z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2 + (z-L/2)^2}} \right] \vec{u}_z = \vec{B}(0,0,z)$$

si $L \rightarrow \infty$

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 n I}{2} [1 - (-1)] \vec{u}_z = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{L} \vec{u}_z$$

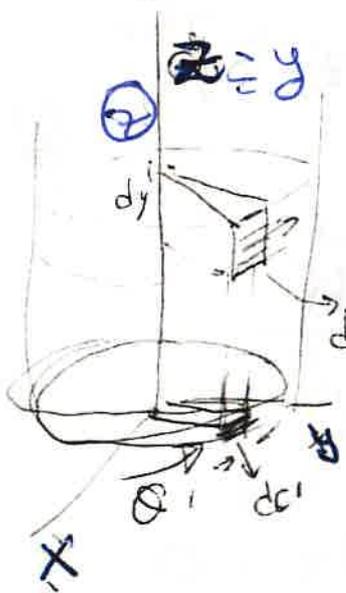
También



$$\vec{J}_s = \frac{q_i \vec{v}_i}{dS'} ; dS' = d\varphi' R dz'$$

$$\vec{J}_s = \frac{dI' d\vec{l}' \vec{u}_0'}{d\vec{l}' dz'} = \frac{dI'}{dz'} \vec{u}_\varphi' = n I$$

7.7 extenso y comentado
 Prob 7.7 / Solenoide de longitud finita L y solenoide infinito.



Se supone que las espiras de corriente I forman un devanado casi continuo, de tal forma que por la superficie del solenoide viene a fluir una corriente superficial $\vec{J}_s = \frac{\sum \vec{v}_i}{\sum S}$ en A/m que llevará sentido del unitario angular \vec{u}_θ .

coord. de la espira $\left\{ \begin{array}{l} \theta' = \theta \\ r' = R \\ z' \rightarrow y' \end{array} \right.$

Como hay n espiras cada metro, en un dy' metros habrá $(ndy') = dN'$ espiras cada una de corriente I , y la corriente que fluye por el elemento de área ds' será:

$$dI' = dN' I = ndy' I \quad (\text{Amp})$$

con el elemento de longitud vectorizado $d\vec{l}' = R d\theta' \vec{u}_\theta'$

$$d\vec{l}' = d\vec{r}' = R d\theta' \vec{u}_\theta'$$

se tiene que $(\sum r_i \vec{v}_i) \rightarrow dI' d\vec{r}' = (Indy') R d\theta' \vec{u}_\theta$ con las coordenadas de campo y fuente

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = r \vec{e}_r = r \vec{u}_r \\ \vec{r}' = R \vec{u}_r' + z' \vec{k} \quad (\text{cilindricas}) \end{array} \right.$$

da el campo elemental que genera en el eje ese elemento de corriente $dI' d\vec{r}'$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} dI' R d\theta' \vec{u}_\theta' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} =$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 n I dy' R d\theta'}{4\pi} \vec{u}_\theta \times \frac{(y-y')\vec{k} - R\vec{u}_\perp(\theta')}{[R^2 + (y-y')^2]^{3/2}} =$$

giro para *
($\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{j} \rightarrow \vec{u}_\perp$)

$$= \frac{\mu_0 n I}{4\pi} R dy' d\theta' \frac{(y-y')\vec{u}_\perp(\theta') + R\vec{j}}{[R^2 + (y-y')^2]^{3/2}}$$

como $\int_0^{2\pi} u_\perp(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{k}) d\theta = 0$

el campo sobre el eje oy del solenoide es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I R}{4\pi} \int_{y'=y_1=0}^{y'=y_2=L} \frac{4\vec{j}}{(R^2 + (y-y')^2)^{3/2}} dy'$$

que puede resolverse con el cambio sugerido

dando el resultado de la solución, pero, mejor obtener la primitiva por el mismo cambio (ejercicio matemático o usar tablas)

$$\int \frac{du}{(R^2 + u^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \frac{u}{\sqrt{u^2 + R^2}}$$

lo que da:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \left\{ \frac{y' - y}{\sqrt{R^2 + (y-y')^2}} \right\}_{y'=y_1=0}^{y'=L} \vec{u}_{\text{eje}}$$

\vec{j}

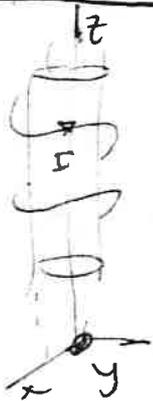
Si el solenoide es infinito, $y_1 \rightarrow -\infty$
 e $y_2 = L \rightarrow \infty$ como límites da: (3)

$$\vec{B}_\infty = \frac{\mu_0 n I}{2} (1 - (-1)) \vec{k} =$$

$$= \mu_0 n I \vec{u}_{eje} = \vec{B}(z)$$

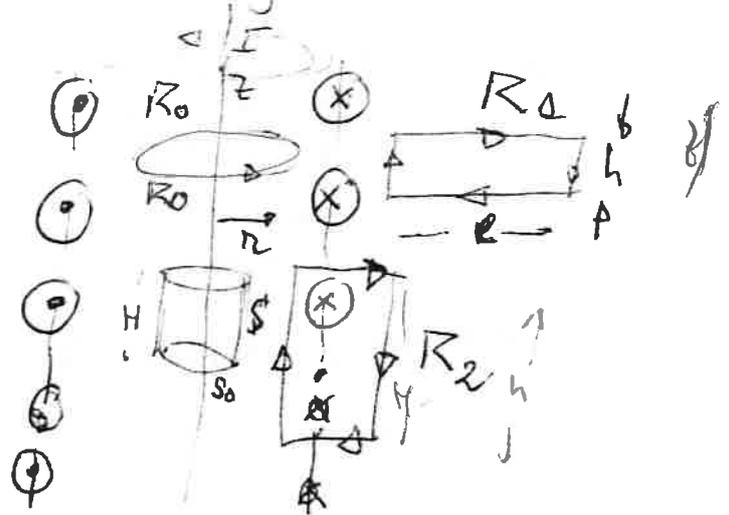
pero hay que probar que ese campo es válido en todo punto interior al solenoide. Lo ~~es~~, y además veremos que \vec{B} queda atrapado en el interior del solenoide, por lo que fuera de él es $B_{ext} = 0$.

Demostración: (elijo oz como eje $\vec{u}_e = \vec{k}$)



Sección:

Aplicando la ley de Ampere



En principio, puede haber campo en todo punto del espacio

$$\vec{B} = \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}_r + \vec{B}_\theta + \vec{B}_z$$

pero por simetría angular (a cualquier orientación θ \vec{B} es el mismo) y axial (en cualquier punto z , \vec{B} es el mismo al ser infinito) se tiene que \vec{B} solo depende de $r_\perp = r$

$$|\vec{B}| = |\vec{B}(r)|$$

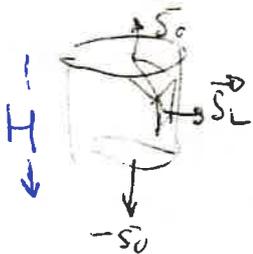
luego, dejando esa dependencia en las componentes

$$\vec{B} = B_z \vec{k} + B_\rho \vec{u}_\rho + B_\phi \vec{u}_\phi = \vec{B}(r) \quad (4)$$

1º) Por ley de Gauss $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, luego

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

sobre S cerrada, cilindro de eje oz altura H y radio $r < R$ con bases S_0 (m^2)



$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} &= B_z(z+H) S_0 + B_z(z) (-S_0) + B_\rho S_L \\ &= 0 + B_\rho S_L = 0 \end{aligned}$$

lateral del cilindro

por tanto $B_\rho = 0$, no hay componente radial $B_z = B_\rho = 0$.

2º) Sobre la curva Γ_0 (circunferencia de radio r)

$$\oint_{\Gamma_0} \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{int} = \mu_0 0 = 0$$

$$= B_\phi(r) 2\pi r = 0 \Rightarrow B_\phi = 0$$

no hay componente angular.

3º) Sobre curva cerrada Γ_1 exterior (tampoco abierta corriente)

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B}_{ext} \cdot d\vec{e} = \mu_0 I_{int,1} = 0$$

$$= B_z(r_1) h + B_z(r_2) (-h) = [B_z(r_1) - B_z(r_1 + l)] h$$

si $l \rightarrow \infty$, $B_z(r_1 + l) \rightarrow 0$ y $B_z(r_1) = 0$, para todo r_1 , o sea $B_{exterior} = 0$.

en $\mathbb{R}_2 \rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{e} = \mu_0 H n I$

$B \cdot H = \mu_0 H n I \rightarrow$

No hay $B_{exterior}$
 $B = \mu_0 n I = B_{interior}$

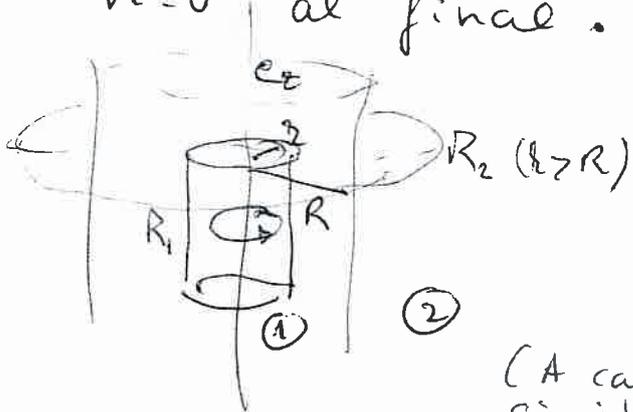
Prob
7.8

Problema tipo de aplicación directa ① de la ley de Ampère para determinar campo B en situaciones de simetría clara. La corriente axial varía con $r = r_{\perp}$ según

$$\vec{J} = k_1 r^n \vec{k}$$

Distingue el caso $n=0$, $\vec{J} = j_0 \vec{k} = k_1 \vec{k}$ uniforme y $n \neq 0$ ($n \neq -2$).

Resuelvo el caso más general y particularito para $n=0$ al final.



Por razones de simetría el campo \vec{B} tiene dirección angular en \vec{u}_{ϕ} , como el creado por un hilo infinito de corriente

(A cada elemento I' le corresponde otro I' simétrico que da $\vec{B} = B \vec{u}_{\phi}$ al superponer ambos campos).

Conviene aplicar la ley de Ampere sobre curvas amperianas R_1 y R_2 interiores y exteriores a la distribución de corriente, sobre estas curvas amperianas

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\Gamma \text{ int.}} \quad (\vec{B} = B \vec{u}_{\phi} \text{ y } d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_{\phi})$$

Para ver k_1 en función de la corriente I total veamos



$$I = \int_{\text{Sección}} \vec{J} \cdot d\vec{S}_{\perp} = \int_{r'=0}^R k_1 r'^n 2\pi r' dr'$$

$$= k_1 \pi \frac{R^{n+2}}{n+2}$$

luego

~~pero~~

$$k_1 = I \frac{n+2}{\pi} R^{-n-2}$$

Sobre ① = $|0 < r < R|$ ②

notación
 $\vec{u}_\phi = \vec{u}_\phi$

$$\oint_{R_1} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{R_1} B_1 \vec{u}_\phi \cdot [r d\phi \vec{u}_\phi] = \mu_0 I_{int. R_1} = \mu_0 \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1$$

o sea:

$$B_1 2\pi r = \mu_0 \int_0^r k_1 r' 2\pi r' dr'$$

dando

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} \text{ (en } \vec{u}_\phi)$$

En ② = $|r > R|$

$$\oint_{R_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \mu_0 I_{R_2}$$

$$B_2 2\pi r = \mu_0 \int_0^R J 2\pi r' dr' = \mu_0 I$$

luego

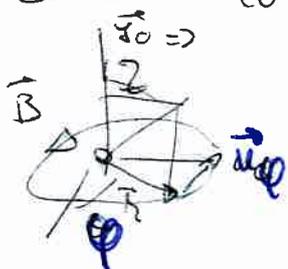
$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi \text{ (como el del hilo de corriente).}$$

Si: $n=0$, $\vec{J} = k_1 = J_0 \vec{u}_z$ constante

y por tanto

$$\text{IMPORTANTE: } \vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_{in} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left(\frac{r}{R}\right) \vec{u}_\phi & , 0 < r < R \\ \vec{B}_{ext} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\phi & , r > R \end{cases}$$

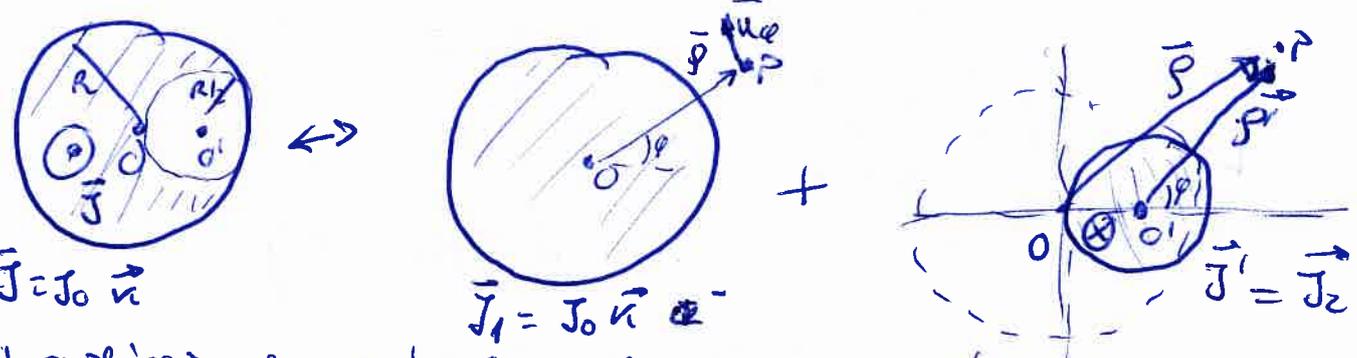
y, con independencia de la orientación del eje de la corriente, basta poner (general, para cualquier eje)



$$\begin{aligned} \vec{u}_\phi &= \vec{u}_{\text{eje}} \times \vec{u}_r = \frac{\vec{J}_0}{J_0} \times \vec{r}_\perp \\ &= \frac{\vec{J}_0}{J_0} \times \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

(Handwritten signature)

Prob. 7.9 / Se trata de superponer los campos creados por hilos de corriente (cilindros) viendo la distribución de corrientes de este cilindro con hueco como la superposición:



y aplicar, respecto los orígenes O y O' ($J_2 = -J_0 \vec{n}$) el campo \vec{B} creado por densidad uniforme de corriente:

$$\vec{B} = \begin{cases} \vec{B}_i = \frac{\mu_0 J_0}{2} \rho \vec{u}_\varphi & \text{si } 0 < \rho < R_0 \\ \vec{B}_e = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2 \rho} \vec{u}_\varphi & \text{si } \rho > R_0 \end{cases}$$

siendo $\vec{u}_\varphi = \vec{n} \times \vec{u}_\rho = \frac{\vec{J}}{J} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho}$ (general)

Como $\vec{\rho} = \vec{OP} = \frac{R}{2} \vec{i} + \vec{\rho}'$ los campos inducidos por los cilindros de corriente \vec{J}_1 y \vec{J}_2 anteriores son:

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \vec{B}_{1i} = \vec{B}_i = \frac{\mu_0 J_0}{2} \rho \vec{u}_\varphi \\ \vec{B}_{1e} = \vec{B}_e = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2 \rho} \vec{u}_\varphi \end{cases} ; \vec{\rho}' = \vec{\rho} - \frac{R}{2} \vec{i}$$

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} \vec{B}_{2i} = \vec{B}'_i = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \left(\vec{n} \times \frac{\vec{\rho}'}{\rho'} \right) , \text{ si } \rho' < R/2 \\ \vec{B}_{2e} = \vec{B}'_e = -\frac{\mu_0 J_0 R^2}{8 \rho'} \left(\vec{n} \times \frac{\vec{\rho}'}{\rho'} \right) \text{ si } \rho' \geq R/2 \end{cases}$$

Así, en cada región del espacio I, II y III (H, C)

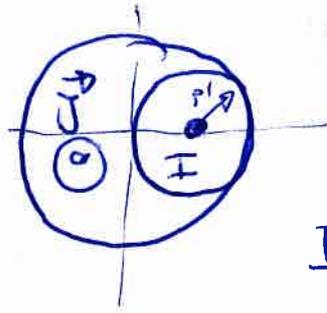
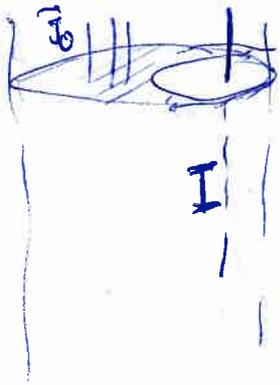


Se tienen:

$$\vec{B}_H = \vec{B}_i + \vec{B}'_i = \frac{\mu_0 J_0}{2} [\vec{n} \times \vec{\rho} - \vec{n} \times \vec{\rho}'] = \frac{\mu_0 J_0}{2} \vec{n} \times (\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{\mu_0 J_0}{2} \frac{R}{2} \vec{j}$$

y \vec{B}_C y \vec{B}_E según la solución.

Prob 7.10 Ahora por el eje del hueco hay un hilo de corriente I a determinar para que la corriente neta (I_{total}) sea nula:



$$I_{total} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} + I = 0$$

con $\vec{J} = J_0 \vec{u}_r$;

$$I_{total} = J_0 (\pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2) + I = 0$$

Dada corriente

$$I = -\frac{3\pi}{4} J_0 R^2$$

el (-) indica que $\vec{J} = I \vec{e}_z$ se dirige según $(-\vec{u}_z) = \vec{e}_z$

El campo \vec{B} en el hueco será la superposición del anterior con el campo inducido por un hilo infinito de corriente I ($(\mu_0 I / 2\pi r) \vec{u}_\phi$):

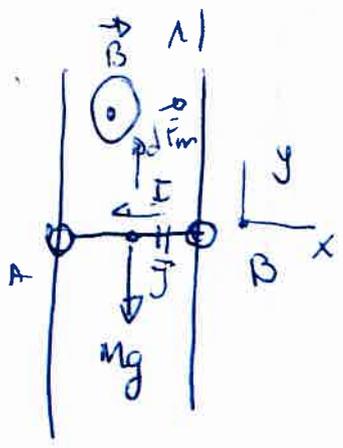
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0 R}{4} \vec{j} - \frac{\mu_0 \left(\frac{3}{4} \pi J_0 R^2\right)}{2\pi r'} \vec{u}_\phi$$

$$= \frac{\mu_0 J_0 R}{4} \vec{j} - \frac{3}{8} \frac{\mu_0 J_0 R^2}{r'} \vec{u}_\phi \quad \text{en } 0 < r' < R/2$$

(signo mal en la solución).

Prob 7.11

Problema para evaluar la fuerza magnética sobre elementos de corriente (y momento de esa fuerza en el caso 2) y que ya entronca con los fenómenos de inducción que veremos en el tema 8 con campos y/o corrientes variables en t.



a) Por el segmento BA circula corriente de intensidad I, y densidad $\vec{J} = \frac{I}{S} \vec{e}$ siendo $\vec{e} = -\vec{i}$. Sobre el elemento de corriente $I dx \vec{e}$ actúa la fuerza magnética elemental:

$$d\vec{F}_m = I d\vec{x} \times \vec{B} = I dx (-\vec{i}) \times B \vec{k}$$

luego sobre la barra la fuerza es

$$\vec{F}_m = \int_{x=0}^L I dx B (-\vec{j}) = -ILB \vec{j}$$

Por tanto, para que se mueva con MRU (o que de en reposo) el balance de fuerzas debe ser:

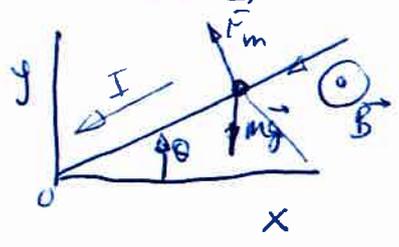
luego

$$\vec{F}_i = 0 = -Mg + ILB$$

$$\vec{B} = \frac{Mg}{IL} \vec{k}$$

Prob 7.12/

a) En este caso se hace girar la varilla (de corriente I) respecto de su extremo en O, la densidad de corriente $\vec{J} = I/S_1 \vec{e}$ va en sentido $\vec{e} = -\vec{u}_r$ (radial), para un θ fijo, la fuerza (elemental) sobre el centro de masas es



centro de masas es

$$d\vec{F}_m = I ds' \vec{u}_r \times \vec{B} \vec{k}$$

$$= -I ds' B \vec{u}_\theta \quad (\text{ver regla de X})$$

dando $\vec{F}_m = -\int_0^L IB ds' \vec{u}_\theta = IBL \vec{u}_\theta$

el momento respecto de O es, de:

$$d\vec{M}_O = \vec{r}' \times d\vec{F}_m = -IB s' ds' \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = -\int_0^L IB s' ds' \vec{k} = IBL^2/2 \vec{k}$$

y el momento debido a Mg , $\vec{M}_g = Mg \frac{L}{2} \cos\theta (-\vec{k})$, para estar $\Rightarrow \vec{M} = I\vec{O}'\vec{k} = 0$

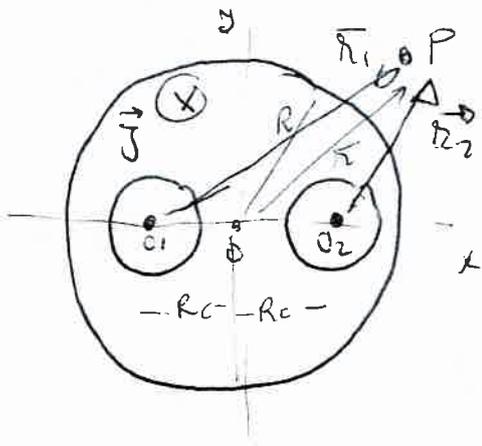
da: $Mg \frac{L}{2} \cos\theta = IBL^2/2 \Rightarrow B = Mg \cos\theta / (IL)$

Apéndice: extensión a los prob. 7.8 y 7.9
 7.9 bis y 7.10 bis / Son análogos (Pesados)

Son dos problemas de cálculo de \vec{B} por superposición, usando los resultados de 7.8 para corriente de densidad \vec{J} uniformes. Los huecos pueden interpretarse como superposición de corrientes ascendente y descendente iguales y sentidos opuestos:

$$\vec{J}_0 + (-\vec{J}_0) = 0$$

El problema es puramente de formulismo de cálculo con esta idea, así:



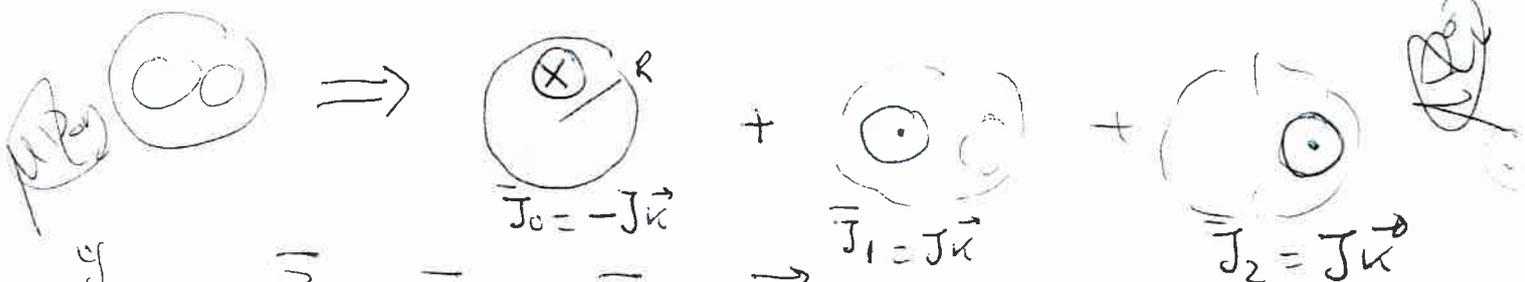
$$\vec{r}_1 = \vec{O_1P} = \vec{O_1O} + \vec{OP} = R_0\vec{i} + \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{O_2P} = \vec{O_2O} + \vec{OP} = -R_0\vec{i} + \vec{r}$$

con $\vec{r} = \vec{r}_\perp = x\vec{i} + y\vec{j}$
 y la corriente total

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{s} = J(\pi R^2 - \pi R_h^2 - \pi R_h^2)$$

siendo R_h el radio de los huecos. La superposición da:



y $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ en cada zona.

Notando por "i" y "e" contribuciones interior y exterior en cada área, los campos son: (ver 7.8)

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{B}_{0i} &= \frac{\mu_0 J}{2} r (-\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r}) \text{ en } y=0 \\ \vec{B}_{0e} &= \frac{\mu_0 J}{2} \frac{R^2}{r} (-\vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r}) \text{ en } y=0 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \vec{B}_{1i} &= \frac{\mu_0 J}{2} \frac{R_h^2}{r_1} (\vec{v} \times \frac{\vec{r}_1}{r_1}) \\ \vec{B}_{1e} &= \frac{\mu_0 J}{2} r_1 (\vec{v} \times \frac{\vec{r}_1}{r_1}) \end{aligned} \right.$$

$$y: \vec{B}_{2i} = \frac{\mu_0 J}{2} r_2 (\vec{v} \times \frac{\vec{r}_2}{r_2}) \text{ y } \vec{B}_{2e} = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{R_h^2}{r_2} (\vec{v} \times \frac{\vec{r}_2}{r_2})$$

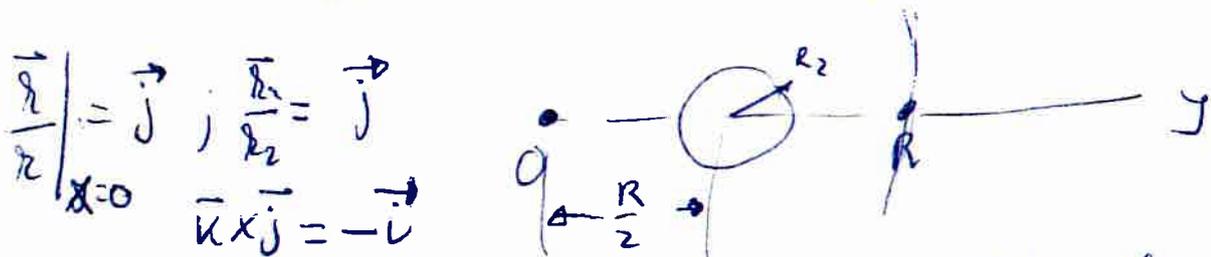
Formulando los campos. $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} & \left\{ \begin{aligned} \vec{B}_{1i} &= \frac{\mu_0 J}{2} \vec{u} \times \frac{\vec{r}}{r} & (r < R) & \textcircled{2} \\ \vec{B}_{1e} &= \frac{\mu_0 J}{2} \frac{R^2}{r} (-\vec{u} \times \frac{\vec{r}}{r}) & (r > R) & \end{aligned} \right. \\ \textcircled{2} \text{ y } \textcircled{3} & \text{ con centro en } (0, R/2): \\ \textcircled{2} & \left\{ \begin{aligned} \vec{B}_{2i} &= \frac{\mu_0 J}{2} r_2 (\vec{u} \times \frac{\vec{r}_2}{r_2}) & (r_2 < R/2) & \\ \vec{B}_{2e} &= \frac{\mu_0 J}{2} \frac{(R/2)^2}{r_2} (\vec{u} \times \frac{\vec{r}_2}{r_2}) & (r_2 > R/2) & \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

con $\vec{r}_2 = \vec{r} - \frac{R}{2} \vec{j} = (y - \frac{R}{2}) \vec{j} + x \vec{i} = y_2 \vec{j} + x \vec{i}$

$$\textcircled{3} \left\{ \begin{aligned} \vec{B}_{3i} &= \frac{\mu_0 J}{2} r_2 (\vec{u} \times \frac{\vec{r}_2}{r_2}), & r_2 < R_2 < \frac{R}{2} \\ \vec{B}_{3e} &= \frac{\mu_0 J}{2} \frac{R_2^2}{r_2} (\vec{u} \times \frac{\vec{r}_2}{r_2}), & r_2 > R_2 \end{aligned} \right.$$

Sobre el eje Oy : ($x=0$)
 $\vec{r} = y \vec{j}$, $\vec{r}_2 = (y - \frac{R}{2}) \vec{j} = y_2 \vec{j}$



en $0 < y < (\frac{R}{2} - R_2)$ | $\forall \frac{R}{2} + R_2 < y < R$ (hueco)

$$\vec{B} = (B_{1i} + B_{2i} + B_{3e}) \vec{i} = \frac{\mu_0 J}{2} \left(y - y_2 - \frac{R_2^2}{y_2} \right) \vec{i}$$

en $\frac{R}{2} - R_2 < y < \frac{R}{2} + R_2$, $x=0$,

$$\vec{B} = \vec{B}_{1i} + \vec{B}_{2i} + \vec{B}_{3i} = \frac{\mu_0 J}{2} (y - y_2 - y_2) \vec{i}$$

exteriores

$$\vec{B} = \vec{B}_{1e} + \vec{B}_{2e} + \vec{B}_{3e} = \frac{\mu_0 J}{2} \left(\frac{R^2}{y} - \frac{(R/2)^2}{y} - \frac{R_2^2}{y} \right) \vec{i}$$