Operadores. Problemas resueltos y comentados.

2.1) Campo escalar:

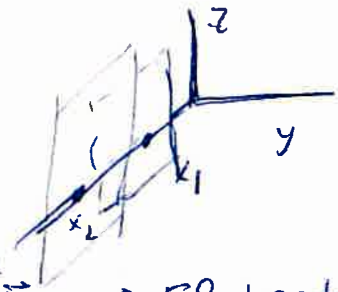
$$\phi = Ax \qquad (\text{si } A>0)$$

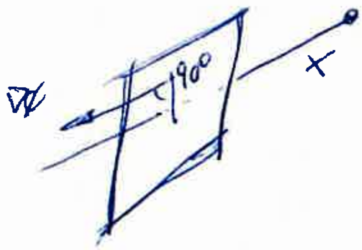
Pide:

1/ Superficies equiescalares $\phi = cte \Rightarrow$

$$Ax = ct \Rightarrow x = \text{constante} = x_n$$

son planos en posiciones $x = x_n$.



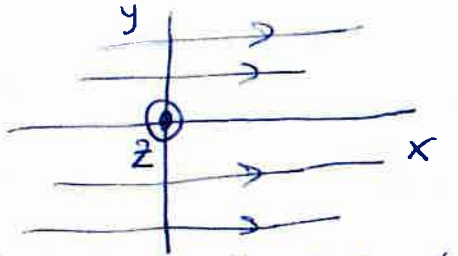


2) $\nabla\phi = A\vec{i} \Rightarrow$ El vector gradiente es paralelo a OX en dirección y sentido de $\vec{i}$

campo

$\bar{E} = \nabla\phi = A\bar{i}$

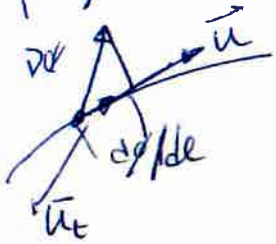
es uniforme



Al ser $\bar{E}$ uniforme lo representamos como rectas paralelas equiespaciadas (no varía $|\nabla\phi|$).

3/ Piden la derivada direccional de ϕ según las direcciones de los vectores $\vec{u}$ del enunciado.

En general, tal derivada es, en cada punto, la proyección de $\nabla\phi$ en la dirección de $\vec{u}$.



$$\frac{d\phi}{dl} = \nabla\phi \cdot \vec{u}_t = \nabla\phi \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$$

con $\bar{u}_t$ el unitario tangente a $\bar{u}$.

Todos los casos encajan en un vector de la forma

$$\vec{u} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\vec{k}$$

para distintos α, β y γ, luego:

$$\frac{d\phi}{dl} = \nabla\phi \cdot \frac{\alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}} = \frac{\alpha A}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

Así, por ejemplo:

3a) $\vec{u}=\vec{i} \Rightarrow \alpha=1, \beta=\gamma=0$

$$\left.\frac{d\phi}{dl}\right|_a = A$$, es máxima (dirección de $\nabla\phi$)

3b) $\vec{u}=\vec{j} \Rightarrow \beta=1, \alpha=0, \gamma=0$

$$\left.\frac{d\phi}{dl}\right|_b = 0$$, $\vec{u}$ es perpendicular a $\nabla\phi$

3c) $\vec{u}=\vec{k}$, como 3b.

3d) $\vec{u} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \Rightarrow \alpha=1=\beta=\gamma$

$$\left.\frac{d\phi}{dl}\right|_d = \frac{A}{\sqrt{3}}$$

Nota: Comprobad que la derivada direccional de ϕ a lo largo de cualquier dirección del plano $x=cte$ dada por

$$\vec{u} = \cos\phi\,\vec{j} + \operatorname{sen}\phi\,\vec{k}$$

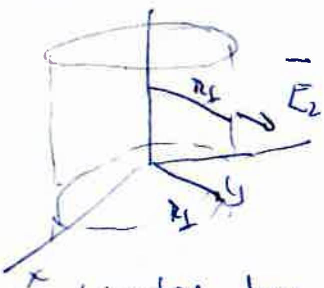
es nula ¿por qué? 4) y 5) $\nabla\cdot\nabla\phi=0$; $\nabla\times(\nabla\phi)=0$.

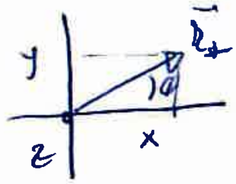
2.3) Ahora $\phi_1 = A+Bx^2$ y $\phi_2 = C(x^2+y^2)$

Las superficies equipotenciales serán:

$\phi_1 = cte \Rightarrow A+Bx^2=cte \Rightarrow x=cte=x_n$ (planos)

$\phi_2 = cte \Rightarrow x^2+y^2 = r_\perp^2 = cte$, cilindros $r_\perp = R_n$



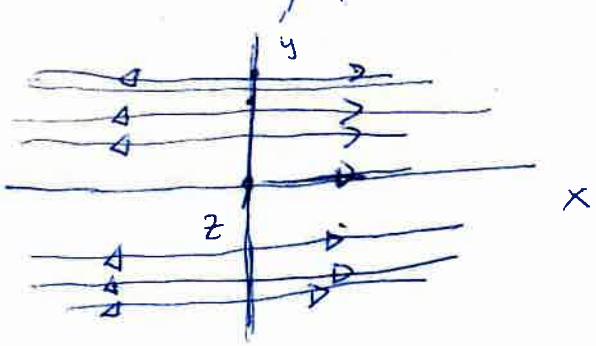


$$\left| \begin{array}{l} x = r_\perp \cos\phi \\ y = r_\perp \operatorname{sen}\phi \end{array} \right.$$
$$x^2+y^2 = r_\perp^2$$

2) Sus gradientes han de ser perpendiculares a las superficies equiescalares

$$\vec{E}_1 = \nabla\phi = 2Bx\,\vec{i} \quad , (\text{si } B>0)$$

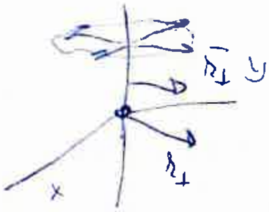
Orientada hacia $(+\vec{i})$ si $x>0$ y a $(-\vec{i})$ si $x<0$



líneas más juntas a medida que $|\nabla\phi|$ aumenta

$$\overline{E}_2 = \nabla\phi_2 = 2C(x\bar{i} + y\bar{j}) = 2C\,\vec{r}_\perp \qquad (C>0)$$

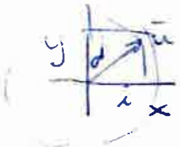
Campo radial respecto al eje OZ.



3) como antes, la derivada direccional a lo largo de cada $\bar{u}$ es $\quad (\bar{u} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k})$

$$\frac{d\phi}{dl} = \nabla\phi \cdot \frac{\alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

será máxima para ϕ_1 si $\bar{u}$ es paralelo a $\bar{i}$ y para ϕ_2 si $\vec{u}$ lleva dirección radial, por ejm. en el caso de $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} = \bar{u}_0$:

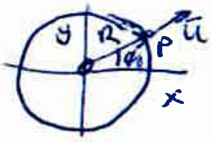


$$\frac{d\phi_2}{dl} = 2C \left.\frac{x\alpha + y\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\right|_{\alpha=1\,\beta=1} = \sqrt{2}\,C\,(x+y)$$

si x e y yacen sobre una superficie $x^2+y^2 = R^2 = z$

NOTA: Si piden la derivada direccional de cada ϕ en un punto dado siguiendo la dirección de $\bar{u}$ han de darse las coordenadas del punto.

Así en cada punto de la forma $P(R\cos\phi_0, R\,\mathrm{sen}\,\phi_0, Z)$ la derivada direccional de ϕ_2 en la dirección radial es



$$\frac{d\phi_2}{dl} = \nabla\phi_2 \cdot \vec{u}_\perp = 2C\,r_\perp\,\vec{u}_\perp \cdot \vec{u}_\perp = 2CR$$

donde $\bar{u}_\perp = \bar{r}_\perp / r_\perp = \cos\phi_0\,\bar{i} + \mathrm{sen}\,\phi_0\,\bar{j}$

4) $\nabla\cdot(\nabla\phi_1) = 2B$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi_2) = \frac{\partial}{\partial x}(2Cx) + \frac{\partial}{\partial y}(2Cy) = 4C$$

o bien, como

$$\nabla\phi_2 = 2C\,r_\perp\,\vec{u}_\perp$$

se puede usar la fórmula de la divergencia en cilíndricas:

$$\mathrm{div}(E_\perp(r_\perp)\,\bar{u}_r) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}(r_\perp E_\perp) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}(r_\perp 2C r_\perp) = 4C$$

5) $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$, para todo ϕ.

2.3/ El campo es ahora

$$\vec{e} = Dx\,\vec{i} + (2 - Hyz)\,\vec{j} + \left(\frac{1}{2}Hz^2 - 1\right)\vec{k}$$

con D y H constantes. Los primeros apartados son de cálculo directo:

$$\vec{e} = \overbrace{\left[Dx\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \left(\frac{1}{2}Hz^2 - 1\right)\vec{u}\right]}^{\vec{e}_c} - \underbrace{Hyz\,\vec{j}}_{\text{no conser}} \; ; \; \nabla \times \vec{e}_c = 0$$

1) $$\nabla \cdot \vec{e} = \frac{\partial}{\partial x} Dx + \frac{\partial}{\partial y}(2 - Hyz) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}Hz^2 - 1\right) = D \neq 0$$

2) $$\nabla \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Dx & (2 - Hyz) & \left(\frac{1}{2}Hz^2 - 1\right) \end{vmatrix} = Hy\,\vec{i} \neq 0$$

El campo no es conservativo ni tampoco solenoidal.

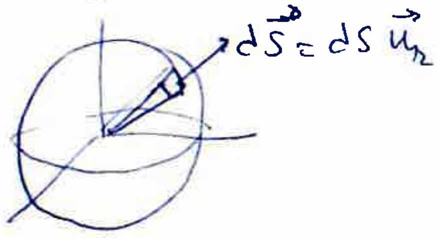
3) $\nabla \times (\nabla \times \vec{e}) = \nabla \times (Hy\,\vec{i}) = -H\,\vec{k}$ (como el prob. 2.3)

o bien (ver tablas)

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{e}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{e}) - \nabla^2 \vec{e} = \nabla(D) - \nabla^2 \vec{e} =$$

$$= 0 - \left[\vec{i}\,\nabla^2(Dx) + \vec{j}\,\nabla^2(2 - Hyz) + \vec{k}\,\nabla^2\left(\frac{Hz^2}{2} - 1\right)\right] = -H\,\vec{k}$$

4) Flujo ϕ de $\vec{e}$ a través de la esfera $r = 3a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



puede hacerse por cálculo directo usando el diferencial de superficie sobre la esfera que dan las tablas

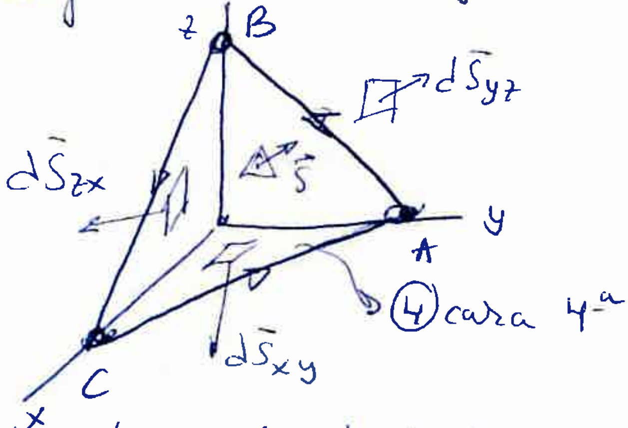
$$d\vec{s} = R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\varphi \, d\theta \left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

en coordenadas esféricas, $x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$ etc, pero es complejo y tedioso (horrible). Por th Gauss:

$$\phi = \oint_{S = 4\pi R^2} \vec{e} \cdot d\vec{s} = \int_{V = \frac{4\pi}{3}R^3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{e})\, dv = D \int dv = DV = D\,\frac{4\pi}{3}(3a)^3$$

es directo y simple!!

5/ Piden el flujo Φ_4 de $\bar{e}$ a través de la superficie (abierta) que define el triángulo ABC



para hacerlo directamente habría que tomar elementos de superficie $d\vec{S}_4$ sobre el triángulo, que yace en el plano

$$x + y + z = a$$

(véase que dan 3 puntos del plano) cuyo vector director va según $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, o sea $d\vec{S}_4 = dS_4\,(\bar{i}+\bar{j}+\bar{k})/\sqrt{3}$ en cada punto, daría cálculo tedioso y complejo.
Si, en cambio, consideramos el flujo de $\vec{e}$ a través de las 4 caras del tetraedro (superficie cerrada) podríamos usar Th Gauss y despejar el flujo pedido del flujo a través del tetraedro, pues

$$\Phi = \oint_{\text{tetraedro}} \vec{e}\cdot d\bar{S} = \int_{S_{xy}} \bar{e}\cdot d\bar{S} + \int_{S_{yz}} \bar{e}\cdot d\bar{S} + \int_{S_{zx}} \bar{e}\cdot d\bar{S} +$$

$$+ \underbrace{\int_{S_4} \bar{e}\cdot d\vec{S}_4}_{\Phi_4} = \int_{\text{Volumen}} \bar{\nabla}\cdot\bar{e}\; dv = D\,V_{ol}$$

dando

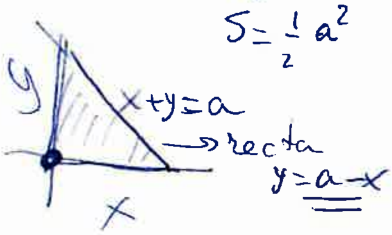
$$\Phi_4 = \Phi - \Phi_{xy} - \Phi_{yz} - \Phi_{zx}$$

donde los flujos sobre caras en los planos xy, yz y zx son sencillos de calcular.
Los elementos diferenciales de superficie son:

$$\begin{cases} d\vec{S}_{xy} = dx\,dy\,(-\vec{k}) \text{ en } z=0 & \text{(Plano base } xy) \\ d\vec{S}_{yz} = dy\,dz\,(-\vec{i}) \text{ en } x=0 \\ d\vec{S}_{zx} = dz\,dx\,(-\vec{j}) \text{ en } y=0 \end{cases}$$

Luego

$$\Phi_{xy} = \int_{S=\frac{1}{2}a^2} \vec{e}\cdot d\vec{S}_{xy} = \int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{a-y} dx\,dy\,(1-Hz^2)\Big|_{z=0} =$$



$$= \int_0^a dy\,(a-y) = \frac{1}{2}a^2 \quad \text{(área del triángulo)}$$

$$\Phi_{yz} = \int_{S=\frac{1}{2}a^2} \vec{e}\cdot d\vec{S}_{yz} = -\iint_S Dx\Big|_{x=0} dy\,dz = 0$$

y

$$\Phi_{zx} = \int_{S=\frac{1}{2}a^2} \vec{e}\cdot d\vec{S}_{zx} = -\iint_S (2-Hyz)\Big|_{y=0} dz\,dx = -2\,\text{Área} =$$
$$= -2\,\frac{1}{2}a^2$$

Como

$$\int_{Vol} \nabla\cdot\vec{e}\,dv = D\,Vol = D\,\frac{1}{3}\,\text{Base}\cdot\text{Altura} =$$
$$= D\,\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\right)a$$

se tiene

$$\Phi_4 = \frac{Da^3}{6} + \frac{a^2}{2} \qquad \text{(finalmente!!)}$$

6.-/ Si pidieran la circulación de $\vec{e}$ a lo largo de la "curva" que describe el triángulo ABC podría hacerse directamente, pero se tendría que integrar sobre elementos de línea que yacen sobre las rectas que pasan por $\overline{AB}$

(Ver cómo en 7.-/

por $\overline{BC}$ y por $\overline{CA}$, por ejm:

$$\begin{cases} d\bar{l}_{AB} = dy\,\bar{j} + dz\,\vec{k} \\ \text{con} \quad \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1 \Rightarrow dz = -dy \\ d\bar{l}_{AB} = dy\,\bar{j} - dy\,\vec{k} \quad , \text{en } x = 0 \end{cases}$$

tedioso. Podría aplicarse Th. de Stokes:

$$\oint_{ABCA} \bar{e}\cdot d\bar{l} = \int_{S_R} (\bar{\nabla}\times\bar{e})\cdot d\bar{S}_4 = \int_{S_4} (Hy\,\bar{i})\cdot d\bar{S}_4$$

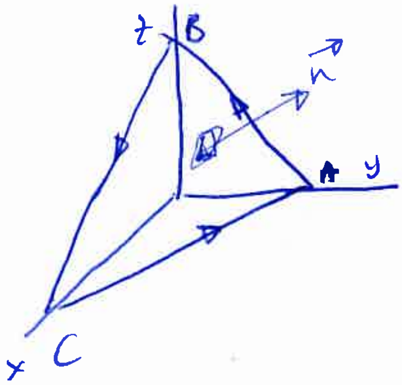
y proceder como antes, con la ventaja de que ahora $\nabla\cdot(Hy\,\bar{i}) = 0$.

Sugerencia: ¿Para qué valores de H y D $\bar{e}$ es
a) solenoidal
b) irrotacional
c) solenoidal e irrotacional?

Comentario 2.

7.- Si pidieran la circulación de $\bar{v} = \nabla \times \bar{e} = Hy\,\bar{i}$ a lo largo de los lados del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$, podría hacerse directamente o por Th. Stokes con $\nabla \times \vec{v} = -H\vec{k}$, uniforme.

Directamente:



$$C = \oint \bar{v}\cdot d\bar{l} = \int_C^A \bar{v}\cdot d\bar{l}_{CA} + \int_A^B \bar{v}\cdot d\bar{l}_{AB} + \int_B^C \bar{v}\cdot d\bar{l}_{BC}$$

como la recta que pasa por C y A es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$$

$$d\bar{l}_{CA} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j} = dx\,\bar{i} - dx\,\bar{j}\ ;\ \text{en } z=0$$

luego

$$\int_C^A Hy\,\bar{i}\cdot d\bar{l}_{CA} = \int_{x=a}^{x=0} H(a-x)\,dx = -\frac{Ha^2}{2}$$

Análogamente:

$$d\bar{l}_{AB} = dy\,\bar{j} + dz\,\bar{k} \quad \text{en } \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1\ ,\ x=0$$

Pero $d\bar{l}_{AB}\cdot\bar{v} = 0$

y $d\bar{l}_{BC} = dz\,\bar{k} + dx\,\bar{i}$ en $y=0$, luego $\bar{v} = H\cdot 0\,\bar{i} = 0$

Entonces

$$\oint \bar{v}\cdot d\bar{l} = -\frac{1}{2}Ha^2$$

Por th de Stokes:

$$C = \oint_{ABC=\gamma} \bar{v}\cdot d\bar{l} = \int_{S_\gamma} \nabla\times(\nabla\times\bar{e})\cdot d\vec{S} = -H\int_{S_{ABC}} \vec{k}\cdot(ds\,\vec{n})$$

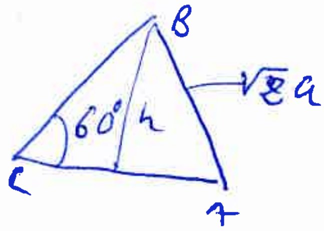
Como S_{ABC} está en el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$, su vector normal unitario sería

$$\bar{n} = \frac{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt{3}} \qquad \left(\text{o } \bar{\nabla}\,\frac{x+y+z}{a} \text{ es } \perp \text{ al plano}\right)$$

Entonces

$$C = -H\int \bar{k}\cdot\bar{n}\,ds = -H\frac{1}{\sqrt{3}}\int dS_{ABC} = -\frac{H}{\sqrt{3}}S_{ABC}$$

dando



$$C = -H\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2}(\sqrt{2}a)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}a\right)$$

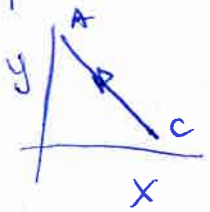
$$= -\frac{1}{2}Ha^2$$

8.- Sugerencia:

Evaluar la circulación de $\vec{e}$ a lo largo de la curva definida por los segmentos de $\overset{\Delta}{ABC}$, directamente.

$$C = \oint \vec{e}\cdot d\vec{l}$$

para el tramo $\overset{ABC}{CA}$



$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{e}(x,y,0) = Dx\,\vec{i} + (2-0)\,\vec{j} - \vec{k} \\ d\vec{l}_{CA} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} = dx(\vec{i}-\vec{j}) \end{cases}$$

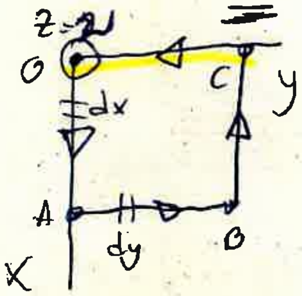
$$\vec{e}\cdot d\vec{l}_{CA} = Dx\,dx - 2\,dx$$

$$\int_C^A \vec{e}\cdot d\vec{l} = \int_a^0 (Dx-2)\,dx = \ldots$$

2.4 $\vec{A} = 2xz\,\vec{i} + z\,\text{sen}\,x\,\vec{j} + (x^2+y^2-z^2)\vec{k}$ ①

1/ $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \vec{i}\left|\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right| + \vec{j}\{\ \} + \vec{k}\{\ \} =$ $(\nabla\cdot\vec{A}=0)$

$= (2y - \text{sen}\,x)\,\vec{i} + z\cos x\,\vec{k} \neq 0$



1/ Sea $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$

$C_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l}$

$= \int_O^A \vec{B}\cdot(dx\,\vec{i}) + \int_A^B \vec{B}\cdot(dy\,\vec{j}) + \int_B^C \vec{B}\cdot(dx\,\vec{i}) + \int_C^O \vec{B}\cdot(dy\,\vec{j}) =$

$= \int_{x=0}^{2} (2y-\text{sen}\,x)\,dx\Big|_{y=0} + \int_{y=0}^{2} 0\,dy + \int_{x=2}^{0} dx\,(2y-\text{sen}\,x)_{y=2}$

$+ \int_{y=2}^{0} dy\cdot 0 = \int_0^2 (-\text{sen}\,x)\,dx + \int_2^0 dx\,(4-\text{sen}\,x) = -8$

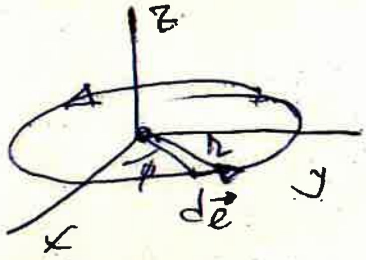
O bien

$C_B = \oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int \nabla\times(\nabla\times A)\cdot d\vec{S}$, $S = 2\times 2$

$= \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2} (z\,\text{sen}\,x\,\vec{j} - 2\vec{k})\Big|_{z=2} \cdot dx\,dy\,(\vec{k})$

$= \int_0^2 dy \int_0^2 dx\,(2\,\text{sen}\,x\,\vec{j}\cdot\vec{k} - 2\vec{k}\cdot\vec{k}) = -2\int dS = -8$

2/



$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} \Rightarrow d(R\cos\varphi\,\vec{i} + R\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{j})$

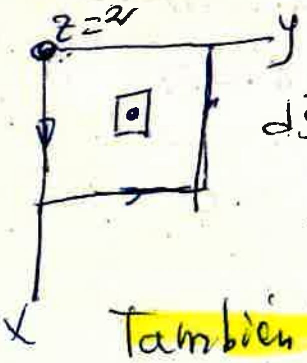
$C = \oint \vec{A}\cdot d\vec{e} = \oint \vec{A}\Big|_{z=0} \cdot (r\,d\phi\,\vec{u}_\phi)$

$L = 2\pi r$

$= \oint (x^2+y^2-0^2)\,\vec{k}\cdot\vec{u}_\phi\, r\,d\phi = 0$

$= \int \vec{B}\Big|_{z=0}\cdot dS\,\vec{k} = 0$

3/



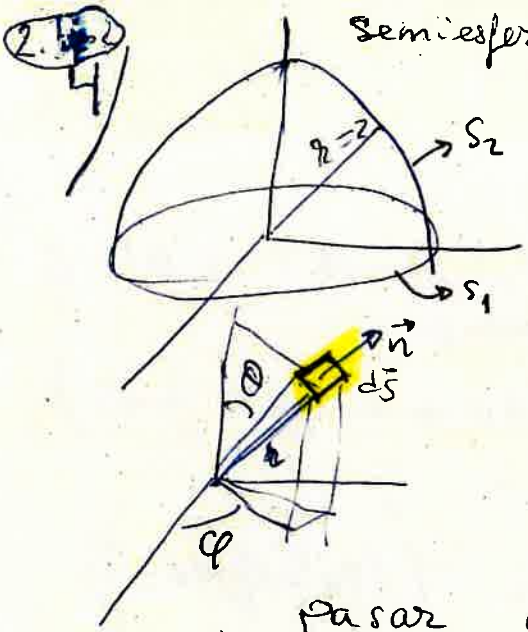
$d\vec{S} = dx\,dy\,\vec{k}$ $\quad \Phi = \int_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$

$= \int_0^2\int_0^2 (z\cos x)_{z=2}\,dx\,dy = 2\cdot 2\,\text{sen}\,2$

También $C = \int \nabla\times A\cdot d\vec{S} = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int B_z\,dS = \int_0^2 2\cos x\,dx \int_0^2 dy$

$= \oint \vec{A}\cdot d\vec{e}$ (circulación de $\vec{A}$, Stokes)

(2.2) 4/



Semiesfera: $\Phi = \int_{S_2} \vec{A}\cdot d\vec{S}$

$S_2 = \frac{1}{2} 4\pi r^2$

$d\vec{S} = r\,d\theta \; r\,\text{sen}\theta\, d\varphi \;\vec{u}$

$= r^2 d\varphi \; d\theta\, \text{sen}\theta \;\frac{\vec{r}}{r}$

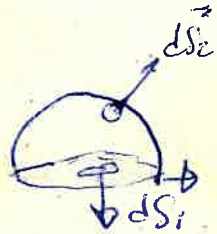
en $r = 2$ (ver en tablas)

$\vec{A}\cdot d\vec{S} = \dots$

pasar (x,y,z) a esféricas e integrar en $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$

es engorroso, ¡¡ mejor !:

$$\Phi = \int_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint_{S\ \text{cerrada}} \vec{A}\cdot d\vec{S} - \int_{\substack{\text{base}\\ S_1 = \pi r^2}} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1$$

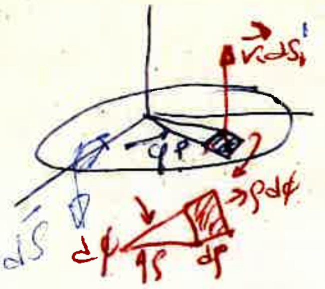


$$= \int_{\text{Volumen}} (\nabla\cdot\vec{A})\,dv - \int_{\text{en } z=0} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1$$

como $\nabla\cdot\vec{A} = 2z + 0 - 2z = 0$

$$\Phi = -\int_{z=0} \vec{A}\cdot d\vec{S}_1 \quad ; \quad A_z\big|_{z=0} = x^2+y^2-0 = \rho^2$$

$x^2+y^2 = \rho^2$



$d\vec{S}_1 = \rho\, d\varphi\, d\rho \;\vec{k}$ $\Rightarrow$

$$\Phi' = -\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2} (\rho^2 - 0^2)\,\vec{k}\cdot\vec{k}\;\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$\rho^2 = x^2+y^2 = r_\perp^2$

$$= -2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = -8\pi = -\Phi \Rightarrow \Phi = 8\pi$$

5/ Si piden flujo de $\nabla\times\vec{A}$ a través de semiesfera:

$$\Phi' = \int_{S=\frac{1}{2}4\pi r^2} \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}_2 = \oint_{S_1+S_2} \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} - \int \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}_1$$

$$= \int \nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})\,dv - \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}_1 = 0 - 0 = 0$$

de 2/

como se veía, pues $S = \frac{1}{2}4\pi r^2$ se apoya en $\gamma \rightarrow$ circunferencia de 2/

$\int \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}_2 = \oint \vec{A}\cdot d\vec{l}_2 = 0$

2.5

$$\begin{cases} \vec{a} = x^2 y\,\bar{i} + x^5\,\bar{j} + \frac{1}{x}\,\bar{k} \\ \vec{b} = 2xy\,\bar{i} + x^2\,\bar{j} \end{cases}$$

(Curvas abiertas)

Curvas 1) $y = 4x;\ z=0$ (recta) $A=(0,0,0) \longrightarrow (1,4,0)=B$

2) $y = 4x^2;\ z=0$ (parábola)

$$C_{a1} = \int_{A\,R_1}^{B} \vec{a}\cdot d\vec{e} = \int_{A\,R_1}^{B}\left(x^2 y\,dx + x^5\,dy + \frac{1}{x}\,dz\right)$$

$$= \int_{x=0}^{1}\left(x^2y\,dx + x^5\,4\,dx\right)_{y=4x} = \int_0^1 \left(4x^3 + x^5 4\right)dx = \frac{5}{3}$$

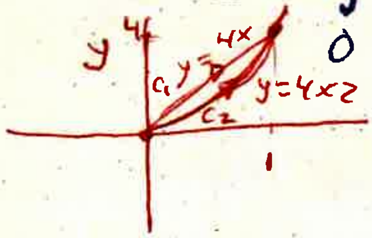
$$C_{a2} = \int_0^1 \left(x^2 y\,dx + x^5\,8x\,dx\right)_{y=4x^2} = \frac{68}{35}$$

(diferentes → $\bar{a}$ no es conservativo)

$$C_{b1} = \int_{A\,R_1}^{B}\left(2xy\,dx + x^2\,dy\right) =$$

$$= \int_0^1\left(2x\,dx\,4x + x^2\,4\,dx\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

$$C_{b2} = \int_0^1\left(2x\,4x^2\,dx + x^2\,8x\,dx\right) = 4$$



Comentario { (iguales, puede ser $\bar{b}$ conservativo, y de hecho lo es, pues $\nabla\times\bar{b} = 0$

por ejm. un potencial que daría $\bar{b}$ es

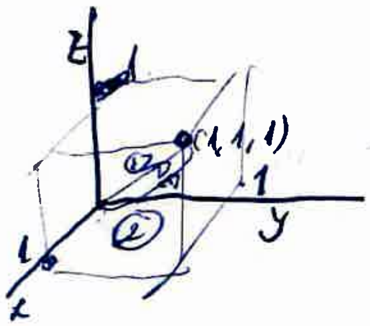
$T = x^2 y$

$\bar{b} = \nabla T = 2xy\,\bar{i} + x^2\,\bar{j}$

2.6/ Campo

$$\bar{C} = Ax\bar{i} + By^2\bar{j} + Cz\vec{K}$$

y/ Su integral de línea será



$$c = \int_{A\,R}^{B} \vec{C} \cdot d\bar{\ell} =$$

$$= \int_{(0,0,0),R}^{(1,1,1)} (Ax\bar{i} + By^2\bar{j} + Cz\bar{k}) \cdot (dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}) \qquad (1)$$

sobre la curva (recta) R_a, se tiene

$$R_a \begin{cases} y = x \\ z = x \end{cases} \Rightarrow dy = dx \quad , \quad dz = dx$$

luego

$$C_a = \int_0^P (Ax\,dx + B(x^2)dy + C(x)\,dz)$$

$$= \int_{x=0}^{1} (Ax + Bx^2 + Cx)\,dx = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2}$$

y para la curva R_b:

$$R_b \begin{cases} y = x^2 \Rightarrow dy = 2x\,dx \\ z = x^3 \Rightarrow dz = 3x^2\,dx \end{cases} \Rightarrow$$

$$C_b = \int_{x=0}^{1} \left[Ax\,dx + B(x^2)^2(2x\,dx) + Cx^3(3x^2dx)\right] =$$

$$= \frac{A}{2} + B\,2\,\frac{1^6}{6} + C\,3\,\frac{1^6}{6} = \frac{A}{2} + \frac{B}{3} + \frac{C}{2} = C_a$$

puede ser conservativo $\vec{C}$, de hecho, lo es: $\nabla \times \vec{C} = 0$

y además, volviendo a (1) se ve que la integral de línea es resoluble sin especificar la curva:

$$c = \int_0^P (Ax\,dx + By^2dy + Cz\,dz) = A\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{By^3}{3}\Big|_0^1 + C\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 = C_a$$

y $\vec{C} = \nabla\left(\frac{Ax^2}{2} + \frac{By^3}{3} + \frac{Cz^2}{2} + ct\right) = \nabla T \rightarrow$ T es un potencial escalar

2.6 bis Nota:

Una vez comprobado que $\vec{C}$ es conservativo, $\nabla\times\vec{C}=0$ puede obtenerse un T tal que $\vec{C}=\nabla T$ de la siguiente forma (general):

$$\vec{C} = Ax\,\vec{i} + By^2\,\vec{j} + Cz\,\vec{k} = \frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow$$

(1) $\frac{\partial T}{\partial x} = Ax \Rightarrow dT = Ax\,dx \Rightarrow T = \frac{Ax^2}{2} + f_1(z,y)$

donde $f_1(z,y)$ es una función de z e y, a determinar: $T \Rightarrow$

(2) $\frac{\partial T}{\partial y} = By^2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ax^2}{2} + f_1\right) = \frac{\partial f_1}{\partial y} \Rightarrow$

$df_1 = By^2\,dy \Rightarrow f_1 = \frac{By^3}{3} + f_2(z)$

y ahora se obtendrá $f_2(z)$ de igual modo:

(3) $\frac{\partial T}{\partial z} = Cz = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Ax^2}{2} + \frac{By^3}{3} + f_2(z)\right) = \frac{df_2}{dz} \Rightarrow$

$df_2 = Cz\,dz \Rightarrow f_2 = \frac{Cz^2}{2} + cte$

luego

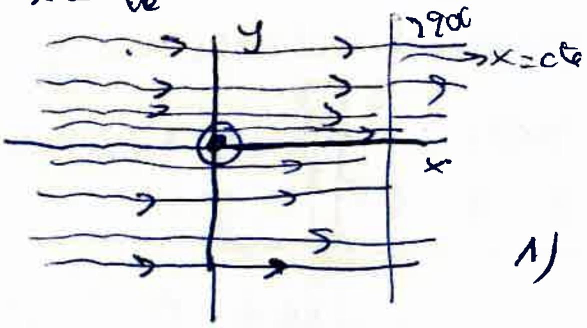
$$T = \frac{Ax^2}{2} + \frac{By^3}{3} + \frac{Cz^2}{2} + k$$

Sugerencia: Encontrar un T para el campo conservativo (verificarlo)

$$\vec{D} = \vec{i} + (1+z)\,\vec{j} + y\,\vec{k}$$

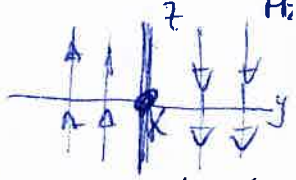
sol: $T = x + y(z+1) + cte$

2.7/ Campo vectorial $\bar{g} = Hy^2\,\bar{i} = g_x(y)\,\vec{i}$, es un campo por líneas de campo paralelas al eje OX y con intensidad de campo $|\bar{g}|$ creciente con y. Sus líneas son rectas perpendiculares a los planos de la forma $x=$ cte



Las líneas se representan más separadas con $|y|$ decreciento, pues $|\bar{g}|$ aumenta con $|y|$ (líneas juntas)

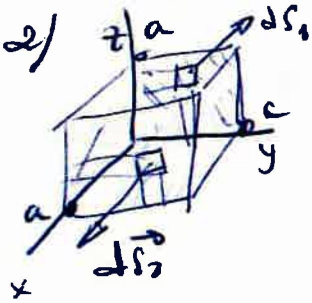
1) El campo tiene divergencia nula (solenoidad) pero su rotacional no es nulo:



$$\nabla\cdot\bar{g} = \frac{\partial Hy^2}{\partial x} = 0 \qquad (\nabla(\nabla\cdot g) = 0)$$

$$\nabla\times\bar{g} = \bar{i}\cdot 0 + \bar{j}\cdot 0 - \bar{k}\left(\frac{\partial g_x}{\partial y} - 0\right) = -2Hy\,\vec{k}$$

2)



Por cálculo directo: sólo hay flujo a través de las caras de superficie a·a en los planos $x=0$ y $x=a$, con elementos de superficie paralelos a $\vec{g}$ dados por

$$d\bar{S}_1 = dy\,dz(-\bar{i}) \text{ en } x=0$$
$$d\bar{S}_2 = dy\,dz\,\bar{i} \text{ en } x=a$$

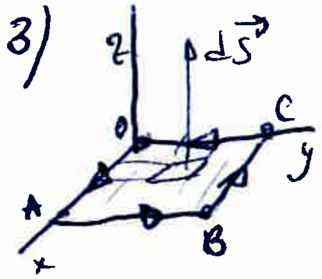
luego

$$\phi = \oint_{S=4a^2} \bar{g}\cdot d\bar{S} = \int_{y=0}^{a}\int_{z=0}^{a} Hy^2\,dy\,dz\,(-1) + \int_0^a\int_0^a Hy^2\,dy\,dz = 0$$

como cabía esperar, pues:

$$\oint \bar{g}\cdot d\bar{S} = \int_{v=a^3} \nabla\cdot g\,dv = 0\,(a^3) = 0$$

3)



La circulación es:

$$C = \oint \bar{g}\cdot d\vec{l} = \int_{0,\ y=0,z=0}^{A} \vec{g}\cdot(dx\,\bar{i}) + \int_{A,\ x=a,z=0}^{B} \bar{g}\cdot(dy\,\bar{j}) + \int_{B,\ y=a,z=0}^{C} \bar{g}\cdot(dx\,\bar{i})$$

$$+ \int_{C,\ z=0,x=0}^{0} \vec{g}\cdot(dy\,\bar{j}) = 0 + 0 + \int_{x=a,y=a} Hy^2\,dx + 0 = -H\,a^3$$

y por Stokes:

$$C \Rightarrow \oint \bar{g}\cdot d\bar{l} = \int_S \nabla\times\bar{g}\cdot d\vec{S} = \int_{y=0}^{a}\int_{x=0}^{a} (2Hy\,\vec{k})\cdot(dx\,dy\,\vec{k})\Big|_{\text{en } z=0} =$$

$$= -Ha^3$$

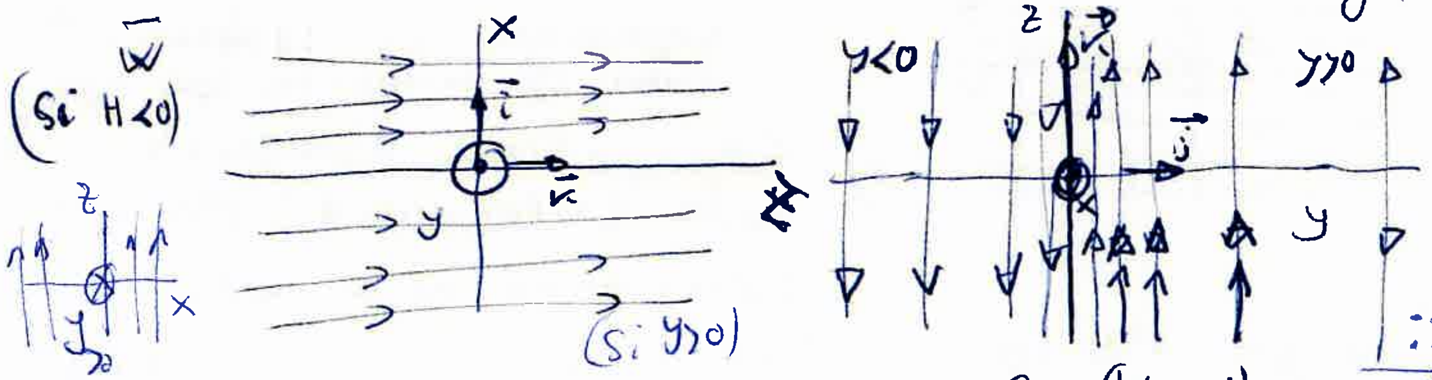
(Nota: elijo $\vec{S}$ como cuadrado de lado a en $z=0$) no es la única $\vec{S}$

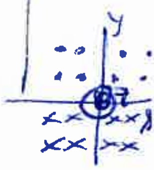
Se puede tomar como S las 5 caras restantes del cubo

2.7 bis Observad que

$$\bar{\omega} = \nabla \times \bar{g} = -2Hy\,\vec{k} \neq 0$$

sus líneas de campo son, en este caso, perpendiculares a $\bar{g}$:





y, además, $\bar{\omega}$ vuelve a ser un campo con rotacional:

$$\nabla \times \bar{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \vec{g}) = -2H\,\vec{i} \quad \text{(uniforme)}$$

se puede ver, que, con

$$\nabla^2 \bar{g} = \nabla^2 (Hy^2\,\vec{i}) = \vec{i}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}(Hy^2) = 2H\,\bar{i}$$

se verifica

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{g}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{g}) - \nabla^2 \vec{g}$$

2.8/ sean $\bar{A} = \bar{r}^2$ y $V = \frac{1}{r}$

Piden cálculos directos, que pueden hacerse expresando los campos en cartesianas o aplicando las fórmulas correspondientes a la simetría esférica.

a/ $\nabla r = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\bar{r}}{r} = \vec{e}_r$

$= \bar{u}_r \frac{\partial}{\partial r}(r) = \bar{u}_r = \vec{e}_r$

b/ $\nabla\cdot\bar{r} = \nabla\cdot(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}) = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3 =$

$= \nabla\cdot(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{compon. } r}}{r}\,\bar{u}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 (r)\right] = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^3 = \frac{3r^2}{r^2} = 3$

c/ $\nabla\frac{1}{r} = \bar{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

d/ $\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\cdot\left(\frac{\partial 1/r}{\partial r}\bar{e}_r\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial 1/r}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial 1}{\partial r} = 0$

Nota: $\nabla\cdot(\nabla T) = \nabla^2 T(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$

Nota: si $T \equiv C r^n$ con C y n constantes:

$\vec{E} = \nabla T = nCr^{n-1}\vec{e}_r = nCr^{n-1}\frac{\bar{r}}{r} = nCr^{n-2}\vec{r}$

$= (Cr^{n-1})\vec{e}_r$ y $\nabla\cdot\bar{E}$ es:

$\nabla\cdot(\nabla T) = C\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 r^{n-1}\right) = C(n+1)r^{n-2}$

observad que si $n=-1$, $T = \frac{1}{r} = V$, y $\underline{\underline{\nabla\cdot\bar{E}=0}}$

Pero, el flujo de $\bar{E} = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$ a través de una esfera de radio R es:

$\phi = \oint_{S=4\pi R^2} \bar{E}\cdot d\vec{S} = \int_{r=R}\left(-\frac{1}{r^2}\vec{u}_r\right)\cdot(\bar{u}_r\, dS) =$

$$= -\frac{1}{R^2}\int_S 1\,ds = -\frac{1}{R^2}4\pi R^2 = -1 \neq 0$$

sin embargo, si aplicáramos Gauss:

$$\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \int_{V=\frac{4\pi}{3}R^3} (\bar{\nabla}\cdot\bar{E})\,dv = \int 0\,dv = 0 \quad !!$$

¿por qué?

En general para $\vec{E} = \frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{K}{r^3}\bar{r}$ se tiene

S  $\oint_{S=4\pi R^2} \bar{E}\cdot d\bar{s} = K\,4\pi \neq 0$ pero $\nabla\cdot\bar{E} = 0$ (si $r \neq 0$).

2.9/ Es el mismo caso en simetría cilíndrica:

$\bar{A} = \vec{\rho} = x\bar{i} + y\bar{j}$ y $T = \rho = \sqrt{x^2+y^2}$ con

$$\bar{u}_\rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{x\bar{i}+y\bar{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho\cos\varphi\,\bar{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\bar{j}}{\rho} = \cos\varphi\,\bar{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\bar{j}$$

a) $\nabla\rho = \bar{u}_\rho \frac{\partial\rho}{\partial\rho} = \bar{u}_\rho = \frac{\bar{\rho}}{\rho}$

b) $\nabla\cdot\vec{\rho} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\,(\rho)\right] = \frac{2\rho}{\rho} = 2$

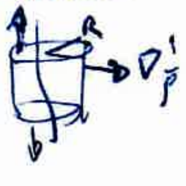
c) $\nabla\frac{1}{\rho} = \bar{u}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\bar{u}_\rho = -\frac{\vec{\rho}}{\rho^3}$, d) $\nabla\cdot\nabla\frac{1}{\rho} = 0$

NOTA: Si $T = K\rho^n$, como antes:

$\nabla(K\rho^n) = Kn\rho^{n-1}\vec{u}_\rho$ y $\nabla\cdot(\nabla T) = K(n+1)\rho^{n-1}$

que es cero si $n = -1$, luego:

$\nabla\cdot\left(K\frac{1}{\rho}\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right) = 0$ pero el flujo de $\frac{K}{\rho}\vec{u}_\rho$ a través de la superficie de un cilindro de radio R y altura H no es nulo:



$$\oint_S \left(\frac{K}{\rho}\bar{u}_\rho\right)\cdot d\bar{S}_{lateral} = \frac{K}{R}2\pi R H = 2\pi H K \neq 0$$

$$\neq \oint \nabla\cdot\left(\frac{K}{\rho}\bar{u}_\rho\right)\cdot d\bar{s} = \oint 0\,d\bar{s} = 0 \quad !!$$

PROBLEMAS DE EVALUACIÓN CONTINUA Y EXAMEN DE FÍSICA II

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio

1. TERMODINÁMICA Y OPERADORES DIFERENCIALES

CONTROLES

CONTROL 2010-2011

1.1) Si la entalpía de cierto gas ideal es H = 3nRT, se cumple:

1) $C_V = 2nR$

2) $C_p = 2nR$

3) $C_V = 4nR$

4) $C_p = 2nR$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 1)

1.2) Un mol de gas ideal puede evolucionar entre los estados 1 y 2 por dos procesos distintos, 1B2 y 1C2, como se indica en la figura. Puede asegurarse que:

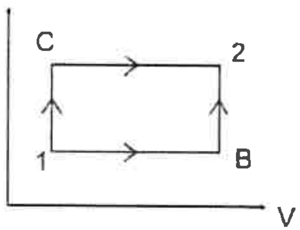
1) $Q_{1B2} > Q_{1C2}$

2) $Q_{1B2} < Q_{1C2}$

3) $W_{1B2} = W_{1C2}$

4) $W_{1B2} = -W_{1C2}$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.



Solución: 2)

1.3) El cilindro adiabático de la figura contiene n moles de Ar y n de He separados por un embolo en equilibrio mecánico. Se retira el embolo sin aporte de energía. Alcanzado el equilibrio, calcular el incremento de entropía del sistema.

Solución: $\Delta S = 2nR\ln 2$

1.4) Se comunica la misma cantidad de calor a un gas, en un caso en condiciones isobáricas y en otro en condiciones isocoras. Se cumple que:

1) El aumento de temperatura experimentado por el gas es mayor en el primer caso.

2) El aumento de temperatura es mayor en el segundo caso.

3) En ambos casos $\Delta S = 0$.

4) En ninguno de los dos casos el gas realiza trabajo.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 2)

TERMODINÁMICA y OPERADORES DIFERENCIALES

1.5) Un gas ideal describe un ciclo intercambiando calor entre dos focos térmicos a temperaturas máxima (T_{max}) y mínima (T_{min}). Se cumple que:

1) El rendimiento del ciclo es mayor que el que tendría una máquina de Carnot trabajando a las mismas temperaturas.

2) El rendimiento del ciclo es menor que el que tendría una máquina de Carnot trabajando a las mismas temperaturas.

3) El trabajo realizado en el ciclo debe ser mayor que el calor cedido.

4) El calor absorbido puede ser convertido íntegramente en trabajo.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 5)

1.6) En el cilindro adiabático (salvo en su base inferior) vertical de sección A de la figura hay n moles de He. El embolo de masa m puede deslizar sin rozamiento. Partiendo del equilibrio inicial a temperatura T_0 y aislada la base inferior con una camisa adiabática, se realizan los siguientes procesos: A) Se desplaza lentamente el émbolo hasta reducir el volumen de He a la mitad y se fija mediante topes. B) Se retira la camisa adiabática comunicando la base inferior del cilindro con un baño térmico a temperatura T_0 y tras alcanzar el equilibrio se retiran los topes y se espera a alcanzar el nuevo equilibrio. Se pide:

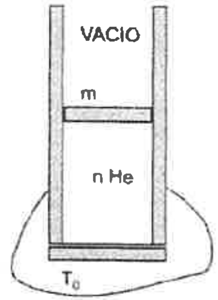
1) Calcular la altura inicial del émbolo.

2) El incremento total de entropía del He.

3) El trabajo intercambiado por el He durante el proceso A.

4) El trabajo intercambiado por el He durante el proceso B.

5) El calor intercambiado por el He durante el proceso B.



1) $nRT_0\ln(2)$

2) $-nRT_0\ln(2)$

3) $nRT_0/2$

4) $-nRT_0/2$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución:

1) $nRT_0/(mg)$

2) $\Delta S = 0$

3) $\frac{nRT_0}{\gamma - 1}(2^{\gamma-1} - 1)$

4) $-nRT_0/2$

5) 5)

1.7) En general, se verifica que:

1) En algunos procesos termodinámicos, el calor intercambiado sólo depende de los estados inicial y final.

2) Toda transformación isoterma de un sistema cerrado es tal que la variación de energía interna es nula.

3) La entropía de un sistema cualquiera sólo puede aumentar.

4) Todas las máquinas bitermas que funcionan entre los mismos focos tienen el mismo rendimiento.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 1)

1.8) El cilindro adiabático de la figura está dividido en dos cámaras de igual volumen V_0 mediante un tabique. La cámara izquierda contiene n moles de un gas ideal monoatómico a presión p_0 mientras que la cámara derecha está vacía. En el instante inicial se retira el tabique sin aporte de energía. Después de alcanzar el nuevo estado de equilibrio, se verifica:

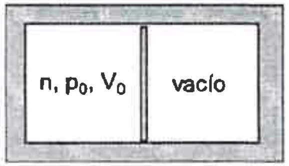
1) $\Delta S = \ln(2) nR/(\gamma - 1)$

2) $\Delta S = \ln(2) nR$

3) $\Delta H = (5/2)RT_0$

4) $\Delta U = (3/2)RT_0$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.



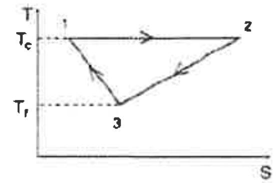
Solución: 1) 2)

1.9) Un cilindro de paredes adiabáticas en posición vertical contiene un gas ideal separado del entorno por un pistón sin rozamiento de área A y masa despreciable. La presión y la temperatura del entorno son p_0 y T_0, respectivamente. Inicialmente, el gas se encuentra en equilibrio con el entorno a la temperatura T_0 y el embolo se encuentra a una altura z_1 respecto a la base del cilindro. Se aplica sobre el pistón una fuerza F que tiende a comprimir el gas. Una vez alcanzado el equilibrio, calcular la altura del pistón z_2.

Solución: $z_2 = z_1 \left[p_0 / (p_0 + F/A) \right]^{\gamma - 1}$

CONTROL 2011-2012

1.10) El rendimiento del ciclo termodinámico de la figura (diagrama T-S) es:



Solución: $(1/2)\left[1 - T_f / T_c\right]$

1.11) En un sistema cerrado con n moles, se cumple:

1) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)_S = Vn$

2) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T$

3) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial S}\right)_p = -T$

4) $\left(\dfrac{\partial H}{\partial p}\right)_S = -V$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 2)

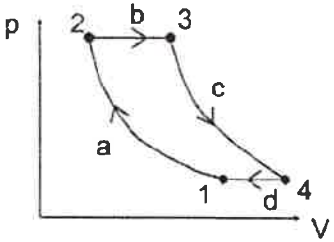
1.12) n moles de un gas ideal de constante γ evolucionan reversiblemente según un ciclo definido por los siguientes procesos:

a) compresión adiabática desde la presión p_1 a la presión p_2;

b) evolución isóbara a la presión p_2 hasta la temperatura T_3;

c) expansión adiabática desde la presión p_2 hasta p_1 y

d) evolución isóbara a la presión p_1 hasta el estado inicial definido por p_1 y T_1.



Si $r = p_2/p_1$, determinar:

1) el calor intercambiado en los procesos b y d.

2) el trabajo W intercambiado por el gas en los procesos a y c.

3) la entropía generada en el proceso b.

4) el rendimiento del ciclo.

5) el rendimiento de un ciclo de Carnot η_c que funciona entre 100ºC y 400ºC verifica:

1) $\eta_c < 0.45$
2) $\eta_c > 0.8$
3) $\eta_c = 0.55$
4) $0.45 < \eta_c < 0.80$
5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución:

1) $Q_{23} = \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_3 - T_1 r^{(\gamma-1)/\gamma})$; $\quad Q_{41} = \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_1 - T_3 r^{-(\gamma-1)/\gamma})$

2) $W_{12} = -\dfrac{nRT_1}{\gamma-1}(1 - r^{(\gamma-1)/\gamma})$; $\quad W_{34} = -\dfrac{nRT_1}{\gamma-1}(1 - r^{-(\gamma-1)/\gamma})$

3) $\Delta S_{23} = \dfrac{nR\gamma}{\gamma-1}\ln\dfrac{T_3}{T_1 r^{(\gamma-1)/\gamma}}$

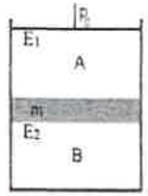
4) $\eta = 1 - r^{-(\gamma-1)/\gamma}$

5) 1)

CONTROL 2012-2013

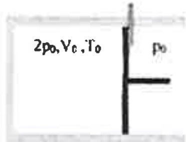
1.13) El cilindro adiabático de la figura de sección A tiene un émbolo adiabático E_1 de masa despreciable que desliza sin rozamiento por su interior. El cilindro está dividido en dos cavidades A y B por un émbolo diatérmico E_2 de masa m que desliza sin rozamiento. Las dos cavidades contienen igual número de moles del mismo gas ideal con $\gamma = 5/3$. Inicialmente, émbolos y gases se encuentran en equilibrio mecánico a la presión exterior p_0 y térmico a la temperatura T_0. Posteriormente se mueve lentamente el émbolo E_1 hasta que $p_{A,f} = 10p_0$ siendo $p_0 = mg/A$. La temperatura final de los gases es: (Considérese despreciable la capacidad calorífica del cilindro y los émbolos)

Solución: $T_f = T_0\,55^{(1/5)}$



1.14) Cierta cantidad de gas ideal de coeficiente γ se encuentra en un cilindro adiabático limitado por un émbolo también adiabático. Inicialmente, el gas se encuentra en las condiciones indicadas en la figura con el émbolo inmovilizado por un tope. En el instante t=0 se quita el tope y el émbolo puede deslizar sin rozamiento. Una vez alcanzado el equilibrio, la temperatura final del gas es:

Solución: $T_f = \dfrac{\gamma+1}{2\gamma}T_0$

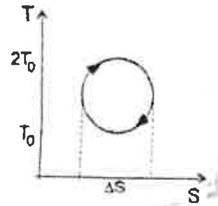


1.15) Se dispone de un fluido cuya entropía por mol viene dada por $s = 3R/2 \ln U + R \ln V + cte$. La presión p en el fluido es:

Solución: $p = \dfrac{2U}{3V}$

1.16) Un ciclo termodinámico puede representarse por un círculo en el diagrama de la figura. Su rendimiento η es:

Solución: $\eta = \dfrac{2\pi}{\pi+12}$



1.17) En una máquina que opera según el ciclo de Carnot, fijado el valor de ΔT, el mayor aumento del rendimiento puede obtenerse si:

A) Incrementamos la temperatura del foco caliente en ΔT.
B) Disminuimos la temperatura del foco frío en ΔT.
C) Incrementamos la temperatura del foco frío en ΔT.
D) Las opciones A y B producen el mismo resultado.
E) Ninguna de anteriores.

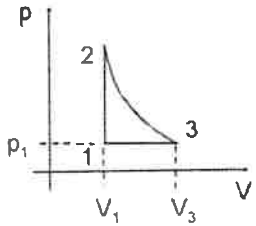
Solución: B)

1.18) Un gas perfecto de coeficiente adiabático γ que inicialmente se encuentra a una temperatura T_1 experimenta las siguientes transformaciones reversibles: Primeramente se comprime adiabáticamente desde 1 hasta 2 y después se expande a presión constante de 2 a 3. Conociendo las relaciones $V_1/V_2 = a$ y $V_2/V_3 = b$. Se pide calcular la temperatura en el estado 3.

Solución: $T_3 = T_1 a^{\gamma-1} b^{-1}$

1.19) En un motor térmico, n moles de un gas perfecto ($\gamma = 5/3$) efectúan cuasiestáticamente el ciclo 1-2-3 de la figura en sentido horario. La transformación 1-2 es isocora, la 2-3 es adiabática y la 3-1 es isobara. Las temperaturas en los vértices son T_1, $T_2 = 4\,T_1$ y $T_3 = 2\,T_1$. Calcular (sólo) el calor suministrado al motor por mol y dividido por la constante de gases *R*.

Solución: $Q_+ / nR = \frac{9}{2} T_1$



1.20) Para el enunciado del problema anterior calcular el rendimiento.

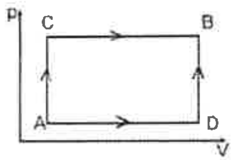
Solución: $\eta = \frac{4}{9}$

1.21) En un motor de Carnot el rendimiento es $\eta = 0.2$ y el calor absorbido del foco caliente $Q_c = 5$ kJ. El calor cedido al foco frío es:

Solución: $Q_f = -4\ kJ$

1.22) Cuando se lleva un sistema del estado A al estado B siguiendo la trayectoria ACB, se cede al sistema un calor neto $Q_{ACB} = 5$ kJ y éste hace un trabajo $W_{ACB} = -2$ kJ. Si se sigue la trayectoria ADB el sistema realiza un trabajo $W_{ADB} = -1$ kJ. El calor neto que intercambia en este último proceso es:

Solución: $Q_f = 4\ kJ$

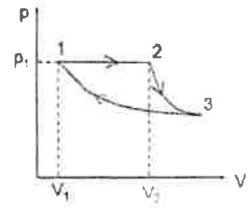


CONTROL 2013-2014

1.23) n moles de un gas perfecto de índice adiabático γ evolucionan, de forma reversible, según el siguiente ciclo:

1→2: expansión isobárica a la presión p_1, desde el volumen inicial V_1 hasta el volumen $V_2 = 2V_1$.
2→3: expansión adiabática.
3→1: compresión isotérmica volviendo al estado inicial (p_1, V_1).

Calcular el calor suministrado en el proceso 1→2 es:



Solución: $Q_{12} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 V_1$

1.24) Para el sistema de la cuestión anterior, calcular el trabajo realizado en el proceso 3→1.

Solución: $W_{31} = \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 V_1 \ln 2$

1.25) Para el sistema de la cuestión anterior, calcular la variación de entropía en el proceso 1→2 es, siendo R la constante de los gases.

Solución: $\Delta S_{12} = \frac{\gamma}{\gamma-1} nR \ln 2$

1.26) Un cilindro adiabático está dividido por un émbolo diatérmico de masa despreciable en dos compartimentos A y B que contienen un gas ideal de índice adiabático γ. El émbolo está inmovilizado mediante un tope y las condiciones del gas en cada compartimento son: $V_A = V_B = V_0$, $T_A = T_B = T_0$, $p_A = 2p_0$ y $p_B = p_0$. En un determinado instante se quita el tope y el émbolo se desplaza libremente y sin rozamiento hasta alcanzar el equilibrio. La variación de entropía del sistema ΔS es: (Considérese despreciable la capacidad calorífica del cilindro y del émbolo)

Solución: $\Delta S = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \frac{32}{27}$

1.27) Una sustancia incompresible cuya energía interna depende únicamente de la temperatura se somete a un proceso isotermo en el que disminuye la presión *p*. En este proceso, la entalpía de la sustancia:

A) Siempre aumenta.

B) Permanece constante.

C) Siempre disminuye.

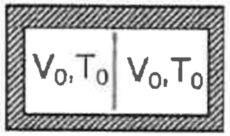
D) Disminuye respecto a la presión de forma proporcional a *p*.

E) Ninguna de las anteriores.

Solución: C)

1.28) Un recipiente de paredes adiabáticas se encuentra dividido en dos recintos iguales de volumen V_0 por un pistón diatérmico. En cada recinto hay n moles de gas perfecto de índice adiabático γ a temperatura T_0. Mediante un mecanismo se mueve muy lentamente el pistón comprimiendo uno de los recintos. Cuando el volumen de dicho recinto es $V_0/2$, la temperatura del sistema T es:

Solución: $T = T_0\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{(1-\gamma)}{2}}$



1.29) Un sistema cerrado realiza un proceso isóbaro reversible a presión p_0. Se puede asegurar que:

A) $\Delta H = Q$

B) $W = p_0 \Delta V$

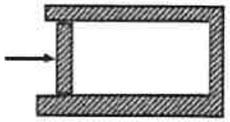
C) $\Delta U = Q$

D) $\Delta U = Q + p_0 \Delta V$

E) Ninguna de las anteriores.

Solución: A)

1.30) Se dispone de un gas ideal encerrado en un cilindro térmicamente aislado. Una de las paredes del cilindro es un émbolo adiabático (véase figura). Sus condiciones iniciales son: volumen V_0 y temperatura T_0. Se comprime lentamente el gas hasta que su volumen es $V_0/3$ y su temperatura $2T_0$. Calcular la capacidad calorífica molar a volumen constante c_V del gas.



Solución: $c_V = R \ln 3 / \ln 2$

1.31) La relación fundamental de un sistema es $S = cV^{1/4}U^{3/4}$, siendo c una constante. Se puede asegurar que:

A) $pV = U/3$

B) $S = \frac{2}{3}\frac{U}{T}$

C) $T = -\frac{4}{3c}\left(\frac{U}{V}\right)^{1/4}$

D) $T = \frac{4}{c}\left(\frac{U}{V}\right)^{3/4}$

E) Ninguna de las anteriores.

Solución: A)

1.32) La ecuación de estado de un gas es $U = a\,pV + b$, donde a y b son constantes. Cuando el gas evoluciona según un proceso adiabático reversible podemos afirmar que:

A) pV = cte

B) $pV^{(a+1)/a}$ = cte

C) $pV^{a/(a+1)}$ = cte

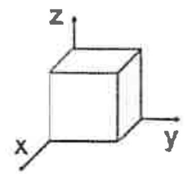
D) pV^{a} = cte

E) Ninguna de las anteriores.

Solución: B)

CONTROL 2010-2011

1.33) Calcular el flujo ϕ del campo $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + yx\vec{k}$ a través de las caras del cubo de la figura de lado 2.



$\nabla \times \vec{v} = 0$

$\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Solución: ϕ =0

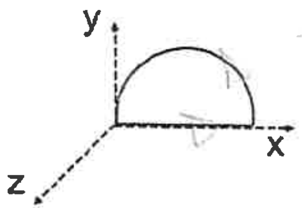
1.34) Calcular la circulación en sentido antihorario del vector $\vec{V} = \vec{k} \times \vec{r}$ a lo largo de un círculo de radio R situado en el plano z = 0.

Solución: $2\pi R^2$

$(\vec{k} \times \vec{r}) \cdot d\vec{l} =$

1.35) Calcular la integral de la línea del campo vectorial $\vec{w} = x^3\vec{i} + 2y\vec{j} + (z^2-1)\vec{k}$ a lo largo de la semicircunferencia de radio unidad de la figura.

$\nabla \times \vec{w} = 0$



Solución: 1/4

1.36) Para el campo vectorial $\vec{A} = \vec{r}$ se tiene:

1) $\nabla \cdot \vec{A} = 2$

2) $\nabla \times \vec{A} = \vec{r} / r^2$

3) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 1$

4) $\nabla |\vec{A}|^2 = 2\vec{A}$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 4)

1.37) Dado el campo $P = 1/r^n$, calcular su gradiente.

Solución: $-nr^{-n-1}\frac{\vec{r}}{r}$

1.38) Si $\vec{v}(x,y,z)$ es un campo vectorial tal que $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ se puede asegurar que:

1) $\nabla \times \vec{v} = 0$

2) $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$ si C es una curva cerrada.

3) $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ si S es una superficie abierta.

4) $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$ si S es una superficie cerrada.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 4)

1.39) Todo campo $\vec{v}(x,y,z)$ irrotacional cumple:

1) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$

2) $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = 0$ para cualquier superficie S.

3) Existe un campo escalar B tal que $\vec{A} = \nabla B$.

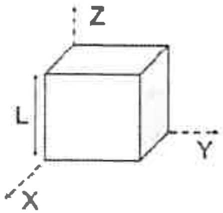
4) $\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} \neq 0$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 3)

CONTROL 2011-2012

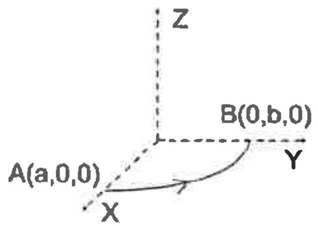
1.40) Calcular el flujo del campo $\vec{v} = 2y\vec{i} + 2x\vec{j} + 3z\vec{k}$ a través de la superficie del cubo de la figura, cuyas aristas son de longitud L.



$\nabla \cdot \vec{v} = 0$

Solución: $\phi = 3L^3$

1.41) Dado el campo vectorial $\vec{v} = x^2\vec{i} + 2zy\vec{j} + y^2\vec{k}$ y la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, contenida en el plano z = 0, calcular la integral de línea del campo a lo largo del cuarto de elipse que se extiende desde A hasta B.



$\nabla \times \vec{v} = 0$

Solución: $\Gamma = -\frac{1}{3}a^3$

1.42) Siendo $\vec{v}(\vec{r})$ un campo vectorial irrotacional o conservativo, se verifica que:

1) $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$ para algún camino cerrado.

2) $\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{l}$ depende del camino que conecta A y B.

3) $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$ en algún punto del espacio.

4) $\exists \quad U(\vec{r}) \mid \vec{v} = -\nabla U$.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 4)

CONTROL 2013-2014

1.43) Calcular la integral de línea del campo vectorial $\vec{W} = y^2\vec{i} + 2xy\vec{j} + az\vec{k}$, donde a es una constante, a lo largo de una línea arbitraria Γ desde el punto $(x_1,y_1,0)$ hasta el punto $(x_2,y_2,0)$. $C = \int_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{l}$.

Solución: $C = x_2y_2^2 - x_1y_1^2$

$V = xy^2 + az^2/2$ $\quad \nabla \times \vec{W} = 0$

1.44) Un campo vectorial $\vec{W}$ no nulo es tal que $\nabla \times \vec{W} = \lambda\vec{W}$, donde λ es una constante. Si S representa cualquier superficie regular abierta, de área A, cuyo contorno es una curva cerrada simple Γ, se verifica que:

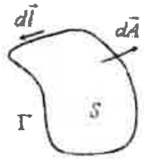
A) $\oint_\Gamma \nabla \times \vec{W} \cdot d\vec{l} = \lambda^2 \int_S \vec{W} \cdot d\vec{A}$

B) $\int_S \vec{W} \cdot d\vec{A} = 0$

C) $\oint_\Gamma \nabla \times \vec{W} \cdot d\vec{l} = 0$

D) $\oint_\Gamma (\nabla \times \vec{W}) \times d\vec{l} = \lambda^2 \int_S (\nabla \cdot \vec{W}) d\vec{A}$

E) Ninguna de las anteriores.



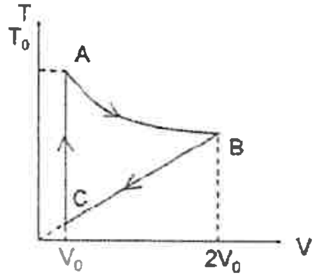
Solución: A)

EXÁMENES

PROBLEMA 1.1 (EXAMEN 2011-2012)

n moles de un gas ideal de constante γ evolucionan según el ciclo reversible de la figura en el plano (T,V). Inicialmente su temperatura es T_0 y ocupa un volumen inicial $V_A = V_0$ que aumenta mediante la expansión adiabática AB hasta $V_B = 2V_0$. La presión es constante a lo largo de BC y su temperatura aumenta en CA mientras se mantiene el volumen $V_C = V_0$ constante. En función de T_0 se pide:

1. Las temperaturas en B y C.
2. La variación de la energía interna en BC y CA.
3. El valor absoluto del trabajo en BC y CA.
4. El valor absoluto de los calores intercambiados en BC y CA.
5. El rendimiento del ciclo.



Solución

1. $T_B = T_0 2^{(1-\gamma)}$; $T_C = T_0 2^{-\gamma}$
2. $\Delta U_{BC} = -\dfrac{nRT_0}{\gamma-1}2^{-\gamma}$; $\Delta U_{CA} = \dfrac{nRT_0}{\gamma-1}(1-2^{-\gamma})$
3. $|W_{BC}| = nRT_0 2^{-\gamma}$; $|W_{CA}| = 0$
4. $|Q_{BC}| = \dfrac{nRT_0}{\gamma-1}\gamma 2^{-\gamma}$; $|Q_{CA}| = \dfrac{nRT_0}{\gamma-1}(1-2^{-\gamma})$
5. $\eta = 1-\gamma\dfrac{2^{-\gamma}}{1-2^{-\gamma}}$

PROBLEMA 1.2 (EXAMEN 2011-2012)

Se tienen n moles de un gas ideal monoatómico de constante adiabática $\gamma = 5/3$ que evolucionan según el ciclo reversible ABCDA mostrado en el diagrama (P,T) de la figura. En el estado A los valores de la temperatura y de la presión son $T_A = T_0$ y $P_A = P_0$. Entre A y B el gas evoluciona isobáricamente hasta alcanzar una temperatura $T_B = 3T_0$. Entre B y C la evolución es isotérmica. Entre C y D el gas evoluciona a volumen constante hasta alcanzar en D una presión $P_D = P_0/k$, siendo k una constante $k \geq 10$. El ciclo se cierra con un proceso adiabático que lleva de D a A. Respecto de este ciclo, se pide:

1) La temperatura en D.

2) La presión en C y el volumen en D (respecto del volumen V_A en el estado A).

3) Los valores absolutos de los trabajos en los procesos AB y BC.

4) Los valores absolutos de los trabajos en los procesos CD y DA.

5) La variación de entalpía en el proceso AB.

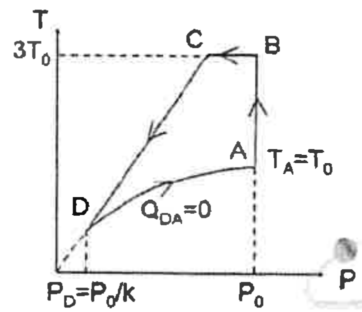
6) Los calores intercambiados en los procesos BC y CD.

7) La variación de entalpía en el ciclo.

8) La variación de la entropía en el proceso AB.

9) La variación de la entropía en los procesos BC y CD.

10) El rendimiento de un motor de Carnot operando entre las temperaturas T_A y T_C.



Solución

1) $T_D = k^{-2/5}T_0$

2) $P_C = 3k^{-3/5}P_0$; $V_D = k^{3/5}V_A$

3) $|W_{AB}| = 2nRT_0$; $|W_{BC}| = 3nRT_0 \ln(k^{3/5}/3)$

4) $|W_{CD}| = 0$; $|W_{DA}| = \frac{3}{2}nRT_0(1-k^{-2/5})$

5) $\Delta H_{AB} = 5nRT_0$

6) $Q_{BC} = 3nRT_0 \ln(k^{3/5}/3)$; $Q_{CD} = \frac{3}{2}nRT_0(k^{-2/5}-3)$

7) $\Delta H_{ciclo} = 0$

8) $\Delta S_{AB} = \frac{5}{2}nR\ln(3)$

9) $\Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} = \frac{5}{2}nR\ln(1/3)$

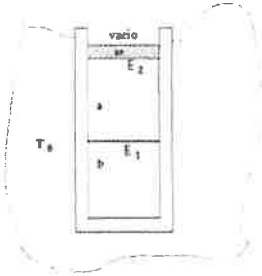
10) $\eta = \frac{2}{3}$

PROBLEMA 1.3 (EXAMEN 2012-2013)

Se tiene un cilindro diatérmico en contacto con un baño térmico a temperatura T_0. El cilindro se divide en dos recintos iguales (a y b) por un embolo diatérmico E1 de masa despreciable que puede deslizar sin rozamiento (ver figura). En cada recinto se tienen n moles de un gas ideal de coeficiente γ. La parte superior del cilindro se cierra mediante otro embolo E2 adiabático de masa m que también desliza sin rozamiento siendo la presión exterior despreciable. Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio mecánico y térmico. A continuación se realizan consecutivamente los dos procesos siguientes:

i) Se fija E2 y se eleva cuasiestáticamente E1 hasta reducir el volumen inicial V_0 del compartimento "a" hasta $V_0/2$.

j) Se fija E1, se aísla adiabáticamente el cilindro y se libera E2. El sistema evoluciona no estáticamente hasta alcanzar el equilibrio.



Determinar:

1) El calor Q_i que recibe el sistema del baño térmico durante el proceso i.

2) El incremento de entropía del gas contenido en el recinto b durante el proceso i, ΔS_i^b.

3) La temperatura final del sistema en el proceso j, T_j.

4) El volumen total del sistema al finalizar el proceso j, V_j.

Solución

1) $Q_i = nRT_0 \ln\frac{3}{4}$

2) $\Delta S_a^b = nR\ln\frac{3}{2}$

3) $T_b = \frac{\gamma+3}{2(\gamma+1)}T_0$

4) $V_j = \frac{2(\gamma+2)-1}{(\gamma+1)}V_i$