Tema II : Mecánica Hamiltoniana

I.2.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton.

Como en Termodinámica, pueden aplicarse transformaciones de Legendre para tener funciones con variables independientes distintas:

Ejm. F es transformada de Legendre de la energía interna U:

$$dU = TdS - PdV, \quad \text{sea} \quad F = U - PV \Rightarrow dF = -PdV - SdT$$

Análogamente, puede definirse otra función H con otras variables independientes distintas las de la Lagrangiana: (ver pág. 15)

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p,t) \quad , \qquad H(q,p,t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t) \qquad (94)$$

Diferenciando H(q,p,t) se obtendrán 2f ecuaciones diferenciales de primer grado:

$$dH = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j dp_j - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

es decir

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_j} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_j}, \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad , \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Equivalentemente, puede pasarse de H a L:

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \Rightarrow \quad p_j = p_j(q,\dot{q},t),$$

$$L(q,\dot{q},t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - H(q,p,t)$$

Ecuaciones de Hamilton. Deducción

La forma más conveniente es por medio del momento canónico

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = \dot{q}(q, p, t), \quad \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} \neq 0 \right)$$

y la función de Hamilton o Hamiltoniana que se define

$$H(q, p, t) = \left(\dot{q}p - L \right)\Big|_{\dot{q}(q,p,t)} \equiv E(q, \dot{q}, t)\Big|_{\dot{q}(q,p,t)}$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \dot{q}dp + \cancel{p d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) dq - \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial t} \right) dt = 0,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{dp}{dt},$$

Ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{cases}$$

q, p Variables canónicas

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t},$$

Ecuaciones de Hamilton. Notación y comentarios. (pág. 22)

Nota:Las 2n ecuaciones pueden derivarse del Principio variacional de Hamilton (modificado) sin imponer que p(t) esté fijo en los instantes finales. (ver pág.23)

(II.1.3 Principio de Hamilton modificado)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt \quad \text{con} \quad q\left(t_1\right) \text{ y } q\left(t_2\right) \text{ fijados:}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(p \bullet \dot{q} - H(q,p,t)\right) dt \equiv -\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\bullet\delta q\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)\bullet\delta p\,dt + \left(p\bullet\delta q\right)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\right)\bullet\delta q\,dt = 0 \Rightarrow \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} \end{array} \right.$$

Se pueden escribir en notación matricial o simpléctica **(II. 1)**:

$$\eta = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d\eta}{dt} = \mathbf{J}\cdot\frac{\partial H}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\bullet\frac{\partial H}{\partial \eta}$$

$$\mathbf{J}^2 = -1,\quad \mathbf{J}^T\cdot\mathbf{J} = 1,\ (\mathbf{J}^{\mathrm{T}} = \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}\ )$$

Para evaluar ***la derivada temporal*** de una función *u(q,p,t)* a lo largo de las soluciones del sistema hamiltoniano, en el espacio de fases asociado, conviene formalizar cálculos con el **Corchete de Poisson.**

II.1.1 Constantes del movimiento. Corchete de Poisson

$$\frac{du}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

El corchete de Poisson de dos funciones *u*, *v* se define:

$$[u,v]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i}\right)$$

$$[u,v]_{\eta} = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \mathbf{J} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Entonces:

$$\frac{du}{dt} = [u,H]_{q,p} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Los **corchetes fundamentales** son:

$[q_j, q_k] = [p_j, p_k] = 0$;

$[q_j, p_k] = -[p_k, q_j] = \delta_{jk}$

Y las ecuaciones de Hamilton quedan:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = [\,q_i, H\,] \\ \dot{p}_i = [\,p_i, H\,] \end{cases} \qquad o\ bien \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mathbf{J}\cdot\frac{\partial H}{\partial \eta} \equiv [\,\eta\,, H\,]$$

Propiedades (*corchete nulo,, antisimetría, linealidad, producto e Identidad de Jacobi*):

a) $[u,u]=0\,.$

b) $[u,v]=-[v,u]\,.$

c) $[a\,u+b\,v,w]=a\,[u,w]+b\,[v,w]\;, \quad a, b$ constantes.

d) $[u\,v,w]=[u,w]v+u\,[v,w]$

e) $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0\;.$ (*identidad de Jacobi*)

Aplicado a H , y si u(p,q,t) es una constante del movimiento:

Si u y v son dos constantes de movimiento ¿lo será [u,v]? SÍ

$$[H,u] = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad y\ de\ [\,H, v] = \frac{\partial v}{\partial t} \qquad\qquad \frac{d}{dt}[\,u, v] = 0$$

Esta propiedad es un caso particular del llamado ***Teorema de los Corchetes de Poisson***, que establece: (Sólo ver, no se aplicará)

Si $\eta\,(t,\eta\,(t_0))$ da la evolución de un sistema en el espacio de fases, tal evolución corresponde a un sistema hamiltoniano si , y solo si, para todo par de funciones dinámicas *u(q,p,t), v(q,p,t)* de verifica:

$$\frac{d}{dt}[u,v] = [\dot{u},v] + [u,\dot{v}]$$

En particular: la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea hamiltoniano es que para todo par de variables canónicas del espacio de fase se satisfaga

$$\frac{d}{dt}[\eta_\alpha,\eta_\beta] = 0 = [\dot{\eta}_\alpha,\eta_\beta] + [\eta_\alpha,\dot{\eta}_\beta]$$

Demostración: la condición *necesaria*, suponer existe H(q,p,t), evaluar la derivada temporal de [u,v] y aplicar la identidad de Jacobi de los corchetes:

$$\frac{d}{dt}[u,v] = [[u,v],H] + \frac{\partial}{\partial t}[u,v] = -[[v,H],u] - [[H,u],v] +$$

$$[\frac{\partial u}{\partial t},v] + [u,\frac{\partial v}{\partial t}]$$

Para la condición suficiente, dado que

$$\frac{d}{dt}[\eta_\alpha, \eta_\beta] = 0 \text{ para todo par de variables canónicas,}$$

Considerando un sistema general, *d(q,p)/dt=(f,g)* basta evaluar las derivadas de los corchetes fundamentales asumiendo ahora que se cumple la condición del teorema:

$$\frac{d}{dt}[q_i, q_j] = 0 = [\dot{q}_i, q_j] + [q_i, \dot{q}_j] = -\frac{\partial f_i}{\partial p_j} + \frac{\partial f_j}{\partial p_i}$$

$$\frac{d}{dt}[p_i, p_j] = 0 = [\dot{p}_i, p_j] + [p_i, \dot{p}_j] = \frac{\partial g_i}{\partial q_j} - \frac{\partial g_j}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}[q_i, p_j] = 0 = [\dot{q}_i, p_j] + [q_i, \dot{p}_j] = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} + \frac{\partial g_j}{\partial p_i}$$

Con lo que ha de darse que tanto las componentes de f como de g deriven de una sola función escalar H, tal que se dé la condición de integrabilidad (identidad de derivadas cruzadas)

$$f_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Dando las ecuaciones de Hamilton con

$$g_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\eta_\alpha = J_{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \eta_\beta} = F_\alpha(\eta, t) \quad o$$

$$\frac{d}{dt}(q, p) = (f, g) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) \text{ (notación vectorial)}$$

Transformaciones canónicas. (pág. 24)

La transformación de punto *Q=Q(q,t)* en el espacio de configuración es un caso particular de transformaciones más generales (de contraste o contacto) en el espacio de fases *Q=Q(q,p,t)* , *P=P(q,p,t)* permitidas en la formulación de Hamilton.

Ejm. de transformación ***local*** : Problema 17

$H(q,p,t)$. Si se introduce un conjunto nuevo de coordenadas generalizadas Q, tal que $Q_i = Q_i(q,t)$ que los nuevos momentos conjugados están dados por

$$P_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j(Q,t)}{\partial Q_i},$$

y que la nueva hamiltoniana asociada a las nuevas variables canónicas es

$$H' = H - \sum_i p_i \frac{\partial q_i(Q,t)}{\partial t} \quad .$$

La Lagrangiana es invariante en una transformación puntual, es decir

$$\sum_i p_i dq_i - Hdt = \sum_j P_j dQ_j - H' dt \,, \qquad (*)$$

además

$$dq_i = \sum_j \frac{\partial q_i(Q,t)}{\partial Q_j} dQ_j + \frac{\partial q_i(Q,t)}{\partial t} dt \quad ,$$

y sustituyendo en (*)

$$\sum_i \sum_j p_i \frac{\partial q_i(Q,t)}{\partial Q_j} dQ_j + \sum_i p_i \frac{\partial q_i(Q,t)}{\partial t} dt - Hdt = \sum_i P_j dQ_j - H' dt \,,$$

e igualando los coeficientes de dQ_j y dt, queda demostrado.

En general, el sistema transformado **no** conservará la forma canónica con un hamiltoniano nuevo H', si esto se da

<u>**con INDEPENDENCIA del H inicial**</u>, la transformación se dice <u>**canónica**</u>.

las nuevas variables P y Q conserven la forma canónica, es decir

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}\ , \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}\ , \qquad (\,i = 1, 2, \ldots, n)$$

Hamilton modificado. En las variables canónicas p y q

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum p_i \, dq_i - H\, dt \right) = 0\ ,$$

y en las variables canónicas P y Q de

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum P_i \, dQ_i - H'\, dt \right) = 0\ ,$$

Pero en general, debe cumplirse:

$$\sum\ p_i\, dq_i - H\, dt = \sum\ P_i\, dQ_i - H'\, dt + dF$$

o

$$p_i dq_i - Hdt = P_i dQ_i - H' dt + dF(q, p, Q, P, t) \text{ (suma en índices rep.)}$$

La función **generatriz** *F* puede elegirse atendiendo a las variables que se deseen como independientes, pues en general la relación anterior vuelve a ecuaciones diferenciales para *F*.

Se aconseja tomar las dependencias para F en

1) (q,Q) que daría explícitamente p y P
2) (q,P) que daría explícitamente p y Q
3) (p,Q) que daría explícitamente q y P
4) (p, P) que daría explícitamente q y Q.

Pero siempre se da que $pdq-Pdq=dF$ es una diferencial exacta

Para el caso 1) se supone F=F(q,Q,t), q y Q se toman como independientes, así:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\ , \qquad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\ , \qquad H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

De las que se obtienen *Q=Q(q,p,t)* primero, luego *P(q,Q(q,p,t),t)* y finalmente el nuevo hamiltoniano.

Los otros casos de funciones generatrices básicas están en pág. 24-25 y son transformadas de Legendre de F1. (ver Goldstein por ejemplo)

O el enfoque siguiente visto en GRADO por el prof. Sanz:

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

• En la **Dinámica Lagrangiana** se tiene la libertad de escoger cualquier sistema de coordenadas generalizadas. Si *q* es un conjunto de coordenadas, cualquier transformación puntual reversible $Q=Q(q,t)$ nos proporciona otro conjunto de coordenadas *Q* con Lagrangiana

$$L'(Q,\dot{Q},t)=L(q,\dot{q},t)\big|_{q=q(Q,t)}\,.$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{Q}}-\frac{\partial L'}{\partial Q}=0,$$

•Una libertad similar existe también en la **Dinámica Hamiltoniana.**

➢Consideremos en primer lugar una transformación (**independiente del tiempo**) de las variables canónicas antiguas (*q,p*) a las nuevas variables (*Q,P*), de la forma

$$Q=Q(q,p), \qquad P=P(q,p), \qquad \text{(independiente del tiempo)}$$

Imponemos que la transformación **retenga la froma general de las ecuaciones de Hamilton** (T. canónica):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

en las nuevas variables canónicas

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q},$$

con la nueva Hamiltoniana *H'(Q,P,t)*, dada por

$$H'(Q,P,t) = H(q(Q,P)\ ,\ p(Q,P)\ ,\ t)\ ,$$

• T^{a}: La transformación es canónica si y solo si,

$$\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = [Q,P] = cte. = 1$$

el corchete de Poisson, [*u,v*], de dos funciones *u(q,p,t)* and *v(q,p,t)* de las variables canónicas

$$[u,v] = \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial v}{\partial q},$$

- **Demostración:** $Q = Q(q,p), \quad P = P(q,p),$

$$\dot{Q} = \frac{\partial Q}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial Q}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q},$$

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial P}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q},$$

$$H'(Q,P,t) = H(q(Q,P)\,,\; p(Q,P)\,,\; t)\;,$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial H'}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial H'}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial H'}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial H'}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p},$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}[Q,P], \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}[Q,P], \quad \Rightarrow \quad [Q,P] = 1\,.$$

¡Y solo si!

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}[Q,P] \equiv \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q}[Q,P] \equiv -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial Q \partial P} = \frac{\partial^2 K}{\partial P \partial Q}, \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{\partial H'}{\partial P}[Q,P]\right) = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial H'}{\partial Q}[Q,P]\right), \Rightarrow$$

$$\frac{\partial H'}{\partial P}\frac{\partial [Q,P]}{\partial Q} = \frac{\partial H'}{\partial Q}\frac{\partial [Q,P]}{\partial P}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial [Q,P]}{\partial Q} = \frac{\partial [Q,P]}{\partial P} = 0,$$

• Función generatriz de una transformación canónica

La propiedad de transformación canónica $[Q,P]=\dfrac{\partial Q}{\partial q}\dfrac{\partial P}{\partial p}-\dfrac{\partial Q}{\partial p}\dfrac{\partial P}{\partial q}=1,$

es equivalente a que $pdq-PdQ$ sea una diferencial exacta:

$$pdq-PdQ=pdq-P\left(\frac{\partial Q}{\partial q}dq+\frac{\partial Q}{\partial p}dp\right)=\left(p-P\frac{\partial Q}{\partial q}\right)dq-P\frac{\partial Q}{\partial p}dp,$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\partial}{\partial p}\left(p-P\frac{\partial Q}{\partial q}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(-P\frac{\partial Q}{\partial p}\right)\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p}-\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q}\equiv[Q,P]=1,$$

$pdq-PdQ=dF,\qquad F=$ función generatriz de la transformación

- **Tipos de funciones generatriz**: $pdq - PdQ = dF,$

a) Tipo 1: $F = F_1(q,Q), \quad pdq - PdQ = \frac{\partial F_1}{\partial q}dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ,$

$$p = \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q} \quad \Rightarrow \quad q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

b) Tipo 2: $F = F_2(q,P) - QP, \; pdq - PdQ = \frac{\partial F_2}{\partial q}dq + \frac{\partial F_2}{\partial P}dP - QdP - PdQ,$

$$p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P}, \quad \Rightarrow \quad q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

c) Tipo 3: $F = F_3(Q,p) - qp, \quad pdq - PdQ = \frac{\partial F_3}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F_3}{\partial p}dp - qdp - pdq,$

$$q = -\frac{\partial F_3(Q,p)}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3(Q,p)}{\partial Q}, \quad \Rightarrow \quad q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

d) Tipo 4: $F = F_4(p,P) + qp - QP,$

$$pdq - PdQ = \frac{\partial F_4}{\partial p}dp + \frac{\partial F_4}{\partial P}dP + qdp + pdq - QdP - PdQ,$$

$$q = -\frac{\partial F_4(p,P)}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4(p,P)}{\partial P}, \quad \Rightarrow \quad q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

➢ Generalización

•La transformación $Q = Q(q, p, t),\ P = P(q, p, t),$ es canónica si y solo si:

$$[Q, P] = 1.$$

En las nuevas variables las ecuaciones de Hamilton toman la forma:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q},$$

Donde la nueva Hamiltoniana *H'* se obtiene a partir de la función generatriz, para los tipos 1,2,3 y 4.

$$H' = \left.\left(H + \frac{\partial F_\mu}{\partial t} \right)\right|_{(q,p)->(Q,P)}, \quad \mu = 1,2,3,4.$$

Demostración

- Principio de Hamilton modificado: $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H) dt = 0,$

  - Se toma el nuevo funcional con integrando: $\Phi(q, p, \dot{q}, \dot{p}, t) \equiv p\dot{q} - H(q, p, t),$
  - La primera variación de la acción para el nuevo funcional con los extremos fijados para ambos, *q* y *p,* tiene como extremales las soluciones de las ecuaciones de Hamilton (**Principio Variacional**).
  - Al integrando del nuevo funcional se le puede sumar la diferencial (*dF*) de una función arbitraria sin afectar al principio variacional.
  - Para una transformación que sea canónica el principio variacional se escribirá en la forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P\dot{Q} - H') dt = 0, \quad \Rightarrow \quad p dq - H dt = P dQ - H' dt + dF$$

  - Tomando:

$$F = F_1(q, Q, t), \quad F = F_2(q, P, t) - QP, \quad F = F_3(Q, p, t) + qp, \quad F = F_4(p, P, t) + qp - QP,$$

$$\Rightarrow \quad H' = \left(H + \frac{\partial F_\mu}{\partial t} \right) \Bigg|_{(q,p) -> (Q,P)}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4.$$

GENERALIZACIÓN A *n* GRADOS DE LIBERTAD

➢Ecuaciones canónicas de Hamilton

Sea $L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)$

$$\begin{cases} p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \\ j = 1,\ldots,n \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t), \qquad \left(\det\left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right] \neq 0 \right)$$

La función de Hamilton (*H*) o Hamiltoniana se define:

$$H(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n,t) = \left(\sum_j \dot{q}_j p_j - L \right)\Bigg|_{\dot{q}(q,p,t)} \equiv E(q,\dot{q},t)\Big|_{\dot{q}(q,p,t)}$$

Se deduce (ver pag. 15 de Mecánica Analítica):

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j}, \\ \dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j}, \end{cases} \quad j = 1,\ldots,n.$$

Además: $\left.\dfrac{\partial H}{\partial t}\right|_{q,p} = -\left.\dfrac{\partial L}{\partial t}\right|_{q,\dot{q}}$.

Se comprueba que: $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$.

- Si $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = const.$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS:

Sea un sistema con Hamiltoniana $H(q,p,t)$, y las correspondientes ecuaciones canónicas

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

- La transformación de variables $Q_j = Q_j(q,p,t), \quad P_j = P_j(q,p,t),$ se dice que **es canónica si las ecuaciones del movimiento** en las nuevas variables se pueden escribir de **la forma**

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}, \quad j = 1,\ldots,n,$$

  para cierta función $H'(Q,P,t)$.

- **Teorema:** Una transformación es canónica si y solo si los corchetes de Poisson de las funciones Q_j, P_j verifican:

$$\left[Q_j, Q_k\right] = 0, \quad \left[P_j, P_k\right] = 0, \quad \left[Q_j, P_k\right] = \delta_{jk}.$$

- Cuando la **transformación canónica es independiente del tiempo**, la nueva Hamiltoniana es $H'(Q,P,t) = H(q,p,t)\big|_{(q,p)\to(Q,P)}$.

- El corchete de Poisson de dos funciones u, v, de las variable cánonicas y del tiempo, es independiente de las variables **canónicas utilizadas:**

$$\sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_j} - \frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial Q_j} \right) = [u,v].$$

Función generatriz de una transformación canónica

- La aplicación del Principio de Hamilton ante una transformación canónica nos lleva a:

$$\sum_j p_j dq_j - Hdt = \sum_j P_j dQ_j - H' dt + dF.$$

Un cálculo análogo al efectuado para un grado de libertad nos conduce a los siguientes cuatro tipos básicos de función generatriz:

a) Tipo 1: $F = F_1(q,Q,t), \quad p_j = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_j}, \quad P_j = -\dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_j}$

b) Tipo 2: $F = F_2(q,P,t) - \sum_j Q_j P_j, \quad p_j = \dfrac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_j}, \quad Q_j = \dfrac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_j},$

c) Tipo 3: $F = F_3(Q,p,t) - \sum_j q_j p_j, \quad q_j = -\dfrac{\partial F_3(Q,p,t)}{\partial p_j}, \quad P_j = -\dfrac{\partial F_3(Q,p,t)}{\partial Q_j},$

d) Tipo 4: $F = F_4(p,P,t) + \sum_j (q_j p_j - Q_j P_j), \quad q_j = -\dfrac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_j}, \quad Q_j = \dfrac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_j},$

$$\Rightarrow \quad H' = \left(H + \frac{\partial F_\mu}{\partial t} \right)\Bigg|_{(q,p)->(Q,P)}, \quad \mu = 1,2,3,4.$$

Función Generatriz F	Derivadas de F	*Caso trivial para F=0*
$F_1(q,Q,t)$	$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = \sum_i q_i Q_i \to Q_i = p_i$, $P_i = -q_i$
$F_2(q,P,t)$	$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = \sum_i q_i P_i \to Q_i = q_i$, $P_i = p_i$
$F_3(p,Q,t)$	$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = \sum_i p_i Q_i \to Q_i = -q_i, P_i = -p_i$
$F_4(p,P,t)$	$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = \sum_i p_i P_i \to Q_i = p_i$, $P_i = -q_i$

Nota: probar que una transformación local , probl. 17, puede obtenerse de F=f(q)P
¿sólo de este tipo?

De Goldstein:

TABLE 9.1 Properties of the Four Basic Canonical Transformations

Generating Function	Generating Function Derivatives		Trivial Special Case		
$F = F_1(q, Q, t)$	$p_i = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_i}$	$P_i = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$F_1 = q_i Q_i,$	$Q_i = p_i,$	$P_i = -q_i$
$F = F_2(q, P, t) - Q_i P_i$	$p_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$F_2 = q_i P_i,$	$Q_i = q_i,$	$P_i = p_i$
$F = F_3(p, Q, t) + q_i p_i$	$q_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_i}$	$P_i = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$F_3 = p_i Q_i,$	$Q_i = -q_i,$	$P_i = -p_i$
$F = F_4(p, P, t) + q_i p_i - Q_i P_i$	$q_i = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_i}$	$Q_i = \dfrac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$F_4 = p_i P_i,$	$Q_i = p_i,$	$P_i = -q_i$

Forma simpléctica de las transformaciones canónicas (TC). Como

$$[u,v]_\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^T \cdot \mathrm{J} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} \Leftrightarrow [u,v]_\eta = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_\alpha}\right) \cdot \mathrm{J}_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta_\beta} \quad en\,(7)$$

Tomando un cambio de variables (reducido) $\xi = \xi(\eta)$

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathrm{M}\cdot\dot{\eta} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{J}\cdot\frac{\partial H}{\partial \eta} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{J}\cdot\mathrm{M}^{\mathrm{T}}\cdot\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

donde $M_{ij} = \dfrac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j}$ para que sea canónica: $\xi = \xi(\eta)$

$$\mathrm{M}\cdot\mathrm{J}\cdot\mathrm{M}^{\mathrm{T}} = \mathrm{J} = \mathrm{M}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{J}\cdot\mathrm{M} \Rightarrow \det(\mathrm{M})=1.$$

Para dos variables dinámicas, y con el cambio se ve que

el CORCHETE de Poisson es INVARIANTE ante transformaciones canónicas (es condición necesaria y suficiente, también para transformaciones dependientes de *t, de contacto*) $\xi = \xi(\eta, t)$

(conserva volumen en espacio de fases ver II.1.3. Y II2.2.3)

En particular, los corchetes elementales son invariantes en TC y para un grado de libertad [Q,P]=1.

Ejm. Oscilador armónico. Problema 60

$$H(q,p,t)=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}\omega(t)^2q^2 \qquad (q,p)\to(\phi,I)$$

$$q=\sqrt{\frac{2I}{\omega(t)}}\operatorname{sen}\phi\,, \qquad p=\sqrt{2I\omega(t)}\cos\phi$$

a)

$$M=\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2I}{\omega(t)}}\cos\phi & \frac{1}{\sqrt{2I\omega(t)}}\operatorname{sen}\phi \\ -\sqrt{2I\omega(t)}\operatorname{sen}\phi & \sqrt{\frac{\omega(t)}{2I}}\cos\phi \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \quad M\cdot J\cdot M^T=J$$

b)

$$\begin{cases} W=\int p\,dq=\int\sqrt{2I\omega}\cos\phi\,dq=\int\sqrt{2I\omega}\sqrt{\frac{2I}{\omega}}\cos^2\phi\,d\phi=I(\phi+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\phi) \\ \phi=\operatorname{arcsen}\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2I}}\right)\,, \end{cases}$$

c)

$$H'=H+\frac{\partial W(q,I,t)}{\partial t}=I\omega(t)+\frac{I\operatorname{sen}2\phi}{2\omega}\frac{d\omega}{dt}$$

Teoría de Hamilton-Jacobi

¿Existe una transformación canónica tal que H´=0? SÍ.

El problema dinámico de

2N ecuaciones diferenciales con t como variable independiente, PASA a **otro** con una ecuación diferencial en parciales para **UNA función S (variable dependiente)** y **N+1 variables independientes**, las q y t.

Partiendo de

$$H'(Q,P,t) = 0 = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \text{daría}$$

$$\dot{Q}_k = 0 \text{ y } \dot{P}_k = 0$$

$$\text{(las Q y las P serían constantes, sus valores en cierto } t_0\text{)}$$

Tomando una Función generatriz del tipo 2, en (q,P,t)

$$S = F_2(q,P,t) = F_2(q_1,...,q_N,P_1,....,P_N,t)$$

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} \;\; y \;\; Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$$

Sustituyendo los argumentos *p* de *H* por su expresión en *S(q,P,t)* se obtiene una ecuación en derivadas parciales para función de Hamilton *S* , función que ahora depende de las N variables *q* y de *t*

$$H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \quad ;$$

$$S = S(q_1,...,q_N,P_1,....,P_N,t), \text{ las } P_j \text{ son constantes.}$$

Ecuación de primer orden para S para la que existen N+1 constantes de integración (las *q(to)* y *t=to*). Se ve que **S es la INTEGRAL DE ACCIÓN (pág.28).**

ecuaciones canónicas en las nuevas variables son $\dot{Q}_i = 0$, $\dot{P}_i = 0$

$$P_i = \alpha_i = cte., \quad Q_i = \beta_i = cte., \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

Finalmente, del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \ , \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} ,$$

obtenemos las coordenadas q y los ímpetus p

Si ***H no depende del tiempo****, puede ponerse:* $S = W(q) - Et$,

se obtiene así la ecuación de Hamilton-Jacobi con la *acción reducida* $W(q)$ en la forma

$$H(\frac{\partial W}{\partial q},q) = E \ ,$$

La **resolución** del problema se deja en manos de la **función generatriz y de la transformación canónica en cuestión**.

La elección de las constantes asociadas a las *P* es libre para cada problema, la flexibilidad en la elección de las N constantes (requiere habilidad) permite dar la solución; las constantes se ajustarán *a posteriori* con las condiciones iniciales

Como la derivada de *S* respecto a *t* es:

$$\frac{dS(q,P,t)}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial S}{\partial P_k}\dot{P}_k + \frac{\partial S}{\partial t} = \dot{q}_k p_k + 0 - H = L \Rightarrow$$

$$S = \int_{t_0}^{t} L(q(\tau),\dot{q}(\tau),\tau)\,d\tau \qquad \text{es la integral de acción.}$$

Para *H* independiente de *t* la función generatriz puede descomponerse como

$$S = W(q,P) - E\,t$$

Es un caso particular de **separación de variables**, pues *E* y *t* son funciones canónicas conjugadas (como p y q). Ver Secc. II3.3.

$$H(q, \partial W / \partial q) = E \qquad \text{(ecu. de hamilton para la acción reducida)}$$

¿Qué ocurre ***si interpretamos en este caso la propia W como una generatriz*** tipo F2?

$$W(q,P) = F_2(q,P) \Rightarrow \quad H' = E \neq 0$$

Ahora podemos **interpretar** la propia *E* ***como una*** *de las variables P, la número 1, por ejemplo.*

$$H' = E = P_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_1 = 1 \Rightarrow \quad Q_1 = t + cte. \quad y$$

$$\dot{Q}_k = 0 \quad (k = 2,3,\ldots,N)$$

Y todas las P son constantes (las *Q* son cíclicas):

$$\dot{P}_k = 0 \Rightarrow \ P_k = P_{0k}(cte.) = \alpha_k \quad con \quad P_1 = E$$

$$Q_k = \beta_k \ , k = 2,3,\ldots$$

$$P_k = \alpha_k \quad , \ \alpha_1 = E$$

Y se tienen

$$\frac{\partial W(q,E,\alpha_2\ldots\alpha_N)}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (i = 2,3,\ldots)$$

Ejm. De clase. Partícula libre bajo los dos enfoques, caso particular de:

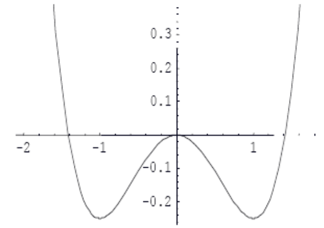
Separación de Variables.II.3.3 Sistemas separables.

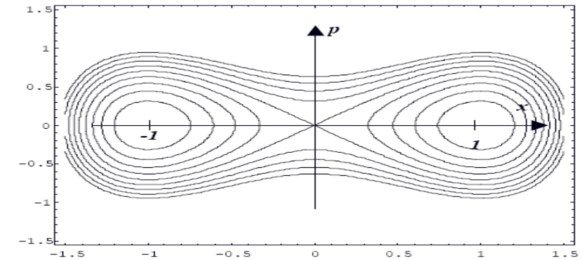
Si existe al menos un conjunto de variables generalizadas que dan para el sistema particular un hamiltoniano del tipo: (pág.30)

$$H(q,p) = \sum_{k=1}^{n} H_k(q_k, p_k) \Rightarrow \ H_k(q_k, \frac{\partial W_k}{\partial q_k}) = \alpha_k \quad (\text{N ecuaciones unidimensionales})$$

El problema puede ser de variables separables para unas coordenadas generalizadas y no para otras. A veces hay que manipular la forma de escribir H. VER Ejm. Problema de Kepler pag. 30 y 31

Diagramas de fases
(en sistemas hamiltonianos)



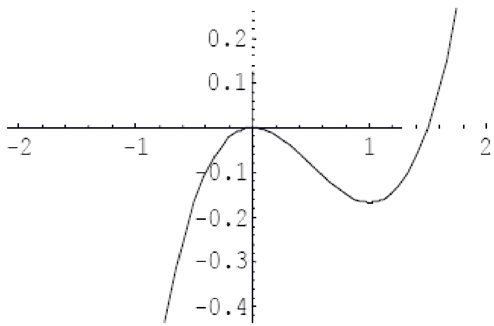


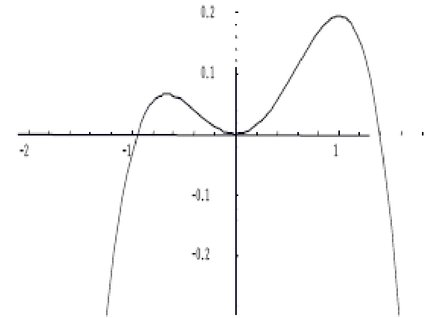
23)

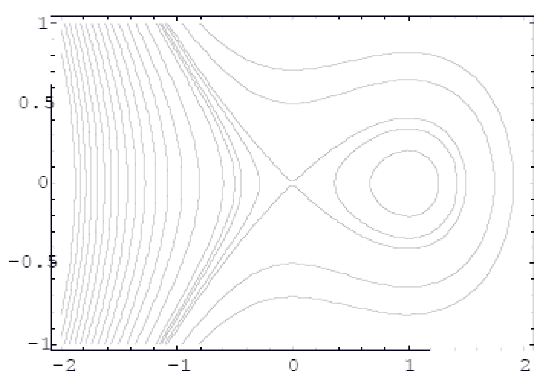
Dado el oscilador de Duffing, en el que $H = \dfrac{1}{2}p^2 - (\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}x^4)$

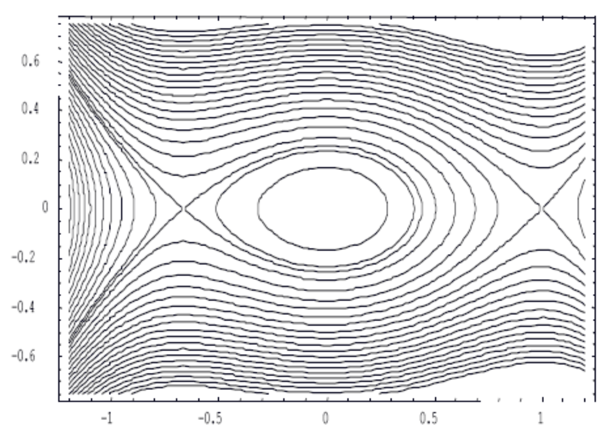
$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2}x^4) = E \;.\quad U(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2}x^4)\;,\quad \frac{\partial U}{\partial x} = -x + x^3 = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -1 + 3x^2$$

32)









Variables Acción-Ángulo (II.3.3) 1)

<u>Caso de un grado de libertad.</u>

Supongamos un sistema hamiltoniano de un grado de libertad con *p* y *q* funciones periódicas en *t* . Busquemos una transformación canónica tal que el hamiltoniano nuevo sea *H(I)* $(q,p)\rightarrow(\varphi,I)\equiv(Q,P)$

La variable *I* será una constante del movimiento y las ecuaciones serán:

$$\dot{P}=\dot{I}=-\frac{\partial H}{\partial\varphi}=0 \quad y \quad \dot{Q}=\dot{\varphi}=\frac{\partial H}{\partial I}=\omega(I) \ \ una\ cte.$$

Entonces $\varphi=\varphi_0+\omega t=\omega(t-t_0)$

buscando función generatriz tipo 1, $F_1(q,Q=\varphi)=W'(q,\varphi)$

$$dW'=pdq-Id\varphi \quad (diferencial\ \ exacta)$$

Tal función existe , y es periódica en la variable angular (al suponer periódicas *p* y *q*) puede definirse la variable de acción <u>I</u> **(tiene unidades de *H t* -energía por tiempo- como la integral de acción)**

$$\oint dW'=0=\oint pdq-I\int_0^{2\pi}d\varphi \quad\Rightarrow\quad I=\frac{1}{2\pi}\oint pdq$$

Como ejemplo de aplicación de las variables *acción-ángulo* consideremos el problema del oscilador armónico

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega_0^2 q^2) = \text{cte.} = \alpha \equiv E\,, \qquad I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = \frac{Area}{2\pi} = \frac{\pi \times \sqrt{2E} \times \sqrt{2E}}{2\pi\omega_0} = \frac{E}{\omega_0}\,,$$

$$H(I) = \omega_0 I\,, \qquad \frac{dI}{dt} = 0\,, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} \equiv \omega_0\,, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0 \qquad ,$$

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \omega_0^2 q^2\right) = I\omega_0\,, \qquad W(q,I) = \int \sqrt{2\omega_0 I - \omega_0^2 q^2}\;\; dq\,,$$

$$p = \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2\omega_0 I - \omega_0^2 q^2}\,, \qquad \varphi = \frac{\partial W}{\partial I} = \omega_0 \int \frac{dq}{\sqrt{2\omega_0 I - \omega_0^2 q^2}} = \arcsen\left(q\sqrt{\frac{\omega_0}{2I}}\right) \quad ,$$

es decir

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega_0}}\,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad , \qquad p = \sqrt{2I\omega_0}\,\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,.$$

Extensión a sistemas de n grados de libertad (II.3.4)

Es posible la representación acción-ángulo para ***sistemas finitos (acotados)*** y que sean de **variables separables** en al menos un conjunto de variables generalizadas.

$$De\ \ W=\sum_{i=1}^{n} W_i(q_i;\ \alpha_1,\ \ldots\ ,\alpha_n)\ se\ pasa\ a\ \rightarrow\ W=\sum_{i=1}^{n} W_i(q_i;\ I_1,\ \ldots\ ,I_n)$$

con las α obtenidas despejándolas de $I_i(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi}\oint p_i dq_i$

$$p_i=\frac{\partial W}{\partial q_i}=\frac{\partial W_i}{\partial q_i} \qquad y \qquad \varphi_i=\frac{\partial W}{\partial I_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W_j(q_j;\ I_1,\ \ldots\ ,I_n)}{\partial I_i}$$

Y de las ecuaciones del movimiento para el nuevo *H'=H(I)* se tienen:

$$I_i = cte.\ , \qquad \varphi_i=\omega_i t+\varphi_{i0}\ , \qquad (90)$$

En cada par *(qi,pi)* pueden darse los casos de libración (caso univaluado) o de rotación (*qi* multivaluada). La variación de la i-ésima variable-ángulo con respecto a una qj, dejando las demás constantes es:

$$\Delta_j\varphi_i=\oint\frac{\partial p_j}{\partial I_i}dq_j=\frac{\partial}{\partial I_i}\oint p_j dq_j=\frac{\partial}{\partial I_i}2\pi I_j=2\pi\,\delta_{ij}$$

Independiente de las demás, luego la variable-ángulo es monótona y tras un m ciclos varía

$$\Delta\ \varphi_i=2\pi\ m_i$$

Pero ***no se asegura*** *la T-periodicidad del sistema ni en el caso de que todas las (q,p) sean periódicas y cada una con periodo Ti.*

Razonando como en el caso de un grado de libertad, se definirían *q'i* variables. Las nuevas *q*' (o bien *q, p* ó una *F(q,p)* cualquiera) admiten desarrollo en series de Fourier

$$q_j = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = -\infty}^{+\infty} a_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \exp\{ i \, (j_1 \varphi_1 + \cdots + j_n \varphi_n)\} =$$

$$\sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = -\infty}^{+\infty} b_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \exp\{ i(j_1 \omega_1 + \cdots + j_n \omega_n) t\}$$

El sistema será periódico bajo ciertas condiciones, no basta que lo sea en cada variable: periódico sólo si las frecuencias **son conmensurables**,

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{k_i}{k_j} \quad \textit{con los } k \textit{ enteros} \text{ para todo par } i, j \text{ (frecuencias conmensurables)}$$

En este caso hay n-1 relaciones (de resonancia) entre vectores de enteros k y frecuencias del tipo

$$\vec{k} \cdot \vec{\omega} \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i \omega_i = 0$$

y el movimiento es periódico (órbita cerrada en espacio de fases) y el sistema se dice **completamente degenerado** (pág. 35) y si no hay ninguna relación como la anterior, se dice sistema ***n* veces multiperiódico.** Puede haber sistemas com *m* relaciones de resonancia (*m* veces degenerado) y (*n*-*m*) veces multiperiódico.

Teorema de Liouville de la integrabilidad (II.3.4)

Si de un sistema de n grados de libertad con hamiltoniana *H(q,p)* se conocen n constantes del movimiento *F1, F2,...,Fn* **independientes y en involución** mutua (*[Fi,Fj]=0*) entonces el sistema queda resuelto con n cuadraturas.

De las n relaciones $F_j(q,p) = \alpha_j \Rightarrow g_j \equiv p_j - f_j(q,\alpha) = 0$ y

$$\left[g_k, g_j\right] = \frac{\partial f_j}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j} = 0, \text{ las g en involucion, y}$$

$$dW(q,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} p_k dq_k \equiv \sum_{k=1}^{n} f_k(q,\alpha)\, dq_k \text{ es una diferencial exacta}$$

La función *W* puede tomarse como función de Jacobi al ser integral de la ecuación de Hamilton-Jacobi, resolviendo el problema:

$$H(q_1,\ldots,q_n,f_1,\ldots,f_n) = \alpha_1 \Rightarrow H' \equiv H = \alpha_1 = P_1$$

$$y$$

$$Q_1 = t + \beta_1 = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial \alpha_1} \;\; y \;\; Q_j = \beta_j = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial \alpha_j}, j = 2,\ldots,n$$

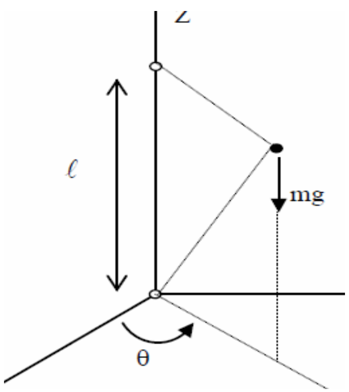
Ejm. Problema 29. (Ver problemas de, Hamilton-Jacobi, del 19 al 25 y 28)

29)

Una partícula de peso mg está sometida a la acción de dos muelles iguales, de constante elástica k y longitud natural despreciable, cuyos extremos están sujetos a dos puntos fijos del eje Z vertical a distancia ℓ. Se pide, usando las *coordenadas cilíndricas* de la partícula:

a) La lagrangiana y la hamiltoniana de la partícula.

b) Determinar tres constantes del movimiento independientes y comprobar que están en involución, cumpliéndose entonces los requisitos del *teorema de Liouville* sobre la integrabilidad de un sistema



$$H(r,z,\theta,p_r,p_\theta,p_z)=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+p_z^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+mg\,z+\frac{1}{2}k(r^2+z^2)+\frac{1}{2}k(r^2+(\ell-z)^2)$$

Tres constantes del movimiento funcionalmente independientes son

$$F_1=H\,,\qquad F_2=p_\theta\,,\qquad F_3=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)+k\,r^2\ .$$

$$\left[F_2,F_3\right]=-\frac{\partial F_2}{\partial p_\theta}\frac{\partial F_3}{\partial \theta}\equiv 0$$

En este caso existe la función W (pues H es de variables separables) que depende de tres constantes de separación que son las F anteriores y que pueden tomarse como los momentos generalizados nuevos P.

$$W\left(r,\theta,z,\alpha_1=F_1,\alpha_2=F_2,\alpha_3=F_3\right)=\alpha_2\theta+R\left(r\right)+Z\left(z\right)$$

$$\Rightarrow\ H'=\alpha_1\,,\quad Q_1=t+\beta_1\,,Q_2=\beta_2=\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}\quad \ldots$$

Problema 54.

$$L(q,\dot q,t)=\frac{1}{2}e^{\lambda t}(\dot q^2-q^2)$$

$x=q\,e^{\lambda t/2}$, $y=p\,e^{-\lambda t/2}$, es canónico

a)

$$p=\frac{\partial L}{\partial \dot q}=e^{\lambda t}\dot q,\quad \rightarrow \quad \dot q=e^{-\lambda t}p.\quad \Rightarrow \quad H(q,p,t)=p\,\dot q-L\equiv\frac{1}{2}(e^{-\lambda t}p^2+e^{\lambda t}q^2)$$

b)

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial p}\\ \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial p}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial p}\\ \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial p}\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$F=F_2(q,y)-x\,y,\quad \rightarrow \quad p=y\,e^{\lambda t/2}=\frac{\partial F_2}{\partial q},\quad x=q\,e^{\lambda t/2}=\frac{\partial F_2}{\partial y},\qquad \Rightarrow \quad F_2(q,y)=q\,y\,e^{\lambda t/2}$$

c)

$$H'=H+\frac{\partial F_2(q,y,t)}{\partial t}=H+\frac{\lambda}{2}q\,y\,e^{\lambda t/2}\equiv\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{\lambda}{2}x\,y$$

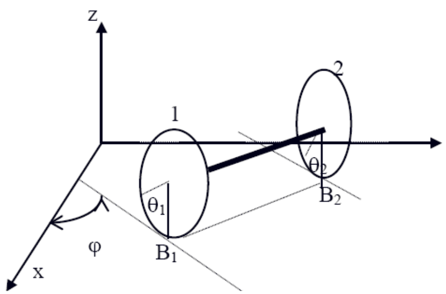
Pero la F no es única, puede ser también la F3 básica.

$$F_3(p,Q=x,t)=-pQ\exp(-\lambda t/2)$$

Problema 18: usar $\nabla_R\left|\vec R\right|^k=k\,\vec R\,\left|\vec R\right|^{k-2}$

12)

Dos ruedas iguales radio R se montan en los extremos de un eje común de longitud b



$$\overline{v}_{B1}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\dot{x}_1-R\dot{\theta}_1\cos\varphi=0\\ \dot{y}_1-R\dot{\theta}_1\,sen\,\varphi=0\end{cases} \quad , \qquad (1)$$

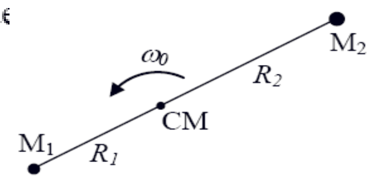
$$\overline{v}_{B2}=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(x_1-b\,sen\,\varphi)-R\dot{\theta}_2\cos\varphi=0\\ \dfrac{d}{dt}(y_1+b\cos\varphi)-R\dot{\theta}_2\,sen\,\varphi=0\end{cases}$$

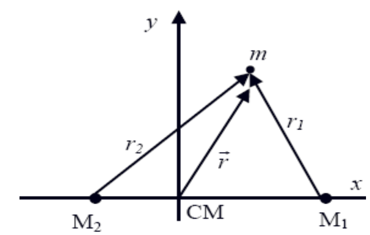
Ecuaciones:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{x}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=\mu_1\,,\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{y}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial y_1}=\mu_2\,,\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\theta_1}=-\mu_1R\cos\varphi-\mu_2R\,\mathrm{sen}\,\varphi\,,\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=0\,,\\ \dot{x}_1-R\dot{\theta}_1\cos\varphi=0\,, \qquad \dot{y}_1-R\dot{\theta}_1\,\mathrm{sen}\,\varphi=0\end{cases}$$

13)

En el problema restringido, circular y plano de los tres cue





$$M_1\omega_0^2R_1=\frac{GM_1M_2}{(R_1+R_2)^2}=M_2\omega_0^2R_2\,;$$

$$\mu\equiv\frac{M_2}{M_1};\quad R_1=\mu R_2;\quad \omega_0^2=\frac{GM_1}{R_2^3(1+\mu)^2};$$

a)

$$L=\frac{1}{2}mv^2+m\overline{v}\cdot(\overline{\omega}\wedge\overline{r})+\frac{1}{2}m(\overline{\omega}\wedge\overline{r})^2+Gm\left(\frac{M_1}{r_1}+\frac{M_2}{r_2}\right)$$

b)

$$\frac{\partial L}{\partial t}\equiv 0 \;\Rightarrow\; \sum\frac{\partial L}{\partial\overline{v}}\cdot\overline{v}-L=cte\,,\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m(\overline{\omega}\wedge\overline{r})^2-Gm\left(\frac{M_1}{r_1}+\frac{M_2}{r_2}\right)=cte\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=m\overline{v}+m(\overline{\omega}\wedge\overline{r}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial\overline{r}}=\nabla\left[m\vec{v}\cdot(\vec{\omega}\wedge\vec{r})+\frac{1}{2}m(\overline{\omega}\wedge\overline{r})^2+Gm\left(\frac{M_1}{r_1}+\frac{M_2}{r_2}\right)\right]$$