MECÁNICA ANALÍTICA (Docencia Reducida)

Profesor: José Manuel Donoso

Dto. Física Aplicada.

Material: Apuntes ETSIA de la asignatura (Prof. Javier Sanz)

Calificación: Examen Final (convocatoria oficial según ordenación)
Dos problemas (10+10) sin libros ni apuntes

Opción de *test teórico* a mediados de cuatrimestre

También pueden verse ejemplos y algunos temas de los guiones de Mecánica Analítica de Grado de Sanz:
http://www.aero.upm.es/departamentos/fisica/PagWeb/asignaturas/MecanicaAnalitica/MecAnalitica.html

1

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS AERONÁUTICOS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

MECÁNICA ANALÍTICA 2012-13-Plan2000

- **Introducción a la Mecánica Lagrangiana**.
  - Ecuaciones de Lagrange. Antecedentes: Simetrías y Teoremas de Conservación. Principios variacionales..
    - Sistemas holónomos; y no-holónomos. Ecuaciones de Lagrange. Potenciales generalizados; fuerzas. Sistemas lagrangianos. Constantes del movimiento
- **Introducción a la Mecánica Hamiltoniana**:
  - Ecuaciones de Hamilton; constantes del movimiento. Transformaciones canónicas.
  - Teoría de Hamilton-Jacobi. Sistemas integrables. Variables acción-ángulo.
- **Sistemas dinámicos**:
  - Equilibrio de un sistema dinámico. Linealización de un sistema dinámico. Ampliación del concepto de equilibrio; Noción de caos clásico.
  - Resonancia paramétrica. Oscilaciones anarmónicas de un grado de libertad.
- **Oscilaciones de N grados de libertad**:
  - Oscilaciones próximas a la posición de equilibrio. Linealización y modos normales de oscilación. Oscilaciones en torno al movimiento estacionario.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA RECOMENDADA

Goldstein, H., *Mecánica Clásica*. Barcelona 1994. EDITORIAL REVERTE.
Arnold, V.I., *Mecánica Clásica*. Madrid 1983. Paraninfo.
Calkin, M.G, *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*. 1996. World Scientific.
Hand, L. Y Finch J., *Analytical Mechanics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1998.
Landau, L.D. y Lifshitz, E.M., *Mecánica*. Barcelona 1970. EDITORIAL REVERTE.

Notas:

Se dispondrá de una clase de ***DOCENCIA REDUCIDA*** , los miércoles lectivos del primer semestre, de 15:30 a 17:00 en el **aula 14** del edificio ETSIA (repaso de teoría, problemas y posibilidad de controles opcionalmente válidos para calificación final).

Como material se usarán los "Apuntes de Mecánica Analítica" (J. Sanz, Publicaciones ETSIA) y el dispensado en las clases de docencia reducida.

Se realizarán los *exámenes finales* según Ordenación Académica del curso 2012-13 para las dos convocatorias oficiales del curso.

Tutorías (Primer semestre):

Martes de 15:30 a 18:30 y Miércoles de 10:30 a 13:30 .

Introducción

- Mecánica de Newton. Leyes de conservación.

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{a}$$

$\vec{F} = 0$, entonces, $\vec{p}$ es una constante de movimiento

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

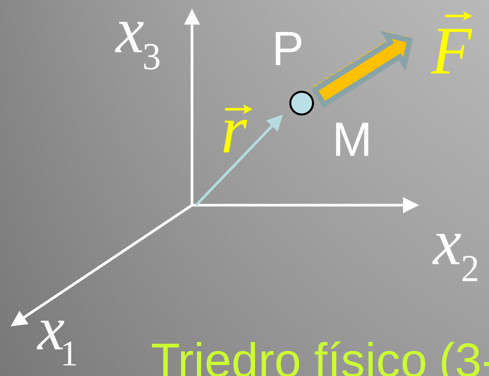
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \,.$$

- Conservación del momento cinético.
- Conservación de la energía mecánica (fuerzas conservativas) $W_{12} = -\int_1^2 \vec{\nabla} V \, d\vec{s}$ $\quad T_1 + V_2 = T_2 + V_2$
- ¿Qué tienen en común?

3

Introducción a las ecuaciones de Lagrange

Ecuaciones de Lagrange para una particula (cartesianas)



Triedro físico (3-D)

$$\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3 \quad ,$$

$$\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \quad .$$

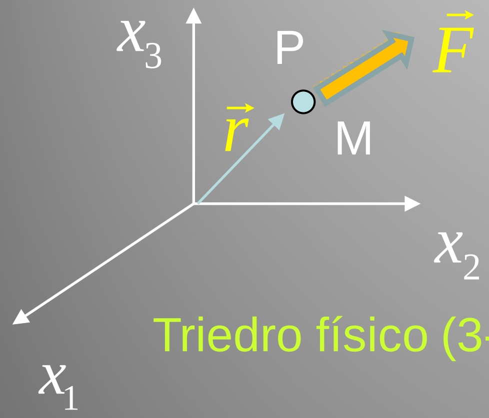
$$\boxed{M\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.} \qquad \begin{cases} M\,\ddot{x}_i = F_i\ , \\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$T = \tfrac{1}{2} M\,\vec{v}^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} \tfrac{1}{2} M\,\dot{x}_i^2\ , \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \equiv M\,\ddot{x}_i\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = F_i\ , \qquad i = 1, 2, 3. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = F_i, \qquad i = 1, 2, 3.}$$

Ecuaciones de Lagrange

Ecuaciones de Lagrange para una particula (coordenadas arbitrarias)



Triedro físico (3-D)

$$\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3, \quad \vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

$$x_i = \varphi_i(q_1, q_2, q_3, t)\,, \qquad ¿\, q_1(t),\, q_2(t),\, q_3(t)\, ?$$

$i = 1,2,3. \quad q_i \equiv$ Coordenadas generalizadas

$$\boxed{\vec{a}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j},\ j = 1,2,3.}$$

Base de vectores tangentes

$$\boxed{¡\,\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t)\,!}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \dot{q}_j \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \dot{q}_j \vec{a}_j,$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)}$$

$T = \tfrac{1}{2} M\, \vec{v}^{\,2} \equiv T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)\,, \qquad \dot{q}_j \equiv$ Velocidades generalizadas

$$\boxed{M \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\,, \quad i = 1,2,3.}$$

$$Q_i \equiv \vec{F} \cdot \vec{a}_i$$

Componente generalizada de la fuerza

Demostración

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}, \qquad M\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{a}_i=Q_i, \qquad M\left(\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{a}_i\right)-\vec{v}\cdot\frac{d\vec{a}_i}{dt}\right)=Q_i,$$

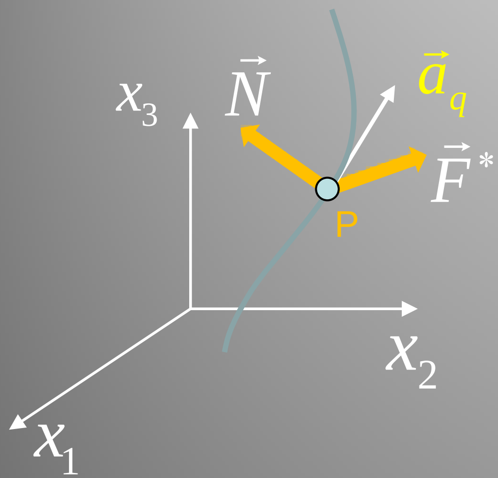
$$\vec{v}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\dot{q}_j\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}, \qquad \vec{a}_i=\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i},$$

$$\frac{d\vec{a}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}=\sum_j\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial t}=\sum_j\frac{\partial\vec{a}_j}{\partial q_i}\dot{q}_j+\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial t}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\,\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}\right)-M\,\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}=Q_i, \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}M\frac{\partial\vec{v}^{\,2}}{\partial\dot{q}_i}\right)-\tfrac{1}{2}M\frac{\partial\vec{v}^{\,2}}{\partial q_i}=Q_i,$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\dfrac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i,\\ i=1,2,3.\end{array}}$$

Ec. De Lagrange: Particula moviendose sobre curva (sin rozamiento)



$$x_1 = \varphi_1(q,t), \quad x_2 = \varphi_2(q,t), \quad x_3 = \varphi_3(q,t),$$

$$\vec{r} = \varphi_1\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2 + \varphi_3\vec{e}_3 \quad .$$

$$\vec{a}_q = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$$ Tangente a la curva

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \vec{N}$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \Rightarrow M\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{a}_q = \vec{F}\cdot\vec{a}_q = \vec{F}^*\cdot\vec{a}_q \equiv Q^*$$

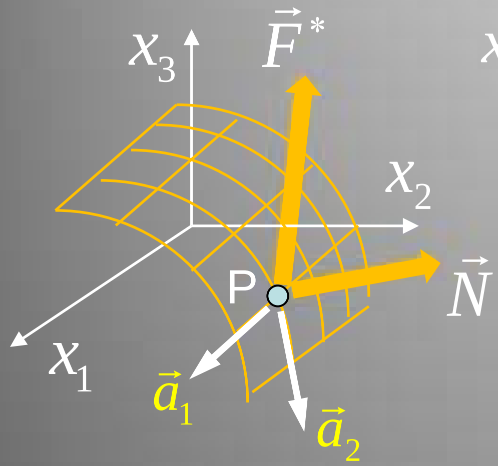
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{q}\vec{a}_q, \qquad T = \tfrac{1}{2}Mv^2 \equiv T(q,\dot{q},t),$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{a}_q = M\left(\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{a}_q\right) - \vec{v}\cdot\frac{d\vec{a}_q}{dt}\right) \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q},$$

$$\vec{a}_q \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}, \quad \frac{d\vec{a}_q}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial q},$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^*,}$$

Ec. De Lagrange: Particula moviendose sobre superficie (sin rozamiento)



$$x_1 = \varphi_1(q_1, q_2, t), \quad x_2 = \varphi_2(q_1, q_2, t), \quad x_3 = \varphi_3(q_1, q_2, t),$$

$$\vec{r} = \varphi_1 \vec{e}_1 + \varphi_2 \vec{e}_2 + \varphi_3 \vec{e}_3 \quad .$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \vec{a}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2},$$

Tangentes a la superficie

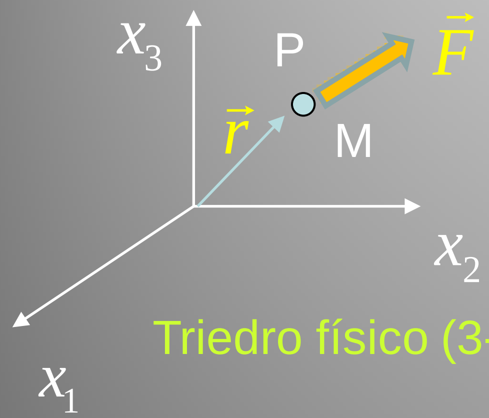
$$\vec{F} = \vec{F}^* + \vec{N},$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \Rightarrow \begin{cases} M\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{a}_1 = \vec{F}\cdot\vec{a}_1 = \vec{F}^*\cdot\vec{a}_1 \equiv Q_1^* \\ M\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{a}_2 = \vec{F}\cdot\vec{a}_2 = \vec{F}^*\cdot\vec{a}_2 \equiv Q_2^* \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \dot{q}_1\vec{a}_1 + \dot{q}_2\vec{a}_2,$$

$$T = \tfrac{1}{2}Mv^2 \equiv T(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t), \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1^*, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2^*,} \end{cases}$$

Resumen: Ecuaciones de Lagrange para una particula



Triedro físico (3-D)

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(q_1, q_2, q_3, t)\vec{e}_i$$

$j = 1, 2, 3.$ $\quad q_j \equiv$ Coordenadas generalizadas

$$\boxed{\vec{a}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \; j = 1, 2, 3.}$$

Base de vectores tangentes

$$T = \tfrac{1}{2} M\, \vec{v}^{\,2} \equiv T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t),$$

$\dot{q}_j \equiv$ Velocidades generalizadas

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \\ i = 1, 2, 3. \end{gathered}}$$

$$Q_i \equiv \vec{F} \cdot \vec{a}_i$$

Componente generalizada de la fuerza

Casos particulares:

- Movimiento sobre curva: $\varphi_j = \varphi_j(q_1, t), \; j = 1, 2, 3.$
- Movimiento sobre superficie: $\varphi_j = \varphi_j(q_1, q_2, t), \; j = 1, 2, 3.$

Potencial generalizado de fuerzas

Una fuerza $\vec{F}^*$ deriva de un “potencial generalizado $U(\vec{r},\vec{v},t)$ ” cuando :

$$\vec{F}^* = \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv$$

$$\frac{d}{d}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{x}\ t}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{y}}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial \dot{z}}\vec{k}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right),$$

Observar que $U(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$!!!!!!!

Ejemplos:

- Fuerza de inercia:

$$\vec{F}_I = -M\left(\vec{a}'_o + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\right),$$

$$\boxed{U = M\left(\vec{a}'_o\cdot\vec{r} - \tfrac{1}{2}(\vec{\omega}\times\vec{r})^2 - \vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\right),}$$

Comprobarlo !!!!!!!

- Fuerza de campo magnético constante (por sencillez): $\vec{F}_{mag} = q_e\vec{v}\times B_0\vec{k},$

$$\boxed{U = \tfrac{1}{2}q_e(\vec{r}\times B_0\vec{k})\cdot\vec{v} \equiv \tfrac{1}{2}q_e B_0(y\dot{x} - x\dot{y}),}$$

Comprobarlo !!!!!!!

Componentes generalizadas de las fuerzas que derivan de un potencial generalizado $U(\vec{r},\vec{v},t)$:

$$\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t) \qquad \vec{a}_j \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$$

$$Q_j^* = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \vec{a}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{a}_j \right) - \frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{a}_j}{dt} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{a}_j =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \boxed{= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_j},}$$

Observar que $U(q, \dot{q}, t)$!!!!!!

Ec. de Lagrange para una partícula en un campo de las fuerzas que deriva de un potencial generalizado $U(\vec{r},\vec{v},t)$:

- Partícula sin ligaduras: $\vec{r}(q_1, q_2, q_3, t), \ \ \vec{a}_j \equiv \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}, \ j = 1, 2, 3.$

3 grados de libertad

$$T(q,\dot{q},t), \quad U(q,\dot{q},t),$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j},}$$

- Definición: $L(q,\dot{q},t) = T - U \equiv$ Función de Lagrange o Lagrangiana de la partícula

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,}$$

- <u>Partícula con ligaduras geométricas ideales</u> (holónomas ideales):

  - Sobre curva (sin rozamiento): $\vec{r}(q_1, t)$, 1 grado de libertad

$$T(q_1, \dot{q}_1, t), \quad U(q_1, \dot{q}_1, t), \Rightarrow L(q_1, \dot{q}_1, t) = T - U$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0,}$$

  - Sobre superficie (sin rozamiento): $\vec{r}(q_1, q_2, t)$, 2 grados de libertad

$$T(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t), \quad U(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t), \Rightarrow L = T - U$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \end{cases}}$$

Definición de sistema lagrangiano:

- Una partícula sin ligaduras (o con ligaduras holónomas ideales) bajo la acción de una fuerza que deriva de un potencial generalizado se dice que es un sistema lagrangiano.

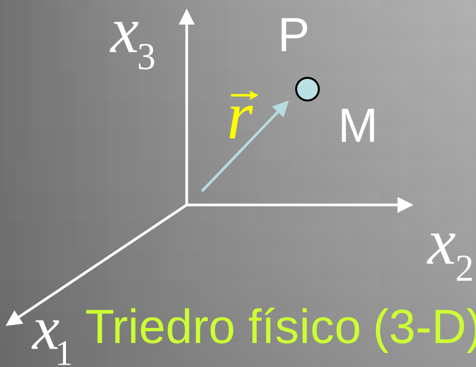
- Un sistema físico cuya evolución en el tiempo ($q_j(t),\ j = 1, 2, 3, \ldots$) se determina a partir de las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

para una cierta función $L(q, \dot{q}, t)$, se dice que es un sistema lagrangiano.

Ligaduras no holónomas

$$\sum_{i=1}^{3} A_{1i}(\vec{r},t)\,\dot{x}_i + A_1(\vec{r},t) = 0,$$



Triedro físico (3-D)

$$\vec{f}_1^{\,CN} = \mu_1\left(A_{11}(\vec{r},t)\vec{e}_1 + A_{12}(\vec{r},t)\vec{e}_2 + A_{13}(\vec{r},t)\vec{e}_3\right) \equiv \mu_1\vec{b}_1,$$

$$\vec{b}_1 = A_{11}(\vec{r},t)\vec{e}_1 + A_{12}(\vec{r},t)\vec{e}_2 + A_{13}(\vec{r},t)\vec{e}_3,$$

Ligadura no holónoma ideal

Trabajo en un desplazamiento pequeño

$$\vec{f}_1^{\,CN}\cdot\vec{v}dt = \mu_1\sum_{j=1}^{3} A_{1j}\vec{e}_j\cdot(\dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 + \dot{x}_3\vec{e}_3)dt = -\mu_1 A_1 dt,$$

Coordenadas generalizadas:

$$\vec{r} = \vec{r}(q,t),$$

$$q = q_1, q_2, q_3, \quad \vec{a}_j,$$

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t)$$

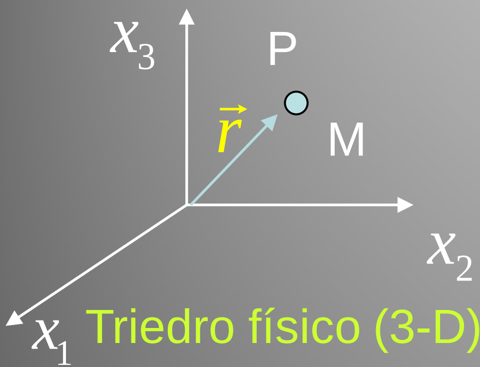
$$\sum_{i=1}^{3} B_{1i}(q,t)\,\dot{q}_i + B_1(q,t) = 0,$$

$$B_{1i}(q,t) = \sum_{j=1}^{3} A_{1j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad B_1(q,t) = A_1 + \sum_{j=1}^{3} A_{1j}\frac{\partial x_j}{\partial t},$$

Teorema:

$$\vec{b}_1 \equiv \sum_{j=1}^{3} B_{1j}\vec{a}^{\,j}, \quad \vec{a}^{\,j}\cdot\vec{a}_i = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$(i = 1,2,3; \quad j = 1,2,3)$$



Triedro físico (3-D)

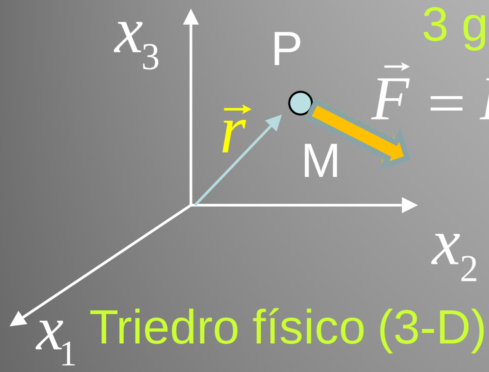
Demostración:

$$\vec{b}_1\cdot\vec{a}_1 = B_{11} = \sum_{j=1}^{3} A_{1j}(\vec{e}_j\cdot\vec{a}_1) = \sum_{i=1}^{3} A_{1j}(\vec{e}_j\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}) = \sum_{i=1}^{3} A_{1j}\frac{\partial x_j}{\partial q_1} \equiv B_{11},$$

$$\vec{b}_1\cdot\vec{a}_2 = B_{12} = \cdots\cdots, \qquad \vec{b}_1\cdot\vec{a}_3 = B_{13} = \cdots\cdots,$$

$$\vec{f}_1^{\,CN} = \mu_1\vec{b}_1, \quad \vec{b}_1 \equiv \sum_{j=1}^{3} B_{1j}\vec{a}^{\,j}, \quad \vec{a}^{\,j}\cdot\vec{a}_i = \delta_{ji}, \quad \sum_{i=1}^{3} B_{1i}(q,t)\,\dot{q}_i + B_1(q,t) = 0,$$

Ecuaciones de Lagrange para una partícula con una ligadura no holónoma (ideal):



Triedro físico (3-D)

3 grados de libertad

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \vec{f}_1^{CN}$$

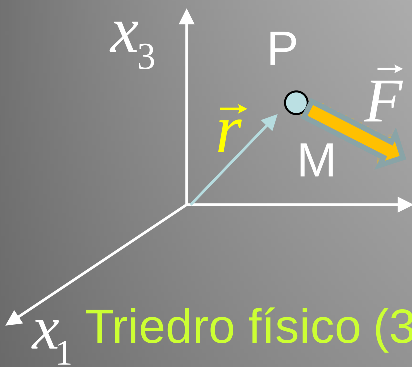
$$\vec{f}_1^{CN} \cdot \vec{a}_1 = \mu_1 B_{11}, \quad \vec{f}_1^{CN} \cdot \vec{a}_2 = \mu_1 B_{12}, \quad \vec{f}_1^{CN} \cdot \vec{a}_3 = \mu_1 B_{13},$$

$$\boxed{L(q,\dot{q},t) = T - U,}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \mu_1 B_{1i}, \quad i = 1,2,3.} \\ \\ \boxed{\sum_{i=1}^{3} B_{1i}(q,t)\,\dot{q}_i + B_1(q,t) = 0,} \end{array} \right.$$

Incógnitas: $q_1(t),\ q_2(t),\ q_3(t),\ \mu_1(t),$

Ecuaciones de Lagrange para una partícula con dos ligaduras no holónomas (ideales):



Triedro físico (3-D)

3 grados de libertad

$$\vec{F} = \vec{F}^* + \vec{f}^{\,CN},$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} B_{ri}(q,t)\,\dot{q}_i + B_r(q,t) = 0, \quad r = 1,2}$$

$$\vec{f}^{\,CN} = \vec{f}_1^{\,CN} + \vec{f}_2^{\,CN} = \mu_1 \vec{b}_1 + \mu_2 \vec{b}_2,$$

$$\vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{a}_1 = \mu_1 B_{11} + \mu_2 B_{21}, \quad \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{a}_2 = \mu_1 B_{12} + \mu_2 B_{22}, \quad \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{a}_3 = \mu_1 B_{13} + \mu_2 B_{23},$$

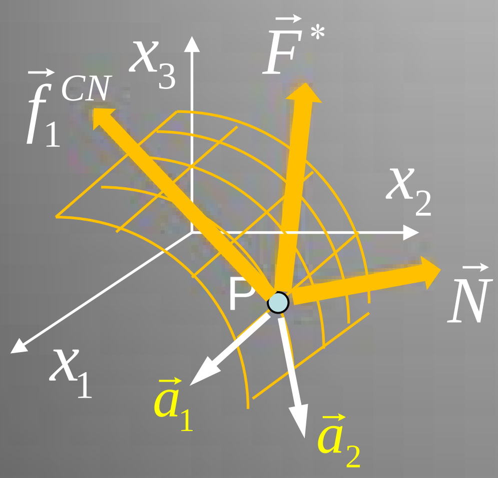
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{r=1}^{2} \mu_r B_{ri}, \quad i = 1,2,3.} \\ \\ \boxed{\sum_{i=1}^{3} B_{ri}(q,t)\,\dot{q}_i + B_r(q,t) = 0, \quad r = 1,2} \end{array} \right.$$

Incógnitas:

$$q_1(t),\, q_2(t),\, q_3(t),\, \mu_1(t),\, \mu_2(t),$$

Ecuaciones de Lagrange para una partícula moviendose sobre una superficie sin rozamiento y con una ligadura no holónoma (ideal):

2 grados de libertad



$$\sum_{i=1}^{2} B_{1i}(q,t)\,\dot{q}_i + B_1(q,t) = 0,$$

$$\vec{f}_1^{\,CN} = \mu_1 \vec{b}_1, \quad \vec{b}_1 = B_{11}\vec{a}^{\,1} + B_{12}\vec{a}^{\,2},$$

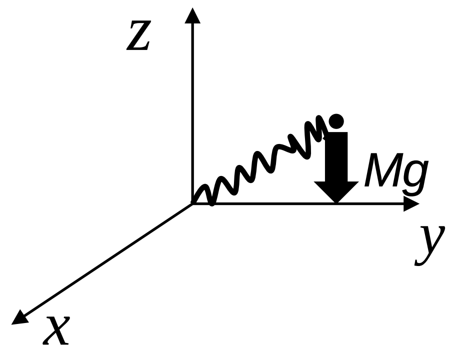
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = \mu_1 B_{1i}, \quad i = 1,2} \\[2ex] \boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} B_{1i}(q,t)\,\dot{q}_i + B_1(q,t) = 0,} \end{array} \right.$$

Incógnitas:

$$q_1(t),\ q_2(t),\ \mu_1(t),$$

Ejemplo (ligaduras no holónomas ideales):

Una partícula de peso *Mg* se mueve en un triedro inercial *x,y,z* bajo la acción de la fuerza de un muelle ideal de constante elástica *K* y longitud natural despreciable. El vector velocidad de la partícula es paralelo en cada instante al vector $\vec{u}(t) = (2+\sin\omega t)\vec{i} + (3-\cos\omega t)\vec{j} + (4+\sin\omega t)\vec{k}$, siendo ω una constante conocida. Obtener las ecuaciones de Lagrange que describen el movimiento de la partícula.



Solución (ligaduras no holónomas ideales):

Coordenadas generalizadas *x,y,z,* $\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

$\vec{v}$ paralelo a $\vec{u}(t)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\dot{x}}{2+\sin\omega t} = \dfrac{\dot{y}}{3-\cos\omega t} = \dfrac{\dot{z}}{4+\sin\omega t},$

2 ligaduras no holónomas:

$$(1): \quad (3-\cos\omega t)\dot{x} - (2+\sin\omega t)\dot{y} = 0, \Rightarrow \begin{cases} B_{11} = (3-\cos\omega t), \quad B_{12} = -(2+\sin\omega t), \\ B_{13} = B_1 = 0, \end{cases}$$

$$(2): \quad (4+\sin\omega t)\dot{y} - (3-\cos\omega t)\dot{z} = 0, \Rightarrow \begin{cases} B_{22} = (4+\sin\omega t), \quad B_{23} = -(3-\cos\omega t), \\ B_{21} = B_2 = 0, \end{cases}$$

$$T = \tfrac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = Mgz + \tfrac{1}{2}K(x^2 + y^2 + z^2), \quad L = T - U,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{i} = \Big(\mu_1(B_{11}\vec{i} + B_{12}\vec{j} + B_{13}\vec{k}) + \mu_2(B_{21}\vec{i} + B_{22}\vec{j} + B_{23}\vec{k})\Big)\cdot\vec{i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{j} = \Big(\mu_1(B_{11}\vec{i} + B_{12}\vec{j} + B_{13}\vec{k}) + \mu_2(B_{21}\vec{i} + B_{22}\vec{j} + B_{23}\vec{k})\Big)\cdot\vec{j},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = \vec{f}^{\,CN} \cdot \vec{k} = \Big(\mu_1(B_{11}\vec{i} + B_{12}\vec{j} + B_{13}\vec{k}) + \mu_2(B_{21}\vec{i} + B_{22}\vec{j} + B_{23}\vec{k})\Big)\cdot\vec{k},$$

Solución (ligaduras no holónomas ideales):

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x} + Kx = \mu_1(3 - \cos\omega t), \\ M\ddot{y} + Ky = -\mu_1(2 + \sin\omega t) + \mu_2(4 + \sin\omega t), \\ M\ddot{z} + Kz + Mg = -\mu_2(3 - \cos\omega t), \\ (3 - \cos\omega t)\dot{x} - (2 + \sin\omega t)\dot{y} = 0, \quad (1) \\ (4 + \sin\omega t)\dot{y} - (3 - \cos\omega t)\dot{z} = 0, \quad (2) \end{array} \right.$$

Incógnitas: $x(t), y(t), z(t), \mu_1(t), \mu_2(t),$

Condiciones iniciales:

$$x(t_0), y(t_0), z(t_0),$$

$\dot{x}(t_0), \dot{y}(t_0), \dot{z}(t_0),$ Compatibles con (1) y (2) !!

Extensión a sistemas de partículas o sistemas con 3N grados de libertad:

Formulaciones variacional y geométrica de la Mec. de Lagrange.

Formulación variacional de la Mecánica:

Principio de Hamilton

Cálculo de variaciones. Principios Variacionales

•Problema: extensión del proceso de minimizar (maximizar) una función f(x) a minimizar (maximizar) un FUNCIONAL, integral definida sobre x de una función de f(x), df/dx y de x.

•Del mismo modo que en cálculo ordinario se busca x para que f(x) sea extremo analizando el entorno de x:

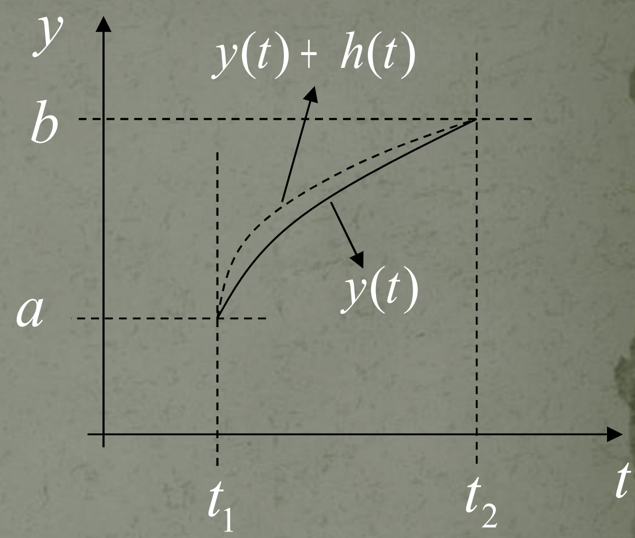
•Una función (continuous and diferenciable) de n variables presenta un extremo en x_m si para toda variación infinitesimal δx en torno al punto es nula:

$$z = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad x = x_m \equiv x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{nm},$$

$$\delta z \equiv z - F(x_m) \simeq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_m \delta x_j = 0, \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right)_m = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

• Valor estacionario de un funcional

Consideremos la integral definida de la forma:



$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y},t)\,dt \quad ,$$

Donde y es función de t e $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

I tiene valor que depende de la function $y(t)$ usada para evaluar la integral, I Se llama funcional de

• Si se busca ahora la función $y(t)$ que cumpla $y(t_1) = a, \; y(t_2) = b$

y que haga estacionario el funcional I ,

$$\delta I = I(y+h) - I(y) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow = \int_{t_1}^{t_2} F(y+h,\dot{y}+\dot{h},t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y},t)\,dt \simeq$$

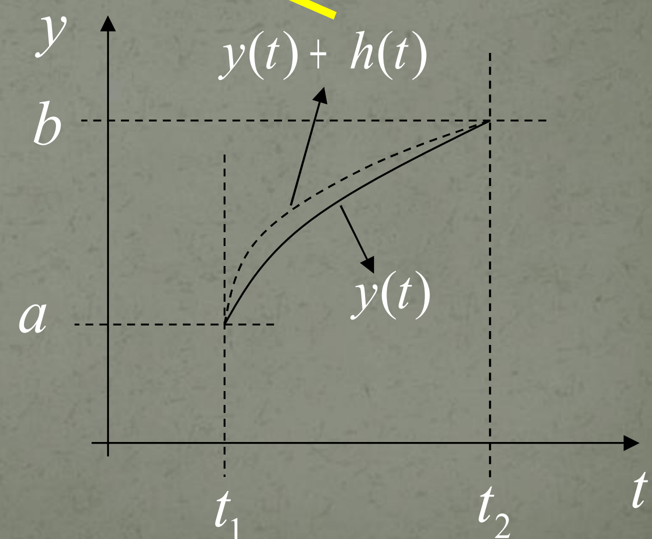
$$\simeq \int_{t_1}^{t_2}\left(\cancel{F} + F_y h + F_{\dot{y}}\dot{h}\right)dt - \cancel{\int_{t_1}^{t_2} F(y,\dot{y},t)\,dt} = \int_{t_1}^{t_2}\left(F_y h + F_{\dot{y}}\dot{h}\right)dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_y h\,dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{\dot{y}}\,dh = \int_{t_1}^{t_2} F_y h\,dt + \cancel{F_{\dot{y}} h\Big|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} h\frac{dF_{\dot{y}}}{dt}\,dt =$$

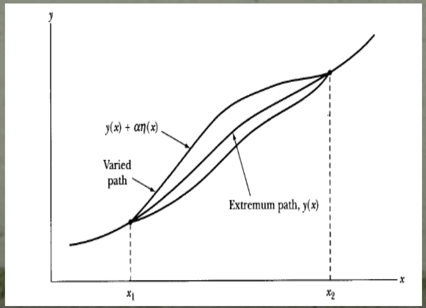
h

$$(h(t_1) = h(t_2) = 0)$$

$$\boxed{= -\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)h\,dt = 0,}$$



También suele tomarse *h* con variación paramétrica



$$y(\alpha, x) = y(0, x) + \alpha\eta(x)$$

• Y como $h(t)$ es arbitrario, la integral es cero si (es suficiente y también necesario)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

La función $y(t)$ que satisface tal l ecuación se dice extremo del funcional I.

• **Para n variables la generalización es inmediata:**

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(y_1,\ldots,y_n,\dot{y}_1\ldots,\dot{y}_n,t)dt \quad , \qquad y_j(t_1) = a_j,\ y_j(t_2) = b_j, \quad j = 1,\ldots,n.$$

$$\delta I = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}_j} - \frac{\partial F}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

Las funciones $y_j(t)$ son los extremos (estacionarios) del funcional I.

- Ejemplo.Encontrar la curva que minimiza la distancia entre dos puntos
- Hallar $y(x)$ tal que la distancia entre los puntos (x_A, y_A) y (x_B, y_B) sea mínima

$$s_{AB} = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx\,, \quad with \quad y(x_A) = y_A, \quad y(x_B) = y_B,$$

$$F \equiv \sqrt{1 + y'(x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + y'^2} = \text{cte}, \qquad \Rightarrow \quad y = c_2 + c_1 x,$$

$$\boxed{y = y_A - x_A\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right) + \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)x}$$

El Principio de Hamilton

•Para un sistema mecánico existe una función $L(q,\dot{q},t)$ de las posiciones y velocidades q y del tiempo $\dot{q}$

llamada lagrangiana , tal que el funcional S , llamado "acción"

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1,\ldots,q_n,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n,t)dt \quad ,$$

Es tal que sus extremos son las soluciones de las ecuaciones (de Lagrange) :

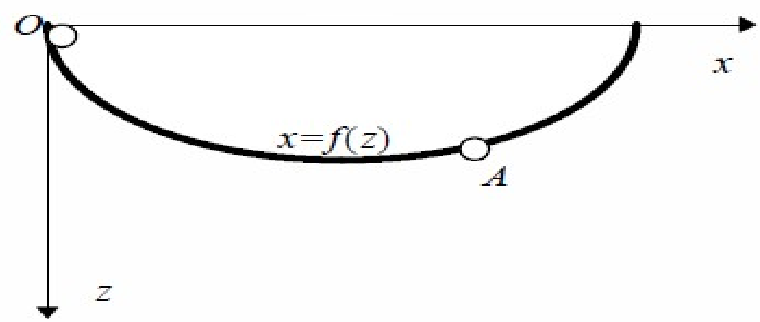
$$\delta S = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,\ldots,n.$$

¿Cuál es *L*? ¿es única? ¿pueden obtenerse las ecuaciones de Newton?

$$Ejm \quad L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - U \qquad con \quad U = \frac{1}{2}\sum_{i,j} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_i|)$$

Problema de la braquistócrona (Problema 15) :

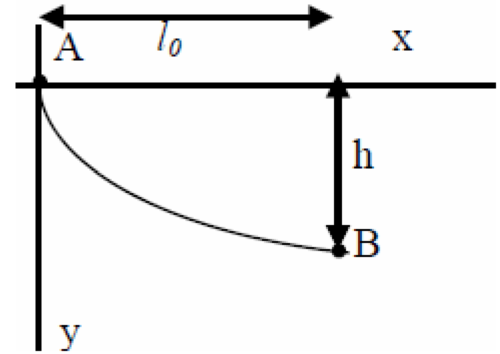
Dados dos puntos *O* y *A* en un plano vertical, y en presencia de un campo gravitacional vertical, hallar la curva que los une para que una partícula, que la recorra, tarde el mínimo tiempo posible en ir de un punto a otro, partiendo del reposo.



minimizar la integral

$$t = \int_O^A \frac{ds}{v}$$

$$t_{AB} = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2g\,y}}\,dx \quad ,$$



La función integrando no depende explícitamente de x por lo que

$$\dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}} - \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{y}} = cte\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{y(1+\dot{y}^2)}} = cte = c\,,$$

introduciendo el parámetro θ $\quad \dot{y} = \cot(\theta/2)$

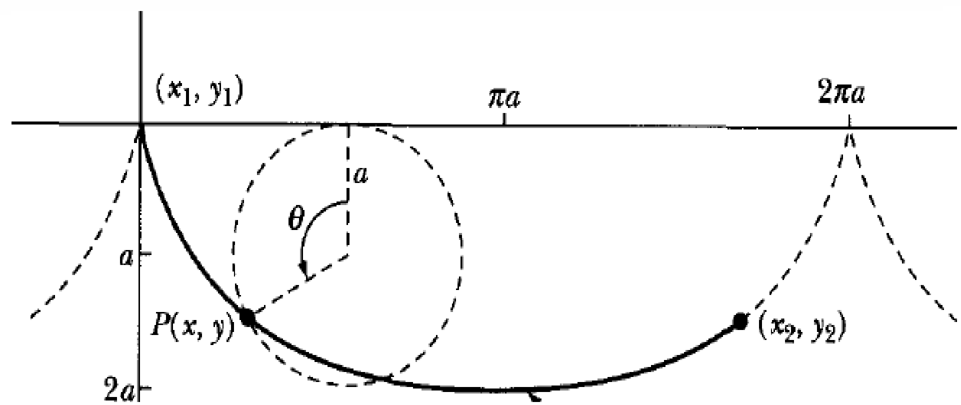
$$y = c_1(1-\cos(\theta)) \quad , \quad dx = \frac{dy}{\cot(\theta/2)} \quad \Rightarrow \quad x = c_1\int(1-\cos(\theta))d\theta = c_1(\theta - \mathrm{sen}(\theta)) + c_2\,,$$

De la condición $y(x=0)=0$, encontramos $c_2 = 0$. El haz de curvas es pues

$$\begin{cases} y = c_1(1-\cos(\theta))\,, \\ x = c_1(\theta - \mathrm{sen}(\theta))\,. \end{cases}$$

haz de cicloides cuya circunferencia generatriz tiene radio $R = c_1$

$$\begin{cases} \dfrac{2\pi R}{l_0} = \dfrac{2\pi}{\theta - \mathrm{sen}\,\theta} \\[2ex] \dfrac{h}{l_0} = \dfrac{1-\cos\theta}{\theta - \mathrm{sen}\,\theta} \end{cases}$$



El Principio de Hamilton establece que:

De todas las trayectorias posibles (compatibles con posibles ligaduras) un sistema dinámico de desplaza en el tiempo de un estado a otro siguiendo sólo la trayectoria que minimiza la integral temporal de T-U.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = 0$$

Ejm. Oscilador armónico y péndulo simple.

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = mgl(1 - \cos\theta)$$

La lagrangiana (aquí sistema conservativo newtoniano) es escalar y formulable en coordenadas GENERALIZADAS

No se usan vectores, no aparecen fuerzas ¡¡

El cálculo de variaciones permite extender las ecuaciones de Euler-Lagrange incluyendo condiciones en las variables, LIGADURAS, y más allá de sistemas conservativos.

Notas sobre la formulación Lagrangiana (frente a la de Newton)

1.- No necesitan ser derivadas de principios variacionales, pero hoy es más riguroso (Lagrange 1788, Hamilton 1834, Jacobi (1837) … Weierstrass, etc

2.- No da una teoría nueva, pero sí una formulación nueva ¿por qué usarla?
Está asociada a problemas de MINIMOS usuales en Física.

3.- Maneja un escalar L, da ecuaciones de movimiento sin pasar por F, no usa idea de fuerza (fuerzas a veces imposibles de determinar si ligaduras en Newton).

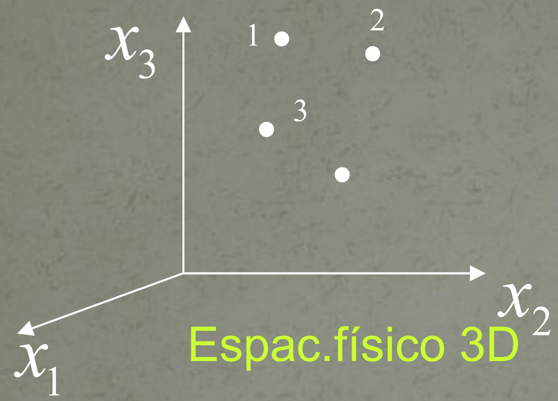
4.- *L* es invariante (no cambia en sistemas coordenados), las variables pueden no ser posiciones de espacio físico (ejm. ángulos, energía...)

5.-Energía versus Fuerza: en física moderna persiste "energía", como en Cuántica, Hamilton relaciona hoy física clásica y moderna.

6.- ¿Viola principio de causalidad? lo lleva a principio más último.

7.- Idea ya avanzada en la Antigüedad en óptica -Herón. II AC de distancia mínima) y posteriormente Fermat 1657 (Ley de Snell). En Mecánica "ímpetu mínimo" de Maupertius 1747, luego hasta hoy ***conectando Newton y teoría de campos.***

1.Ley de Newton en el espacio de configuración 3N-D



Ver artículo: ***J. Casey, Am. J. Phys. 62 (9), 1994.***

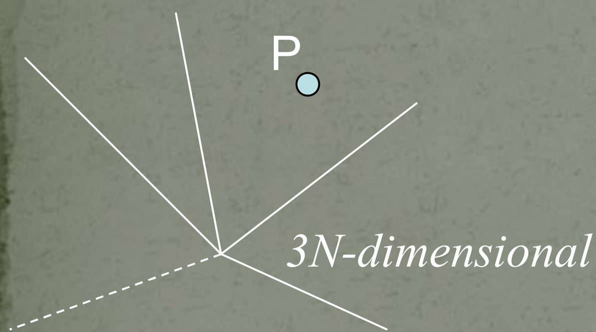
$$\left\{ \begin{array}{l} F_i(n) = M(n)\,\ddot{x}_i(n) \\ i = 1,2,3;\;\; n = 1,2,\;\ldots N \\ F_1(n)\,,\;\; F_2(n)\,,\; F_3(n) \end{array} \right.$$

Geometrical derivation of Lagrange's equations for a system of particles

James Casey
Department of Mechanical Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, California 94720

(Received 29 November 1993; accepted 6 April 1994)

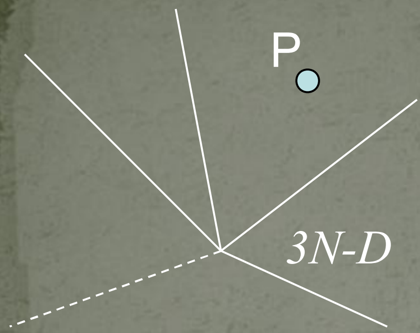
A concise but general derivation of Lagrange's equations is given for a system of finitely many particles subject to holonomic and nonholonomic constraints. Based directly on Newton's second law, it takes advantage of an inertia-based metric to obtain a geometrically transparent statement of Lagrange's equations in configuration space. Illustrative examples are included.



Espacio
configuración
cartesiano.

$$P \Rightarrow \left\{ x^1, x^2, x^3, x^4, \ldots, x^{3N} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ x_1(1), x_2(1), x_3(1), \ldots, x_1(N), x_2(N), x_3(N) \right\}$$



3N-Dcartesiano

Se asocian 3N masas cartesianas según :

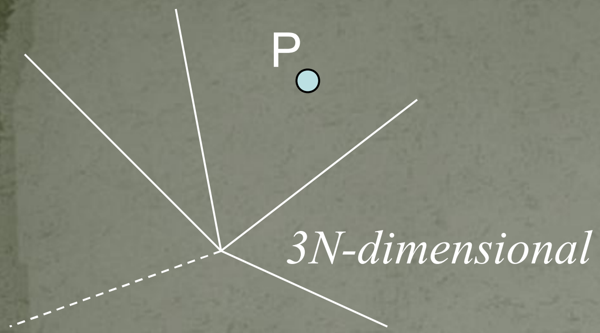
$$\Rightarrow \quad \left\{ m_1, m_2\ m_3, \ldots, m_{3N} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ M(1), M(1), M(1), \ldots, M(N), M(N), M(N) \right\}$$

Y 3N componentes de una fuerza f :

$$\Rightarrow \quad \left\{ f_1, f_2\ f_3, \ldots, f_{3N} \right\} \equiv$$

$$\equiv \left\{ F_1(1), F_2(1), F_3(1), \ldots, F_1(N), F_2(N), F_3(N) \right\}$$



Las componentes de f en el espacio de configuración son :

$$f_k = m_k \ddot{x}^k \ ,$$

$$k = 1, 2, \ \ldots, 3N \ ,$$

La energía Cinética:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} M(n)\left(\dot{x}_1(n)^2 + \dot{x}_2(n)^2 + \dot{x}_3(n)^2 \right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3N} m_k (\dot{x}^k)^2$$

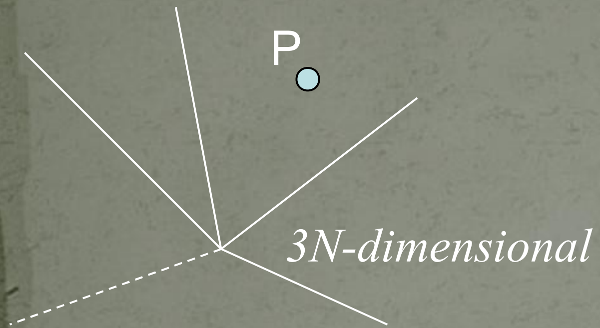
La correspondenciaentre ambos espacios se logra renumerando índices:

$$x_i(n) = x^{3n-3+i}, \quad con \quad n = 1, 2, ..., N$$

$$F_i(n) = f_{3n-3+i}, \qquad donde \quad i = 1, 2, 3$$

$$M(n) = m_{3n-2} = m_{3n-1} = m_{3n} \ ,$$

Espacio vectorial de configuración:



• Se definen coordenadas de un punto P:

$$\tilde{x}^k = x^k \sqrt{\frac{m_k}{m}},$$

Conla masa total

$$m = \sum_{i=1}^{N} M(i),$$

•Y una métrica (norma) en espacio 3N-D:

$$d_{OP}^2 = \sum_{k=1}^{3N} (\tilde{x}^k)^2 \equiv \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{3N} m_k (x^k)^2,$$

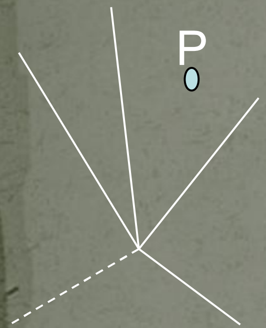
•P puede representar un vector de posición $\vec{r}$ en el espacio de configuración

•Con la base ortonormal $\left\{ \vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_1, \ldots, \vec{\tilde{e}}_{3N} \right\}$

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3N} \tilde{x}^k \vec{\tilde{e}}_k, \qquad \vec{r} \cdot \vec{r} = d_{OP}^2.$$

Espacio de configuración:

•Y con un par de bases fijas recíprocas $\{\vec{e}_k\}$ $\{\vec{e}^{\,k}\}$



$$\vec{e}_k = \vec{\tilde{e}}_k \sqrt{m_k / m}\,, \qquad \vec{e}^{\,k} = \vec{\tilde{e}}_k \sqrt{m / m_k}\,,$$

$$\vec{e}^{\,k} \cdot \vec{e}_j = \delta^{\,k}_{\,j}\,, \quad (j = 1, 2, \ldots, 3N;\ k = 1, 2, \ldots, 3N)$$

•Posición y velocidad de P son : $\vec{r}$

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^{3N} x^k \vec{e}_k\,, \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \dot{x}^k \vec{e}_k\,,$$

• lo que permite construir la fuerza del espacio de configuración sobre “una” partícula como

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{3N} f_k \vec{e}^{\,k}\,,$$

16

• Lo que lleva a relaciones de partícula en el espacio de configuración, con su métrica *ds*, como las de una partícula en espacio 3D (formalmente idéntico al caso del movimiento una partícula) :

$$\vec{f} = m\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \vec{f}\cdot\vec{v} = \frac{dT}{dt},$$

$$\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\sum_{k=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N}\dot{x}^k\dot{x}^j\vec{e}_k\cdot\vec{e}_j \equiv T, \qquad ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{2T}{m}dt^2,$$

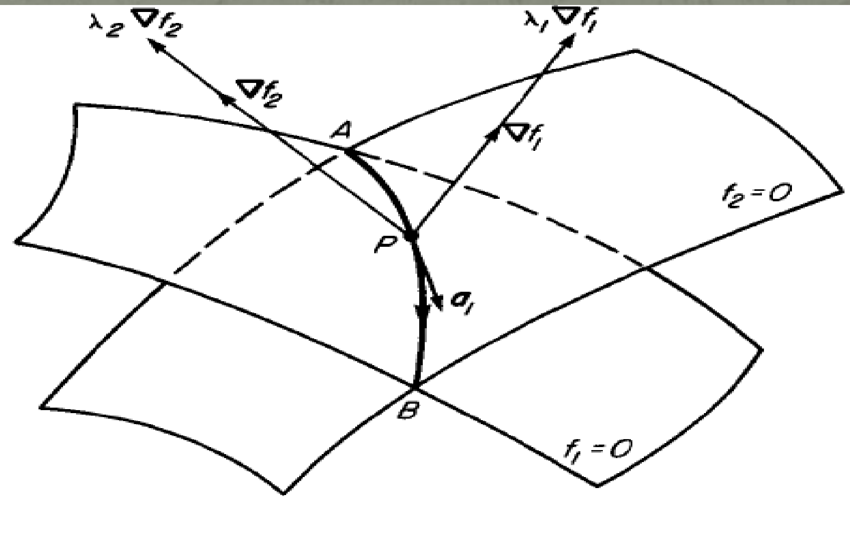
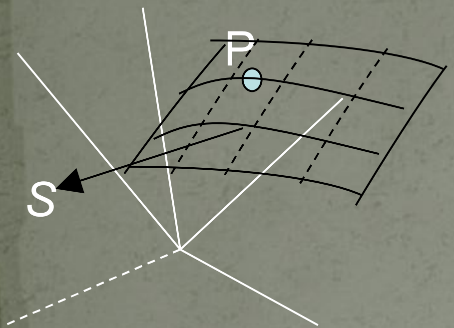


Fig. 2. Two constraint surfaces $f_1=0$ and $f_2=0$ intersecting to form a one-dimensional configuration manifold AB. The tangent space to AB at the point occupied by the particle P is a straight line passing through this location and parallel to the vector $\mathbf{a}_1$. Both ∇f_1 and ∇f_2 are perpendicular to $\mathbf{a}_1$.

Variedades en el espa. De conf. y geometría



•*Si las N* partículas se someten a *M* ligaduras holónomas (geométricas)

$$\phi_j(\vec{r},t) = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, M < 3N)$$

•Cada relación define una hipersuperficie de dimension *3N-1* .

•La intersección de ellas es un subconjunto *S* de dimensión

$$f = 3N - M.$$

P permanece en *S* descrito con un mínimo número de variables *f* para localizar a P en *t* en *S*. Las *f coordeandas gaussianas se llaman variables generalizadas, y f es el número de* ***grados de libertad*** *del sistema. S es una variedad con geometría de Riemann.*

$$\vec{r} = \vec{r}(q,t), \quad q = q_1, q_2, \ldots, q_f.$$

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha},$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, f.$$

18

• Y con las relaciones de la Sección I.1.3, la energía cinética se puede descomponer según:

$$\vec{v} = \sum_{\alpha} \dot{q}_\alpha \vec{a}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}(q,t)}{\partial t}, \qquad T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2. \qquad T_1 = m \sum_{\alpha=1}^{f} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{a}_\alpha \right) \dot{q}_\alpha, \qquad T_2 = \frac{1}{2} m \sum_{\alpha=1}^{f} \sum_{\beta=1}^{f} (\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \geq 0,$$

$$métrica: \quad ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{f} \sum_{\beta=1}^{f} (\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta) dq_\alpha dq_\beta = \frac{2T_2}{m} dt^2 \geq 0,$$

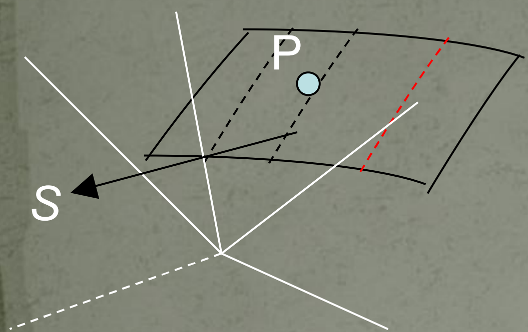
• T_2 es función homogénea de grado 2, forma cuadrática definida positiva.

• T debe coincidir con la energía cinética de las N partículas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{f} m_\alpha \left(\frac{\partial \overrightarrow{r_n}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \overrightarrow{r_n}}{\partial t} \right)^2$$

•Se llega a las ecuaciones de Lagrange como se hizo para una partícula.

19



- Con los vectores $\vec{a}_\alpha$ del espacio tangente como base: (Secc. I.1.4, pág. 5)

$$\vec{f}\cdot\vec{a}_\alpha = m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{a}_\alpha\,, \qquad Q_\alpha = \vec{f}\cdot\vec{a}_\alpha\,,$$

$$m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{a}_\alpha = \frac{d}{dt}(m\vec{v}\cdot\vec{a}_\alpha) - m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{a}_\alpha}{dt},$$

- Y de

$$\vec{a}_\alpha = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_\alpha}, \qquad \frac{d\vec{a}_\alpha}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_\alpha}, \qquad \Longrightarrow \qquad Q_\alpha = \frac{d}{dt}(m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_\alpha}) - m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_\alpha},$$

$$Q_\alpha = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},$$

$$Si \quad \vec{f}^{\,*} = -\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\vec{v}},$$

$$Se\ define\ la\ lagrangiana\ L(q,\dot{q},t) = T(q,\dot{q},t) - U(q,\dot{q},t)$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,\cdots,f.$$

20

Así, para el caso de un sistema de N partículas, puede seguirse una formulación análoga al de una partícula, cuya posición de especifica con 3N variables cartesianas. Si el número de ligaduras holónomas es M, se pueden elegir

$$f = 3N - M$$

variables generalizadas, es el número de ***grados de libertad,*** para que tales ligaduras se cumplan automáticamente.

$$\phi_l(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = \phi_l(\vec{r}, t) = 0 \ , \ l = 1, 2, ..., M$$

Suponiendo 3N variables **{q}** (de las que M pueden ser constantes de movimiento)

$$q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, t) \ , \ \alpha = 1, \ldots, 3N$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \ldots, q_{3N}, t) \ , \ i = 1, \ldots, N \ ,$$

$$\det \left| \frac{\partial q_\alpha}{\partial \vec{r}_i} \right| \neq 0 \ .$$

Las ecuaciones de Lagrange se obtendrán, como para una partícula, pero ahora *i* va de 1 a N. *El resultado es el mismo que el obtenido mediante la derivación clásica en términos de "trabajos virtuales" y Principio de D´Alemberg (ver Goldstein).*

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\delta\vec{r}_i = 0$$

$$Q_\alpha = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle \sum_i \dot{\vec{p}}_i \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i,\alpha} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \\ \displaystyle \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha} \\ \displaystyle \vec{v}_i = \sum_\beta \dot{q}_\beta \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\beta} \end{array} \right.$$

$$\sum_\alpha \delta q_\alpha \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) - Q_\alpha \right] = 0$$

La derivación geométrica simplifica la notación y demostraciones teóricas y complementa la argumentación por principios vacacionales (no siempre útil).

Introducción de las ligaduras: como para el caso de una partícula.

En general, no todas las fuerzas derivan de un potencial generalizado *U.* Hay que partir de la ecuación general de Lagrange para T y descomponer cada Q en contribuciones.

Las ligaduras implican fuerzas sobre el sistema ¿Cuáles?

A) Si sólo hay M ***ligaduras holónomas*** éstas pueden usarse para definir 3N-M=f variables ***independientes*** {q}, el Principio Variacional da las ec. de Lagrange como en ausencia de ligaduras y con f grados de libertad, pero se pierde información de fuerzas asociadas.

$$\phi_l(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N,t) = \phi_l(\vec{r},t) = 0 \;,\; l = 1,2,\ldots,M$$

Otro procedimiento: Con el Principio variacional condicionado surge el método de **multiplicadores de Lagrange.** Ejm. Caso en dos variables.

$$L = L(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t) \rightarrow \delta I = 0 =$$

$$\delta\int_{t1}^{t2} L dt = \int \sum_{\alpha=1}^{2} [\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}]\delta q_\alpha\, dt$$

Pero las dos δq_α no son independientes si hay una ligadura

$$\phi_l(q_1,q_2) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_l}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \phi_l}{\partial q_2}\delta q_2 = 0$$

Hay que eliminar una variación de *q* en función de la otra para tener una variable Independiente.

$$NOTACIÓN\ (operador):\ \ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

Así , se elige:

$$\ell_1(L)\left(\frac{\partial \phi}{\partial q_1}\right)^{-1} = \ell_2(L)\left(\frac{\partial \phi}{\partial q_2}\right)^{-1} = \lambda(t)$$

Da dos ecuaciones , más la de ligadura para tres incógnitas.

$$\ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial q_\alpha},\ \alpha = 1,2$$

En general:

$$\ell_\alpha(L) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{l=1}^{M} \lambda_l(t) \frac{\partial \phi_l(q,t)}{\partial q_\alpha}, \quad \alpha = 1,\ldots,3N$$

Se tienen 3N+M ecuaciones (de Lagrange más ligaduras) e incógnitas.

Significado físico: se obtienen las mismas ecuaciones **que si se hubiera usado el lagrangiano**

$$\widehat{L} = L + \sum_l \lambda_l(t)\phi_l(q,t)$$

Los multiplicadores están relacionados con las fuerzas generalizadas de ligadura (normales a superficies definidas por ligaduras, no hacen trabajo virtual).

$$\sum_l \lambda_l(t)\frac{\partial \phi_l(q,t)}{\partial q_\alpha} = \sum_l \lambda_l(t)\frac{\partial \phi_l(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha} = \vec{F}^{CH} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\alpha},\ (esp.config.)$$

Se obtienen así las fuerzas de ligadura en sistema holónomo de lagrangiana L

B) **Ligaduras anholónomas.** No hay procedimiento general, podría operase igual pero estas ligaduras tienen a las velocidades

$$\phi_r(q,\dot{q},t) = 0, \quad r = 1,\dots,L$$

Y en el cálculo variacional no se prescriben las variaciones virtuales de las velocidades.

Si se considerase el Lagrangiano:

$$\widehat{L} = L + \sum_l \mu_l(t)\,\phi_l(q,\dot{q},t)$$

Como en el caso holónomo, aparecerían derivadas primeras de los multiplicadores, de los que **no se conocen condiciones iniciales**, el *procedimiento no es extensible* al caso no-holónomo. LUEGO:

Cada caso ha de estudiarse independientemente. Un caso particular simple es el de ***ligadura semiholónoma*** o (r=1, 2, ...,L) ***ligaduras ideales***, como para una partícula:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=f} B_{r\alpha}(q,t)\,\dot{q}_\alpha + B_r(q,t) = 0 \quad (57)$$

Por comparación y extensión del caso holónomo, pueden introducirse multiplicadores

$$\vec{f}_r^{\,CN} \cdot \vec{a}_\beta = \mu_r \vec{b}_r \cdot \vec{a}_\beta = \mu_r B_{r\beta} \quad , \qquad (r = 1, 2, \dots, L\,;\ \beta = 1, 2, \dots, f)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q^*_\alpha + \sum_{r=1}^{r=L} \mu_r B_{r\alpha}}$$

Se obtienen así las fuerzas de ligadura en sistema holónomo de lagrangiana L

B) **Ligaduras anholónomas.** No hay procedimiento general, podría operase igual pero estas ligaduras tienen a las velocidades

$$\phi_r(q,\dot{q},t) = 0, \quad r = 1,\dots,L$$

Y en el cálculo variacional no se prescriben las variaciones virtuales de las velocidades.

Si se considerase el Lagrangiano:

$$\widehat{L} = L + \sum_l \mu_l(t)\,\phi_l(q,\dot{q},t)$$

Como en el caso holónomo, aparecerían derivadas primeras de los multiplicadores, de los que **no se conocen condiciones iniciales**, el *procedimiento no es extensible* al caso no-holónomo. LUEGO:

Cada caso ha de estudiarse independientemente. Un caso particular simple es el de ***ligadura semiholónoma*** o (r=1, 2, ...,L) ***ligaduras ideales***, como para una partícula:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=f} B_{r\alpha}(q,t)\,\dot{q}_\alpha + B_r(q,t) = 0 \quad (57)$$

Por comparación y extensión del caso holónomo, pueden introducirse multiplicadores

$$\vec{f}_r^{\,CN}\cdot\vec{a}_\beta = \mu_r\vec{b}_r\cdot\vec{a}_\beta = \mu_r B_{r\beta} \quad , \qquad (r = 1, 2, \dots, L\,;\ \beta = 1, 2, \dots, f)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q^*_\alpha + \sum_{r=1}^{r=L}\mu_r B_{r\alpha}$$

En resumen, y de forma general: Conviene descomponer (si es posible) las fuerzas según procedencia y partir de las ecuaciones generales de Lagrange para la T.

$$\ell_\alpha(T) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^U + Q_\alpha^{CH} + Q_\alpha^{CN} + Q_\alpha^*$$

En general, para introducir una componente de una fuerza generalizada en un sistema de N partículas, si F(n) y r(n) son la fuerza y posición de la n-ésima partícula, se aplicará:

$$Q_\alpha = \sum_{n=1}^{N} \vec{F}(n) \cdot \frac{\partial \vec{r}(n)}{\partial q_\alpha} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{3} F_j(n) \frac{\partial x_j(n)}{\partial q_\alpha}$$

Y si se incoporan todas las fuerzas de ligadura (M+L) dejando en T los 3N grados de libertad:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^* + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \frac{\partial \phi_k}{\partial q_\alpha} + \sum_{r=1}^{L} \mu_r B_{r\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n \equiv 3N\, grados,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3N} B_{r\alpha}(q,t)\dot{q}_\alpha + B_r(q,t) = 0, \quad r = 1, \ldots, L,\ L < 3N - M;$$

Fuerzas de ligadura ideales

- Las ecuaciones de Lagrange se pueden plantear con coordenadas generalizadas sobre una variedad de configuración de dimension n' con $3N - M \le n' \le 3N$, dependiendo del nº de ligaduras holónomas que tomemos en la parametrización.

- Las fuerzas de ligadura no holónomas (los μ_r) siempre apareceran cualquiera que sea la dimensión de la variedad de configuración.

- Las fuerzas de ligadura holónomas (los λ_j) no apareceran si se escoge la variedad de configuración de dimensión mínima posible: $n' = n \equiv 3N - M$.

- Supongamos que queremos determinar la fuerza de ligadura hónoma ejercida por la ligadura, por ejemplo, $j = M$: $\vec{f}_M^{CH} = \lambda_M \nabla \phi_M$

$$\phi_j(\vec{r},t) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,M-1. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} q = q_1, q_2, \ldots, q_{n'}; \quad n' = 3N + 1 - M. \\ \Rightarrow \quad \vec{r}(q,t), \quad \vec{a}_\alpha, \quad \alpha = 1,2,\ldots,n' \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^* + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \phi_k}{\partial q_\alpha} + \sum_r \mu_r B_{r\alpha}, \quad \alpha = 1,\ldots,n \equiv 3N\, grados,$$

$$\sum_{\alpha=1} B_{r\alpha}(q,t)\dot{q}_\alpha + B_r(q,t) = 0, \quad r = 1,\ldots,L;$$

• Supongamos que queremos determinar la fuerza de ligadura hónoma ejercida por la ligadura, por ejemplo la número M, con fuerza asociada:

$$\vec{F}_M^{CH} = \lambda_M \nabla \phi_M$$

Sólo un multiplicador aparece para esa ligadura

•y quedarán 3N-(M-1) grados de libertad:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^* + \lambda_M (\nabla \phi_M \cdot \vec{a}_\alpha) + \sum_r \mu_r B_{r\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, n' \equiv 3N + 1 - M,$$

$$(\text{en nuevas } B \text{ con f variables}) \sum_{\alpha=1} B_{r\alpha}(q,t)\dot{q}_\alpha + B_r(q,t) = 0, \quad r = 1, \ldots, L < n;$$

$$y \qquad \phi_M(q,t) = 0,$$

Fuerzas posibles : las <u>*fuerzas activas*</u> sobre el sistema que pueden ser derivadas de un potencial generalizado o de otro tipo, como las disipativas de Rayeigh , giroscópicas etc. a las que se sumarían las fuerzas no activas o asociadas a ligaduras holónomas y/o anholónomas.

Algunos casos de fuerzas: (Secc. I.1.7)

a) giroscópicas, aquellas de potencia nula, es decir $\sum_{i=1}^{i=f} Q_i \dot{q}_i = 0$

con caso particular de potencial generalizado: $U(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{f} \Pi_i(q)\dot{q}_i \quad dando \quad Q_\alpha^U = \ell_\alpha(U)$

b) disipativas a aquellas cuya potencia es negativa y pueden derivar de una función *W* (potencial de Rayleigh) :

$$\sum_{i=1}^{i=f} Q_i \dot{q}_i < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \dfrac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{f} b_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \\ Q_i = - \dfrac{\partial W(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i} \end{array} \right. \Rightarrow Q_i = - \sum_{k=1}^{k=f} b_{ik} \dot{q}_k$$

Si el sistema es holónomo y todas las fuerzas derivan de potenciales generalizados se dice SISTEMA LAGRANGIANO y si es newtoniano se le dice ***NATURAL.***

Ejm. Potencial de fuezas giroscópicas

- **Def:** Se denominan fuerzas giroscópicas a aquellas cuya potencia es nula:

$$q = q_1, q_2, \ldots \qquad \Rightarrow \quad \sum_\alpha Q_\alpha \dot{q}_\alpha \equiv 0 \quad \Leftarrow$$

- **Ejemplo:** El potencial generalizado $U(q,\dot{q}) = \sum_\beta \Pi_\beta(q)\dot{q}_\beta$ es giroscópico.

$$Q_\alpha = \left(-\frac{\partial}{\partial q_\alpha} + \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\left(\sum_\beta \Pi_\beta(q)\dot{q}_\beta\right) = \left(-\sum_\beta \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{d}{dt}\Pi_\alpha\right)$$

$$= \left(-\sum_\beta \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \sum_\beta \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) \equiv \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta; \quad \gamma_{\alpha\beta} \equiv \sum_\beta \left(\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \Pi_\beta}{\partial q_\alpha}\right); \quad \gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha};$$

$$\sum_\alpha Q_\alpha \dot{q}_\alpha = \sum_\alpha \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta}\dot{q}_\beta \dot{q}_\alpha \equiv 0.$$

Definición de sistema lagrangiano:

- U sistema de partículas sin ligaduras (o con ligaduras holónomas ideales) bajo la acción de unas fuerzas que derivan de un potencial generalizado se dice que es un sistema lagrangiano.

- Un sistema físico cuya evolución en el tiempo ($q_j(t),\ j = 1,2,3,\ldots$) se determina a partir de las ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1,2,3,\ldots$$

para una cierta función $L(q,\dot{q},t)$, se dice que es un sistema lagrangiano.

Sistemas Lagrangianos, sus ecuaciones de movimiento derivan de un lagrangiano de forma general $L = L_0 + L_1 + L_2$:

$$L_2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{f} c_{ik}(q,t)\,\dot{q}_i\dot{q}_k \ , \quad L_1 = \sum_{i=1}^{f} c_i(q,t)\,\dot{q}_i \ , \quad L_0 = c_0(q,t)$$

y sus ecuaciones de movimiento son:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_i} = 0 \, ,$$

Ejm. *L=T−U(r).*

Constantes del Movimiento. Simetrías y Conservación.

Constante del movimiento ,integral primera: Cualquier función que permanece constante durante el movimiento del sistema.

Ejm. Si una coordenada no aparece explícitamente en *L*, se dice ***cíclica o ignorable,*** entonces su momento generalizado asociado en constante:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_\alpha}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_\alpha} \equiv p_\alpha = cte.$$

leyes de conservación o constantes del movimiento.

Definición:

constante del movimiento o *integral primera* :

$$q = q_1, q_2, \ldots \qquad\qquad \varphi\,(q, \dot{q}, t)$$

- Si $\varphi\,(q, \dot{q}, t)$ (una función no constante) es una *integral primera* deberá verificar :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \left(\sum \dot{q}_j \frac{\partial\varphi}{\partial q_j} + \sum \ddot{q}_j \frac{\partial\varphi}{\partial \dot{q}_j} \right)_{q=q(t)} = 0,$$

donde $q(t)$ son las trayectorias o soluciones de las ecuaciones del movimiento del sistema en estudio

(puede no ser integral primera para otro sistema, ojo).

Casos elementales de leyes de conservación

- **Energía**

1)
Supongamos un sistema con la lagrangiana, $L(q,\dot{q})$, **independiente del tiempo**, y sometido a dos, una o ninguna ligadura no holónoma ideal **sin término independiente,** es decir $\sum_i B_{ri}(q,t)\dot{q}_i = 0$. Bajo estas condiciones la función

$$E(q,\dot{q}) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L,$$

es una *constante del movimiento* o *integral primera.*

Demostración: $Si \quad \sum_i B_{ri}(q,t)\dot{q}_i = -B_r(q,t) = 0,$

El sistema de ecuaciones que determina el movimiento es

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_r \mu_r B_{ri},$$

y derivando *E* se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = \cancel{\sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} + \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i} - \cancel{\sum_i \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial t}} =$$

$$= \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = \sum_r \mu_r \left(\sum_i B_{ri}\dot{q}_i \right) = -\sum_r \mu_r B_r \equiv 0,$$

Caso particular de 1)

- Si $L = T - U$, con $U = U(q)$ (función solo de las *q*) y $T(q,\dot{q})$ una función cuadrática homogénea de las velocidades generalizadas, es decir, $T = \sum_{i,j} \frac{1}{2} c_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$, entonces $E(q,\dot{q}) \equiv T + U$.

Demostración:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j c_{jk}(q)\dot{q}_j$$

$$E(q,\dot{q}) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - T + U = \sum_i \sum_j c_{ij}(q)\dot{q}_i\,\dot{q}_j - T + U = 2T - T + U = T + U,$$

- Si $L = T - U$, con $U = V(q) + \sum_\beta \dot{q}_\beta \Pi_\beta(q)$

¿Será T+U constante? ¿lo será T+V?

$T = \sum_{i,j} \frac{1}{2} c_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ ¿¿¿¿¿¿¿ $E(q,\dot{q}) \equiv T + U$?????

Definición de momento canónico conjugado a una coordenada q_j .

Supongamos un sistema **lagrangiano** con lagrangiana L . El momento canónico, p_j , conjugado a la coordenada q_j es la función de $q, \dot{q}, t$, definida por:

$$p_j(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}.$$

- **Definición:** En un sistema **lagrangiano** se denomina coordenada cíclica a aquella coordenada generalizada que no aparece explícitamente en la expresión de la lagrangiana.

- **Ley de conservación:** El momento canónico conjugado a una coordenada cíclica es una constante del movimiento.

  Demostración: sea q_k la coordenada cíclica, $\Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0.$ De la ecuación de Lagrange correspondiente a esa coordenada se tiene:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad \Rightarrow \quad p_k(q,\dot{q},t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = const.$$

.- Sea $L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ la lagrangiana de un sistema lagrangiano de tres grados de libertad. Se introduce en el sistema las dos ligaduras no holónomas $(q_2 + q_1^2)\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + (q_1 + q_3^2)\dot{q}_3 + 1 = 0$ y $(q_1 + q_2^2)\dot{q}_2 + \dot{q}_3 - 1 = 0.$ Es correcta la siguiente ecuación:

A)Ecuaciones del movimiento

B)Función energía E.

C)Variación de E con el tiempo.

Las leyes de conservación están relacionadas con simetrías y con las llamadas transformaciones *invariantes* del sistema.

A veces la Lagrangiana es independiente de t**, o de una coordenada** q siendo entonces L invariante ante traslaciones temporales o espaciales.

El IMPORTANTE **Teorema de Noether** **(Amelie Emmy Noether, 1832-1935)**

establece que

A cada simetría de la lagrangiana le corresponde una ley de conservación

Si ***L*** es invariante ante traslaciones en el tiempo, en el espacio o ante rotaciones, se dan las leyes de conservación de la energía, del momento lineal o del angular, respectivamente
 (consecuencias de la homogeneidad del tiempo, y de la homogeneidad e isotropía del espacio) .

I.2.5 Transformaciones invariantes. (Teorema de Noether)

Existen transformaciones puntuales invertibles dando ecuaciones explicitas de Lagrange exactamente iguales en la nuevas coordenadas: Se dice que las ecuaciones son invariantes a este tipo de transformaciones (transformaciones de invariancia).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'(q',\dot{q}',t)}{\partial \dot{q}'} - \frac{\partial L'(q',\dot{q}',t)}{\partial q'} = 0 \quad \Rightarrow \quad q'(t) \qquad q'(t) \equiv q'(q(t),t)$$

Teorema de Noether

• **Transformaciones invariantes**.

Ventaja de la dinámica Lagrangiana:

la libertad de escoger el sistema de coordenadas generalizadas.

Si *q* es un conjunto de coordenadas, cualquier transformación invertible *q'=q'(q,t),* define otro conjunto de coordenadas *q' dando nueva lagrangiana:* $L'(q',\dot{q}',t)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'(q',\dot{q}',t)}{\partial \dot{q}'}-\frac{\partial L'(q',\dot{q}',t)}{\partial q'}=0$$

?

$$L'(q',\dot{q}',t) = L(q,\dot{q},t)\Big|_{q\to q(q',t)}$$

P. de Hamilton $\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = 0,$

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = \delta\int_{t_1}^{t_2} L'(q',\dot{q}',t)dt = 0,$$

De forma general las ecuaciones explícitas del movimeiento tienen un **aspecto muy diferente** en las antiguas y en las nuevas coordenadas.

Pero para un sistema Lagrangiano dado podría existir una transformación en las que las ecuaciones **explícitas** del movimiento fueran las mismas en las antiguas y en las nuevas coordenanadas. Se dice entonces que el sistema es invariante bajo esa transformacion. Dicha transformación se llama **transformación invariante.**

Una transformación es **invariante** si la **Lagrangiana es invariante**. Es decir:

$$L'(q',\dot{q}',t) = L(q',\dot{q}',t) + \frac{d\psi\,(q',t)}{dt}$$

Si la **Lagrangiana es invariante:**

$$L'(q',\dot{q}',t) = L(q',\dot{q}',t) + \frac{d\psi\ (q',t)}{dt}$$

$$L(q,\dot{q},t)\Big|_{q->q(q',t)} = L(q',\dot{q}',t) + \frac{d\psi\ (q',t)}{dt}$$

O también:

$$L(q,\dot{q},t) = L(q',\dot{q}',t)\Big|_{q'->q'(q,t)} + \frac{d\psi\ (q,t)}{dt}$$

Cada transformación invariante se le dice "simetría" y a cada simetría le corresponde una ley de conservación (Noether).

I.2.4 Ecuaciones canónicas de Hamilton.

Como en Termodinámica, pueden aplicarse transformaciones de Legendre para tener funciones con variables independientes distintas:

Ejm. F es transformada de Legendre de la energía interna U:

$$dU = TdS - PdV, \quad \text{sea} \quad F = U - PV \Rightarrow dF = -PdV - SdT$$

Análogamente, puede definirse otra función H con otras variables independientes distintas las de la Lagrangiana: (ver pág. 15)

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \Rightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(q,p,t) \quad , \qquad H(q,p,t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - L(q,\dot{q},t) \qquad (94)$$

Diferenciando H(q,p,t) se obtendrán 2f ecuaciones diferenciales de primer grado:

$$dH = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad = \sum_{j=1}^{f} \dot{q}_j \, dp_j - \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

es decir

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_j} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q_j}, \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j \quad , \qquad \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} = -\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial t} \qquad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

__Equivalentemente, puede pasarse de H a L:__

$$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_j} = \dot{q}_j, \qquad \Rightarrow \quad p_j = p_j(q,\dot{q},t),$$

$$L(q,\dot{q},t) \equiv \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i p_i - H(q,p,t)$$