El sistema hamiltoniano correspondiente a una partícula puntual de masa unidad tiene por Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^{\,2} + \frac{p_\phi^{\,2}}{r^2} + p_z^{\,2} \right) + \frac{1}{2}\left(\omega^2 + \Omega^2\right) r^2 + \frac{1}{2}\omega^2 z^2 - \Omega\ p_\phi \ ,$$

donde los momentos canónicos $p = (p_r, p_\phi, p_z)$ corresponden a las coordenadas generalizadas $q \equiv (r, \phi, z)$ -coordenadas polares cilíndricas-. Si ω y Ω son constantes positivas, se pide:

A.- (5,5 puntos)

1) Ecuaciones de Hamilton del movimiento.

2) Dar dos constantes (independientes) del movimiento.

3) Plantear la ecuación de *Hamilton-Jacobi*, para la acción $S(t, r, \phi, z)$, usando el método de separación de variables hasta donde sea posible. *(1,5 puntos)*

4) Evaluar la variable de acción I_ϕ asociada a ϕ.

5) Demostrar que p_ϕ y la función $F_1 = p_z^2 + \omega^2 z^2$ están en *involución*.

B.- (4,5 puntos)

6) Momentos canónicos p_i en función de las variables generalizadas $(q, \dot{q})$.

7) Lagrangiana $L = L(q, \dot{q})$ del sistema.*(1,5 puntos)*

1) Ecuaciones: $$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \to \begin{cases} \dot{r} = p_r \\ \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi}{r^2} - \Omega \\ \dot{z} = p_z \end{cases} \; ; \; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \to \begin{cases} \dot{p}_r = \dfrac{p_\phi{}^2}{r^3} - (\omega^2 + \Omega^2) r \\ \dot{p}_\phi = 0 \\ \dot{p}_z = -\omega^2 z \end{cases}}$$

2) Dos constantes: $$\boxed{\begin{aligned} E &= H(q, p) = \alpha_0 \quad (cte.) \\ p_\phi &= mr^2(\dot{\phi} + \Omega) = \alpha_1 \quad (cte.) \end{aligned}}$$

También lo son: $C_2 = p_z^2/2 + \omega^2 z^2/2$ y $C_3 = p_r^2/2 + p_\phi^2/2r^2 + (\Omega^2 + \omega^2) r^2/2$

4) *Aplicación del Método de Hamilton-Jacobi para la integración. Partiendo de la Acción S:*

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H(q_1,\ldots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t)=0, \quad \text{(E.H.J)} \qquad para\ \ H(q,p,t)$$

en lugar de 2n-ecuaciones diferenciales de las ecuaciones de Hamilton, se tendrá una

ecuación diferencial para S (generatriz de tipo canónico 2) con integral **completa** será tipo

$$S=S(t,q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n). \qquad S(t,q_1,\ldots,q_n,P_1,\ldots,P_n)$$

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i=\frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad H'=H+\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (i=1,\ldots,n), \qquad \Rightarrow H'\equiv 0$$

y las nuevas variables:

$$\dot{Q}_i=\frac{\partial H'}{\partial P_i}=0, \; \dot{P}_i=-\frac{\partial H'}{\partial Q_i}=0,$$

$$\begin{array}{l} Q_i=const=\beta_i, \\ P_i=const=\alpha_i, \\ i=1,\ldots,n, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} p_i=\dfrac{\partial S(t,q,\alpha)}{\partial q_i}, \\ \beta_i=\dfrac{\partial S(t,q,\alpha)}{\partial \alpha_i}, \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} q_i=q_i(t,\alpha,\beta), \\ p_i=p_i(t,\alpha,\beta), \end{array}} \Rightarrow \begin{array}{l} q_i(t_0)=q_i(t_0,\alpha,\beta), \\ p_i(t_0)=p_i(t_0,\alpha,\beta), \end{array}$$

Como la Hamiltoniana es independiente del tiempo, y hay variables cíclicas, la ecuación

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1,\ldots,q_3,\frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial S}{\partial q_3}) = 0, \quad \text{(E.H.J)}$$

Puede resolverse probando separación de variables sucesivamente, con el tiempo sólo, se prueba:

$$S = W(q_1,\ldots,q_3,\alpha_1,\ldots,\alpha_3) - E_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_3)t,$$

Donde W es la **acción reducida , con :**

$$S = W(r,z) + \alpha_1\phi - E_0 t$$

La ecuación en derivadas parciales sería:

$$H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right] + \frac{\Omega^2+\omega^2}{2}r^2 - \Omega\frac{\partial S}{\partial \phi} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

dando:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{r^2}\right] + \frac{\Omega^2+\omega^2}{2}r^2 - \Omega\alpha_1 = \alpha_0 = E_0$$

Pero aún puede realizarse otra separación de variables para *W(r,z)* según: $S = -\alpha_0 t + \alpha_1\phi + W_r(r) + W_z(z)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{dW_r}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{2r^2} + \frac{\Omega^2+\omega^2}{2}r^2 = \alpha_2 \\ y \\ \frac{1}{2}\left(\frac{dW_z}{dz}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2}z^2 = \alpha_0 - \Omega\alpha_1 - \alpha_2 \end{cases}$$

Son dos ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas y resolubles por integración directa. La contribución en la variable radial se identifica con un problema de una partícula en un y **potencial central** la contribución en *z* con una problema en un potencial de un movimiento **armónico simple**:

$$\begin{cases} W_r = \int dr\sqrt{2\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1^2}{r^2} - (\Omega^2+\omega^2)r^2} \\ W_z = \sqrt{2(\alpha_0 - \Omega\alpha_1 - \alpha_2) - \omega^2 z^2} \end{cases}$$

Ambas integrales son prácticamente inmediatas o se hallan en tablas de integrales elementales. Una vez encontradas las *W* (y la *S*) la solución del problema se obtiene de:

$$Q_i = const = \beta_i, \quad P_i = const = \alpha_i, \quad i = 0,1,2$$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad y \quad H' = 0,$$

$$p_i = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{\partial E_0}{\partial \alpha_i} t + \beta_i = \frac{\partial W(q,\alpha)}{\partial \alpha_i},$$

Observar que las integrales que dan las Q aparecerían también en la resolución del problema por el método de integración directa, ejm. para la parte radial:

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = p_r \\ \dot{p}_r = \ddot{r} = p_\phi^2 / r^3 - (\Omega^2 + \omega^2) r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\dot{r}^2}{2} + \dfrac{p_\phi^2}{2r^2} + \dfrac{(\Omega^2+\omega^2)}{2} r^2 = cte. = \alpha_2 \\ t = \displaystyle\int_r \frac{dr}{\sqrt{2\alpha_2 - \dfrac{\alpha_1^2}{r^2} - (\Omega^2+\omega^2)r^2}} \end{cases}$$

3) con $S = -\alpha_0 t + \alpha_1\phi + W(r,z)$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + \frac{\alpha_1^2}{r^2}\right] + \frac{\Omega^2 + \omega^2}{2} r^2 - \Omega\alpha_1 = \alpha_0$$

finalmente, puede ponerse $S = -\alpha_0 t + \alpha_1\phi + W_r(r) + W_z(z)$, el problema es de variables separables (resoluble, hay tres constantes):

4) $\boxed{I_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi \; d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_1 d\phi = p_\phi = \alpha_1}$

5) Hay que probar que $[p_\phi, F_1] = 0$, se verifica por cálculo directo $\boxed{[p_\phi, F_1] = 0 - 1\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = 0.}$

6) Están dadas en 1) $\boxed{p_r = \dot{r} \;,\; p_\phi = r^2(\dot{\phi} + \Omega) \;\; y \;\; p_z = \dot{z}}$

7) $L(q,\dot{q}) = \dot{q}\bullet p(q,\dot{q}) - H(q, p(q,\dot{q})) =$ $\boxed{\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}\omega^2(r^2 + z^2) + \Omega\;\dot{\phi}\;r^2}$

Comentarios y Cuestiones:

¿cuáles son los puntos de equilibrio en las ecuaciones de movimiento del sistema?

¿Son estables?

¿Por qué las soluciones $r(t)$ y $z(t)$ son periódicas en t?

¿Habrá soluciones periódicas?

Interpretación física de la hamiltoniana inicial.

Ejercicio 1 (Una hora)

Se considera un sistema lagrangiano de dos grados de libertad con lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - U,$$

en donde $U = \frac{1}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right) + \alpha\left(\dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_2 q_1\right)$, siendo α una constante. Se pide:

A.- (7 puntos)

1) Fuerzas generalizadas Q_1 y Q_2 asociadas al potencial U.
2) Ecuaciones de Lagrange del movimiento.
3) Función de energía $E = H(q,\dot{q},t)$, función de las variables generalizadas $(q,\dot{q})$.
4) Una constante de movimiento.

B.- (3 puntos , 1.5+1.5)

Si se incorpora al sistema la ligadura (*no holónoma*) $q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 = k$, con $k \neq 0$,

8) Nuevas ecuaciones de Lagrange del movimiento usando el método de los multiplicadores de Lagrange (notarlos como μ).

9) Para la función E obtenida en 3), evaluar en este caso $\dot{E} = dE/dt$.

1)Aplicando la definición $\begin{cases} Q_1 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_1} - \dfrac{\partial U}{\partial q_1} = -q_1 \\ Q_2 = \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial U}{\partial \dot{q}_2} - \dfrac{\partial U}{\partial q_2} = -q_2 \end{cases}$

2)Por la ecuaciones de Euler-Lagrange: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + q_2 = 0 \end{cases}$

Observar que el término $\alpha \ (\dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_2 q_1)$ es de la forma $\dfrac{dF}{dt} = \dfrac{d}{dt}\alpha \ (q_1 q_2)$

3)De la definición: $H(q,\dot{q}) = \dot{q}\dfrac{\partial L}{\partial q} - L = \ E = \dfrac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dfrac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)$

4) Como $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0, \ E = cte.$

Nota: también son constantes

$\dot{q}_2 q_1 - \dot{q}_1 q_2$, y $(q_j^2 + \dot{q}_j^2)$ $para$ $j = 1,2$. (sólo dos constantes están en involución).

5) $\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 - \alpha\, q_2 \\ p_2 = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2 - \alpha\, q_1 \end{cases}$

6) Con 5), $H(q,p) = \dfrac{1}{2}[\, (p_1 + \alpha\, q_2)^2 + (\, (p_2 + \alpha\, q_1)^2] + \dfrac{1}{2}(\, q_1^2 + q_2^2\,)$

7) $\dot{q}_j = \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \rightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 + \alpha\, q_2 \\ \dot{q}_2 = p_2 + \alpha\, q_1 \end{cases}$ y $\dot{p}_j = -\dfrac{\partial H}{\partial q_j} \rightarrow \begin{cases} \dot{p}_1 = -\alpha\, p_2 - (1+\alpha^2) q_1 \\ \dot{p}_2 = -\alpha\, p_1 - (1+\alpha^2) q_2 \end{cases}$

8) Sólo hay un multiplicador de Lagrange (se considera la ligadura anholónoma tipo $\sum_r B_{rk}(q,t)\dot{q}_k - B_r(t) = 0$ con $r = 1$ y $B_r = k$.) se tiene:

:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \mu \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + q_1 = \mu \; q_2 \\ \ddot{q}_2 + q_2 = -\mu \; q_1 \end{cases} \quad junto \;\; con \; \phi = q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2 - k = 0$$

9) Con E de 1) y con las ecuaciones de 8):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial q}\cdot\dot{q} + \frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\cdot\ddot{q} = q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 + \dot{q}_1\ddot{q}_1 + \dot{q}_2\ddot{q}_2 = \mu\,(q_2\dot{q}_1 - \dot{q}_2 q_1) \boxed{= \mu\, k = \dot{E}}$$

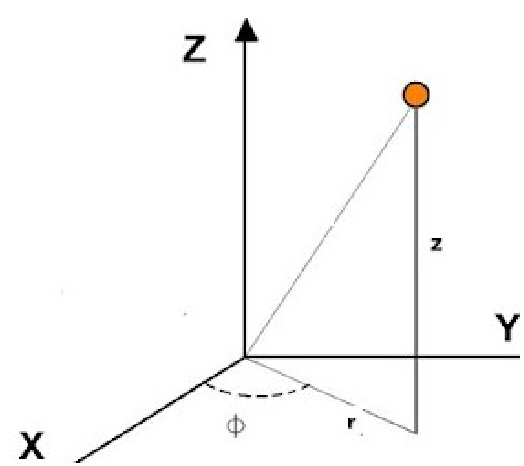
¿Puede resolverse el sistema de ecuaciones en los casos con y sin ligadura?

Ejercicio 2 (Una hora)

El sistema lagrangiano correspondiente a una partícula puntual de masa m y carga q que se mueve bajo la acción de su peso y de un campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0\vec{k} = (m\Omega/q)\vec{k}$, tiene por Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \frac{1}{2}m\Omega\, r^2\dot{\phi}$$

usando coordenadas cilíndricas como coordenadas generalizadas $q \equiv (r, \phi, z)$. Se pide



A.- (6 puntos, 1.5 puntos cada apartado)

1) Momentos canónicos p_r, p_ϕ y p_z.
2) Hamiltoniana del sistema $H(q,p)$.
3) Dos constantes del movimiento, dadas en función de las variables generalizadas $(q,\dot{q})$.
4) Plantear la ecuación de *Hamilton-Jacobi* para la acción $S(r,\phi,z,t)$ usando el método de separación

B.- (4 puntos)

5) Probar que la la ecuación para la variable radial adopta la forma $m\ddot{r} + a/r^3 + br = 0$ y

y dar el valor de *a* y *b*. *(2 puntos)*

6) Estudiar la estabilidad del punto de equilibrio de esta ecuación (trazar el diagrama de fases aproximado)
7) Variable de acción I_ϕ asociada a ϕ -si se impone la ligadura $z = 0$ $(\dot{z} = 0)$ -

1) Los tres momentos canónicos: son $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow \begin{cases} p_r = m\dot{r} \\ p_\phi = mr^2(\dot{\phi} + \Omega/2) \\ p_z = m\dot{z} \end{cases}$

2) De la definición: $H(q,p) = p \cdot \dot{q} - L = \dfrac{1}{2m}(p_r^2 + p_z^2 + \dfrac{p_\phi^2}{r^2}) + mgz + \dfrac{1}{8}m\Omega^2 r^2 - \dfrac{1}{2}\Omega\; p_\phi$

3) Dos constantes:

$$\text{como}: \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; E = H(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{z}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + mgz = \alpha_0 \;(cte.)$$

$$\text{y } \phi \text{ es cíclica:} \qquad p_\phi = mr^2(\dot{\phi} + \frac{\Omega}{2}) = \alpha_1 \quad (cte.)$$

También

$$\alpha_2 = p_z^2/(2m) + mgz \;\; y \;\; \alpha_3 = p_r^2/(2m) + p_\phi^2/(2mr^2) + m\Omega^2 r^2/8$$

son constantes del movimiento **fácilmente identificables**,el problema es de física elemental.

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0\rightarrow\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2\right]+mgz+\frac{m\Omega^2r^2}{8}-\frac{\partial S}{\partial \phi}\frac{\Omega}{2}=-\frac{\partial S}{\partial t}$$

4) Basta dar: con $S=-\alpha_0 t+\alpha_1\phi+W(r,z)$:

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2+\frac{\alpha_1^2}{r^2}\right]+mgz+\frac{1}{8}m\Omega^2r^2-\frac{\Omega}{2}\alpha_1=\alpha_0}$$

aunque **también** puede ponerse $S=-\alpha_0 t+\alpha_1\phi+W_1(r)+W_2(z)$ pues el problema es de variables separables (obviamente el problema es resoluble).

6) De las ecuaciones del movimiento para *r y* con la conservación de p_ϕ

$$\begin{cases}\dot r=\dfrac{\partial H}{\partial p_r}=\dfrac{p_r}{m}\\[2ex] \dot p_r=m\ddot r=\dfrac{p_\phi^2}{r^3}-\dfrac{1}{4}m\Omega^2 r\end{cases}\rightarrow\boxed{\begin{cases}a=-\dfrac{p_\phi^2}{m}\\[2ex] b=\dfrac{1}{4}m\Omega^2\end{cases}}$$

(la posición de **equilibrio** es **estable**, r(t) **periódicas**)

7) Dado que p_ϕ es constante, y hay soluciones periódicas para $r(t)$ en el movimiento restringido (al plano z=0) tiene sentido definir variables de acción I_ϕ e I_r .

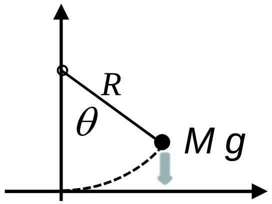
$$\boxed{I_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi \ d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \alpha_1 d\phi = p_\phi}$$

8) Por construcción de la teoría de Hamilton-Jacobi: $\boxed{H'(Q,P,t) = 0.}$

- **Ejemplos.**

  Determinad la Hamiltoniana y las ecuaciones de Hamilton de los siguientes sistemas:

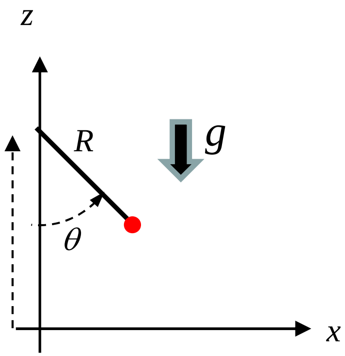
a) Péndulo simple



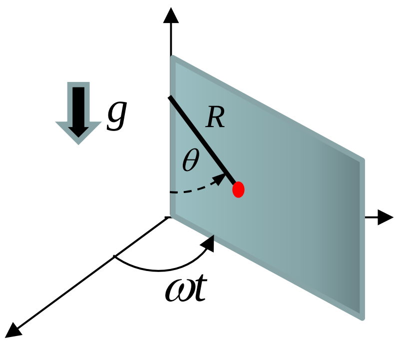
b) Partícula relativista con Lagrangiana $L = -mc^2\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2} - U(x)$

c) Péndulo con excitación paramétrica

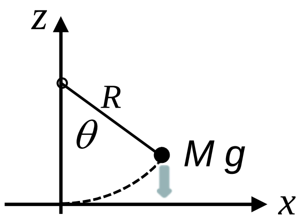
$h = h_0(1+\varepsilon\cos(\omega t)).$



d) Péndulo simple contenido en un plano que rota alrededor del eje vertical con velocidad angular constante.



a) Péndulo simple



$$L = \tfrac{1}{2} MR^2\dot{\theta}^2 - RMg\left(1-\cos\theta\right), \qquad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p}{MR^2},$$

$$H(\theta, p) = E\Big|_{\dot{\theta}(p,\theta)} = \tfrac{1}{2MR^2}\, p^2 + RMg(1-\cos\theta),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{MR^2}, \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -RMg\sin\theta,$$

b) Partícula relativista con Lagrangiana $L = -mc^2\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2} - U(x)$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}, \quad \Rightarrow \quad (\dot{x}/c)^2 = \frac{\left(p/mc\right)^2}{1+\left(p/mc\right)^2},$$

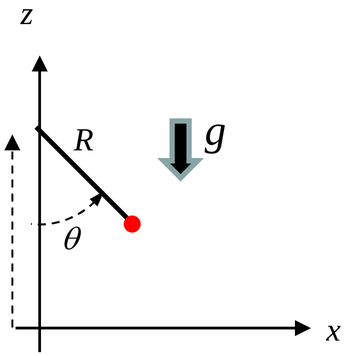
$$E(x,\dot{x}) = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}} + U(x),$$

$$H(x,p) = E\Big|_{\dot{x}(x,p)} = mc^2\sqrt{1+(p/mc)^2} + U(x),$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{(p/m)}{\sqrt{1+(p/mc)^2}}, \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x}, \end{cases}$$

c) Péndulo con excitación paramétrica

$$h = h_0(1+\varepsilon\cos(\omega t)).$$



$$L = \tfrac{1}{2}m\left(R^2\dot\theta^2 + \cancel{(\varepsilon\omega h_0)^2\sin^2(\omega t)} - 2\varepsilon\omega h_0 R\dot\theta\sin\theta\sin(\omega t)\right)$$
$$-mg(\cancel{h} - R\cos\theta),$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta} = m\left(R^2\dot\theta - \varepsilon\omega h_0 R\sin\theta\sin(\omega t)\right),$$

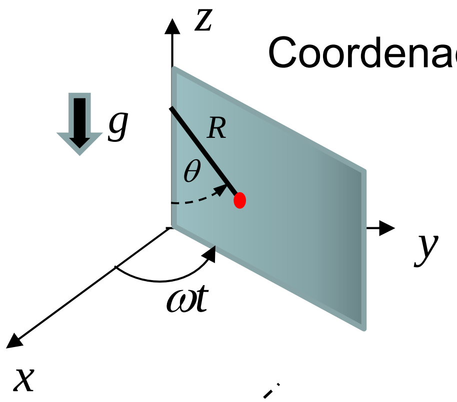
$$\Rightarrow \quad \dot\theta = \frac{p}{mR^2} + \frac{\omega}{R}\varepsilon h_0\sin\theta\sin(\omega t),$$

$$E = \left(\dot\theta p - \tfrac{1}{2}m\left(R^2\dot\theta^2 - 2\varepsilon\omega h_0 R\dot\theta\sin\theta\sin(\omega t)\right) - mgR\cos\theta\right)\Big|_{\dot\theta},$$

$$H(\theta,p,t) = \tfrac{1}{2}m\left(\frac{p}{mR} + \omega\varepsilon h_0\sin\theta\sin(\omega t)\right)^2 - mgR\cos\theta,$$

$$\begin{cases} \dot\theta = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{p}{mR^2} + \dfrac{\omega}{R}\varepsilon h_0\sin\theta\sin(\omega t), \\[2ex] \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial\theta} = -m\left(\dfrac{p}{mR} + \omega\varepsilon h_0\sin\theta\sin(\omega t)\right)\omega\varepsilon h_0\cos\theta\sin(\omega t) - mgR\sin\theta, \end{cases}$$

d) Péndulo simple contenido en un plano que rota alrededor del eje vertical con velocidad angular constante.



Coordenada generalizada: $q=\theta,\quad \vec{r}=R\sin\theta(\vec{i}\cos\omega t+\vec{j}\sin\omega t)+\vec{k}R\cos\theta,$

$$L=T-mgz=\tfrac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2+\omega^2R^2\sin^2\theta)-mgR(\cancel{1}-\cos\theta),$$

$$L=\tfrac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2+\tfrac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta+mgR\cos\theta,$$

$$L=\cancel{mR^2}\left(\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2+\tfrac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos\theta\right),\quad \omega_0\equiv\sqrt{\frac{g}{R}}=$$

Frecuencia de oscilación de péndulo (ángulo pequeño)

Principio de Hamilton: $\delta S=\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}Ldt\right)=\cancel{mR^2}\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}(\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2+\tfrac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta+\omega_0^2\cos\theta)dt\right)=0,$

$$p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\dot{\theta},\quad E(\theta,\dot{\theta})=\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2-\tfrac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta-\omega_0^2\cos\theta,$$

$$\boxed{H(\theta,p)=\tfrac{1}{2}p^2-\tfrac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta-\omega_0^2\cos\theta,}\;\Rightarrow\;\begin{cases}\dot{\theta}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=p,\\[2ex] \dot{p}=-\dfrac{\partial H}{\partial\theta}=\omega^2\sin(2\theta)-\omega_0^2\sin\theta,\end{cases}$$

□ **Êjercicio.**

Determinad la Lagrangiana de un sistema con Hamiltoniana:

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2}p^2 - q^2 p + \tfrac{1}{2}q^2,$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q^2, \Rightarrow \quad p = \dot{q} + q^2,$$

$$L(q,\dot{q}) = \left(\dot{q}p - H\right)\Big|_{p=\dot{q}+q^2} = \tfrac{1}{2}(\dot{q} + q^2)^2 - \tfrac{1}{2}q^2,$$

Estudio del sistema Hamiltoniano $H(q,p)$

$$\begin{cases} \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p}, \\ \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \\ q(t_0) = q_0, \quad p(t_0) = p_0, \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial q} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \equiv J \cdot \nabla H, \\ x(t_0) \equiv x_0 \equiv \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $H(q,p) = const.$

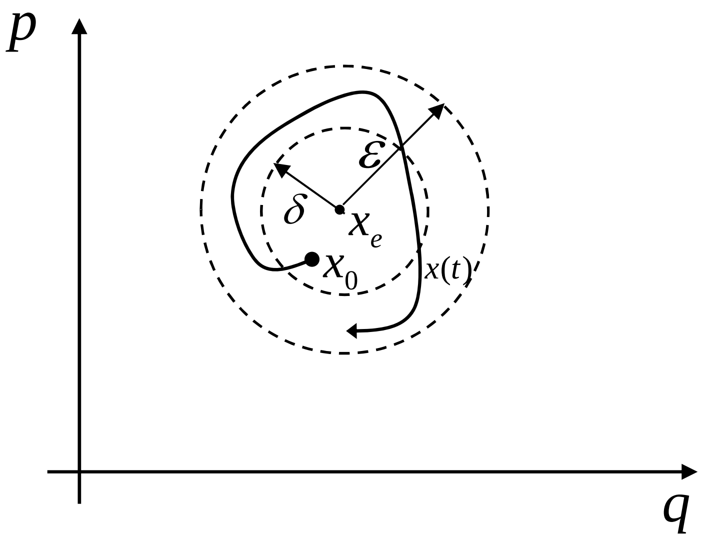
- **Puntos de equilibrio (singulares o críticos):**

$$x_e = \begin{pmatrix} q_e \\ p_e \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{x_e} = 0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_{x_e} = 0,$$

En los puntos de equilibrio: $\dfrac{dq}{dt} = 0, \quad \dfrac{dp}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_e \equiv \begin{pmatrix} q_e \\ p_e \end{pmatrix} \quad \forall t,$

Estabilidad de un punto de equilibrio. Definición:

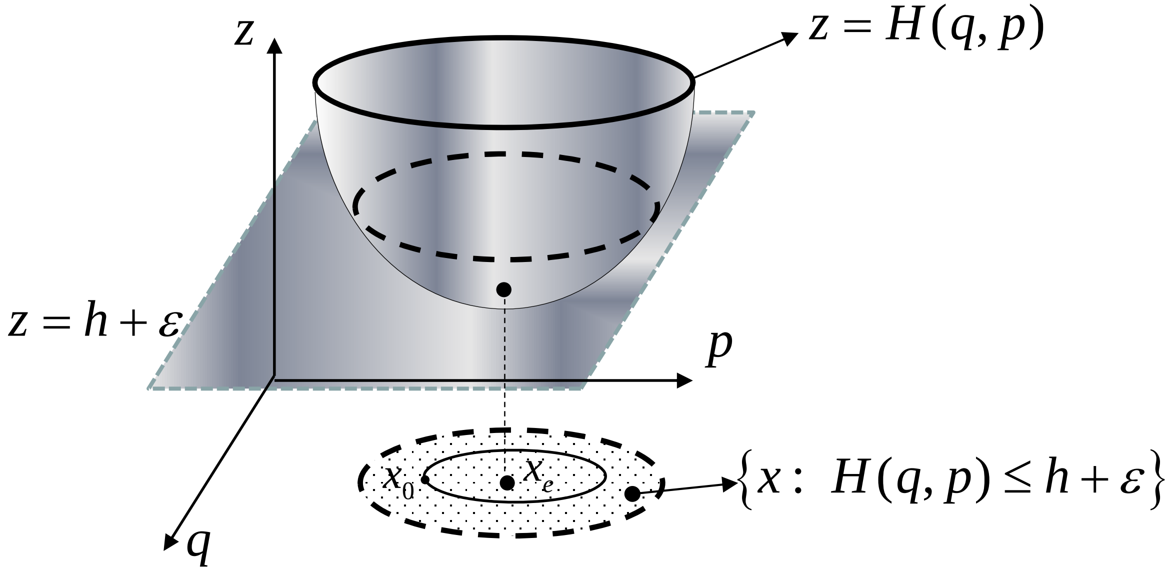
Un punto de equilibrio x_e se dice que es estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo x_0 que verifique $\|x_0 - x_e\| < \delta$, la solución $x(t)$, con condición inicial x_0, satisface para todo $t > t_0$ la desigualdad $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$.



Teorema de Lagrange (estabilidad de un punto de equilibrio)

Si la posición de equilibrio x_e es un extremo estricto (máximo o mínimo) de $H(q,p)$, entonces dicha posición es de equilibrio estable.

Sea $H(q_e,p_e)=h$. Para $\varepsilon>0$, suficientemente pequeño, y suponiendo que el extremo estricto es un mínimo, la componente conexa del conjunto $\{x:\ H(q,p)\leq h+\varepsilon\}$ conteniendo a x_e será un entorno arbitrariamente pequeño de x_e. Dicha región es invariante durante el movimiento del sistema ya que $H(q,p)$ es una integral primera. Por lo tanto, una condición inicial, x_0, próxima a x_e, dará lugar a una trayectoria en el espacio de fases que se mantiene todo el tiempo próxima a x_e.



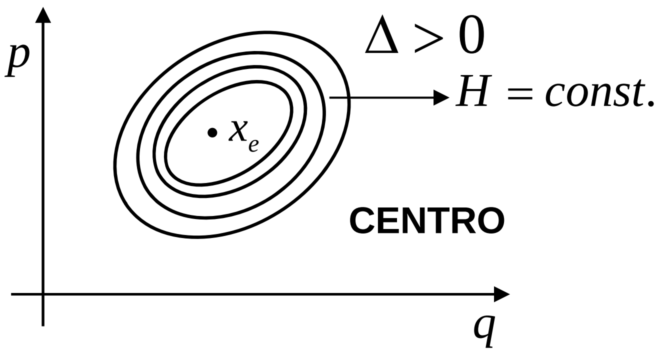
- **Comportamiento del flujo de fase en el entorno de los puntos de equilibrio.**

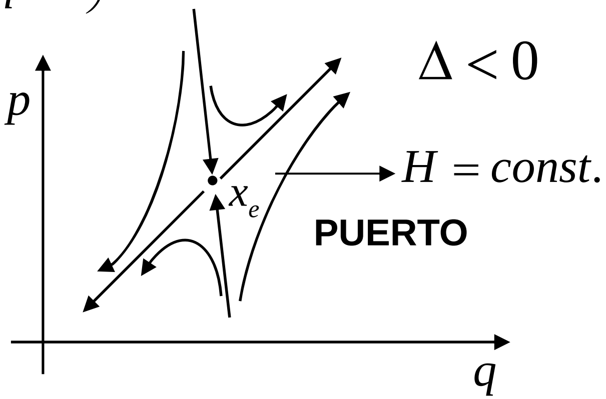
$$H(q,p)-H(q_e,p_e)\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial q^2}(q-q_e)^2+\frac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p^2}(p-p_e)^2+2\frac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p\partial q}(q-q_e)(p-p_e)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(x-x_e)^T\cdot A_e\cdot(x-x_e),\quad A_e\equiv\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p\partial q}\\ \dfrac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p\partial q} & \dfrac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p^2}\end{pmatrix},$$

$$\Delta\equiv\det A_e=\frac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p^2}\frac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 H(q_e,p_e)}{\partial p\partial q}\right)^2\neq 0,$$



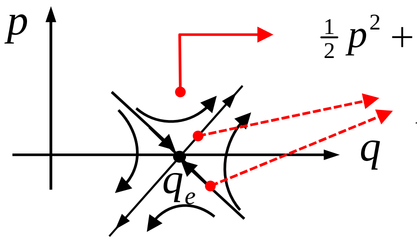


Caso particular: $L=\frac{1}{2}\dot{q}^2-U(q),$ ➡ $H=\frac{1}{2}p^2+U(q),$

Extremos de *H* : $\dfrac{\partial H}{\partial p}=p=0,\Rightarrow\quad p_e=0,\ \dfrac{\partial H}{\partial q}=U'(q_e)=0,\Rightarrow\quad q=q_e,$ Mínimos o máximos de *U:* $\left(U''(q_{\ddot{e}})\neq 0,\right)$

$$H(q,p)-H_e\simeq\tfrac{1}{2}p^2+\tfrac{1}{2}U_e''(q-q_e)^2,$$

$U_e''<0,\quad \max\ de\,U;$ ***H* no es extremo estricto !**



$\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}U_e''(q-q_e)^2=const$

$p=\pm\sqrt{-U_e''}(q-q_e),$

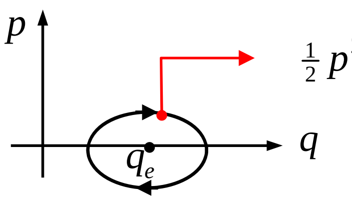
Linealización ec. Hamilton

$$\boxed{\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}\simeq p,\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}\simeq -U_e''(q-q_e),}$$

$$\boxed{\ddot{q}\simeq -U_e''(q-q_e),}\Rightarrow q\simeq A\exp\left(t\sqrt{-U_e''}\right)+B\exp\left(-t\sqrt{-U_e''}\right),$$

$$\Rightarrow p\simeq A\sqrt{-U_e''}\exp\left(t\sqrt{-U_e''}\right)-B\sqrt{-U_e''}\exp\left(-t\sqrt{-U_e''}\right),$$

$U_e''(q_e)>0,\quad \min\ de\ U;$ ***H* sí es extremo estricto !**

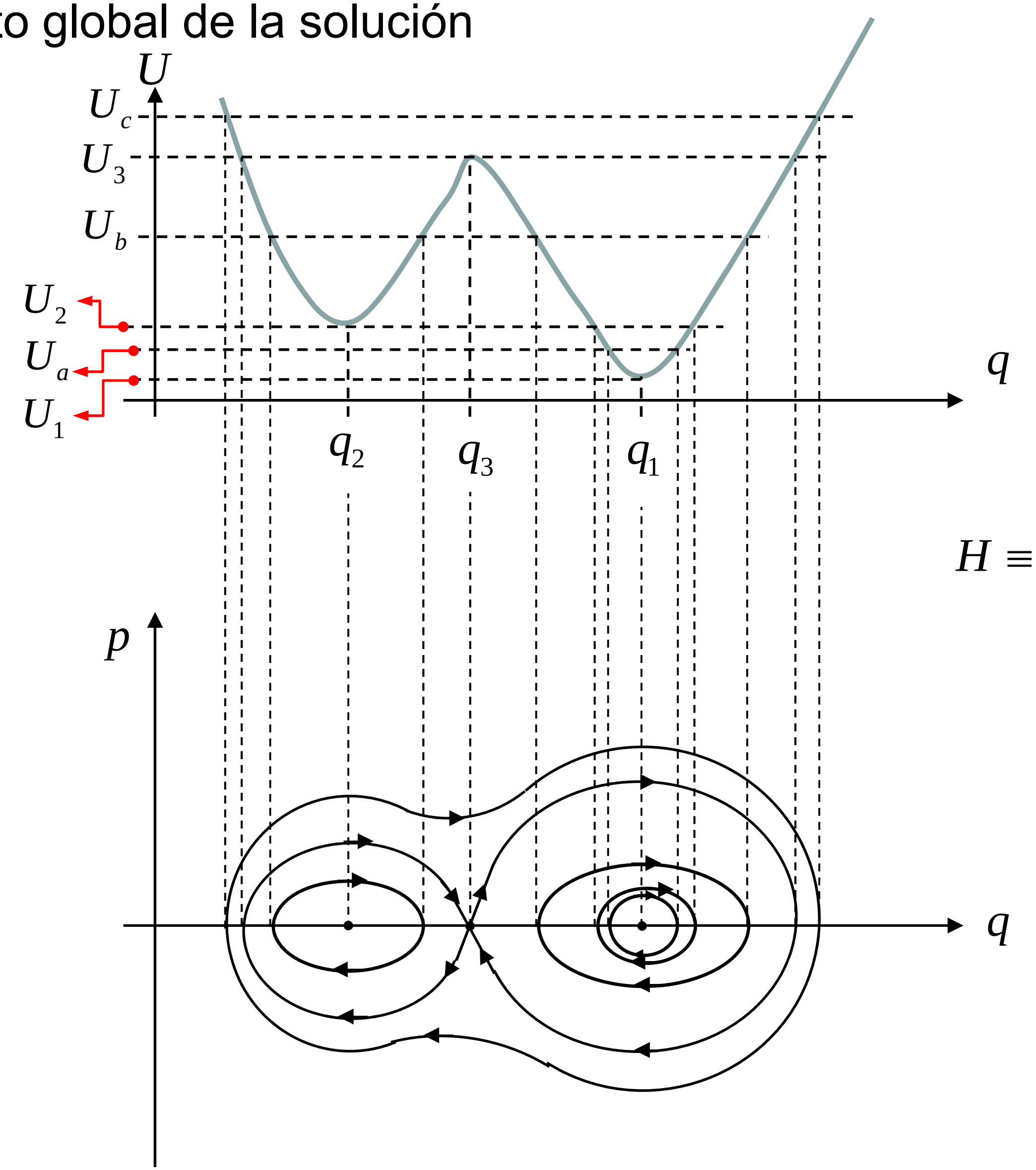


$\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}U_e''(q-q_e)^2=const$

$$\Rightarrow q\simeq A\sin(\omega t+\phi),\quad p\simeq \omega A\cos(\omega t+\phi),$$

$$\omega=\sqrt{U_e''}$$

Comportamiento global de la solución

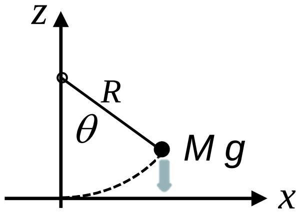


$$H \equiv \tfrac{1}{2}p^2 + U(q) = cte$$

Péndulo simple: Estudiad cualitativamente el entorno de los puntos de equilibrio.

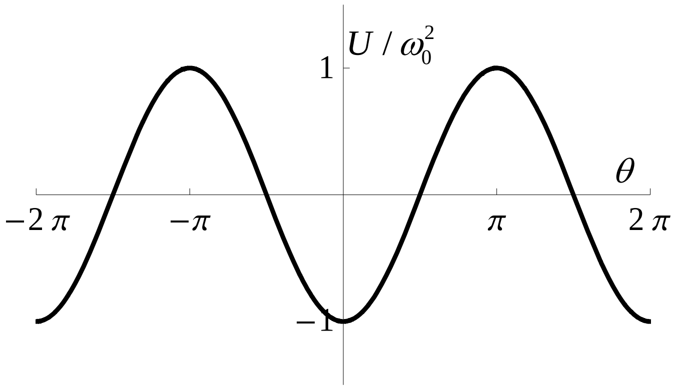
$$L=\tfrac{1}{2}\dot{\theta}^2+\omega_0^2\cos\theta,\quad \omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}},\qquad p=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\dot{\theta},\qquad H=\tfrac{1}{2}p^2-\omega_0^2\cos\theta,$$

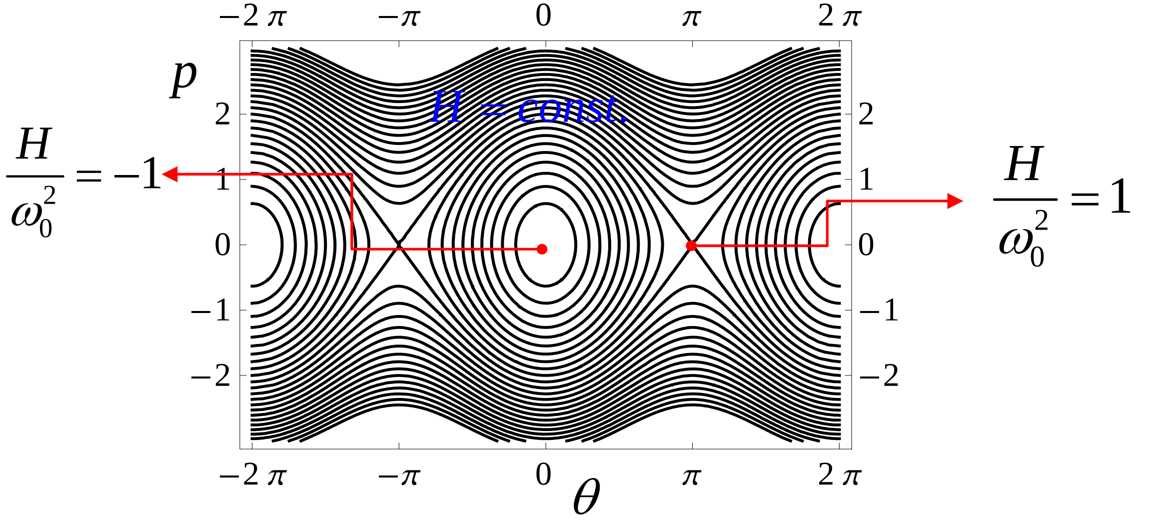
$$U=-\omega_0^2\cos\theta,$$



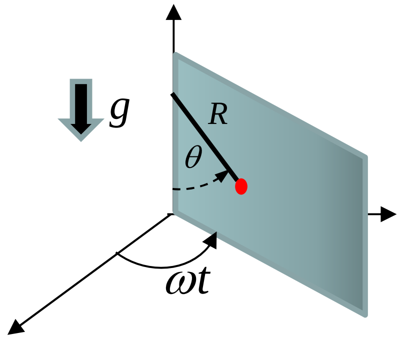
$$H(p,\theta)=H(p,\theta+2\pi),\quad \forall\theta,\qquad \Rightarrow\quad -\pi\le\theta\le\pi,$$

$$U'=\omega_0^2\sin\theta,\quad U''=\omega_0^2\cos\theta,\qquad \Rightarrow\ \theta=0,\quad \min de\,U;\quad \theta=\pm\pi,\quad \max de\,U;$$





- **Péndulo simple contenido en un plano que rota alrededor del eje vertical con velocidad angular constante: estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio, flujo de fase, etc, en función del parámetro ω/ω_0 , siendo $\omega_0=\sqrt{g/R}$.**



$$\boxed{H(\theta,p)=\tfrac{1}{2}p^2-\tfrac{1}{2}\omega^2\sin^2\theta-\omega_0^2\cos\theta\equiv\tfrac{1}{2}p^2+U(\theta),}$$

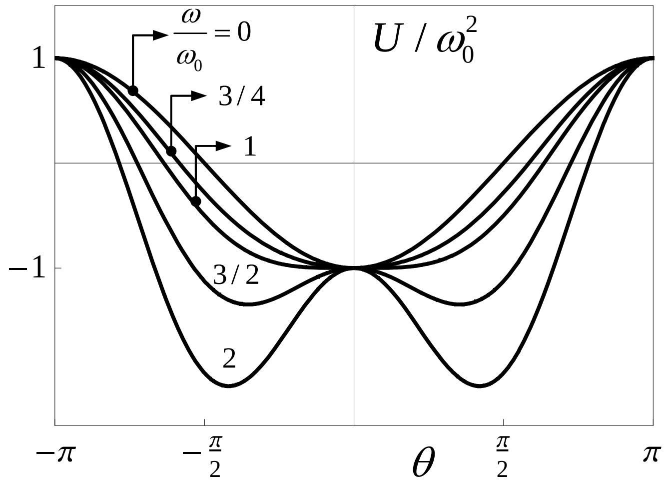
$$U'=-\tfrac{1}{2}\omega^2\sin(2\theta)+\omega_0^2\sin\theta,\quad U''=-\omega^2\cos(2\theta)+\omega_0^2\cos\theta,$$

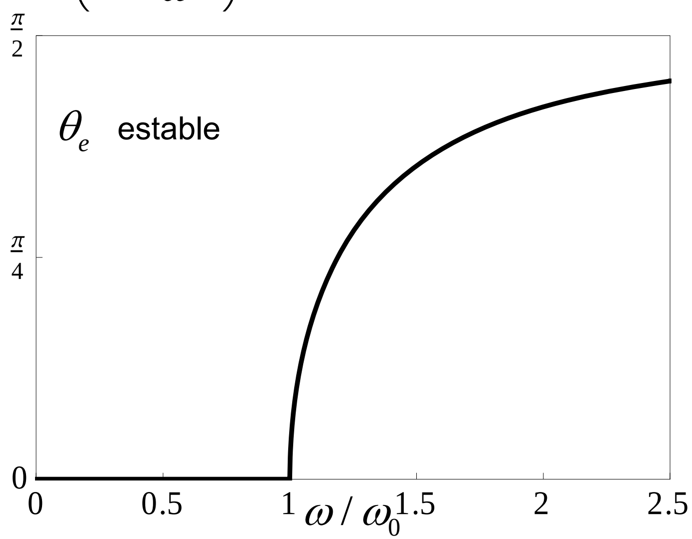
$$U'=0,\Rightarrow\omega_0^2\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\cos\theta\right)\sin\theta=0,\quad\Rightarrow\theta_{e1},\theta_{e2}=0,\pm\pi,$$

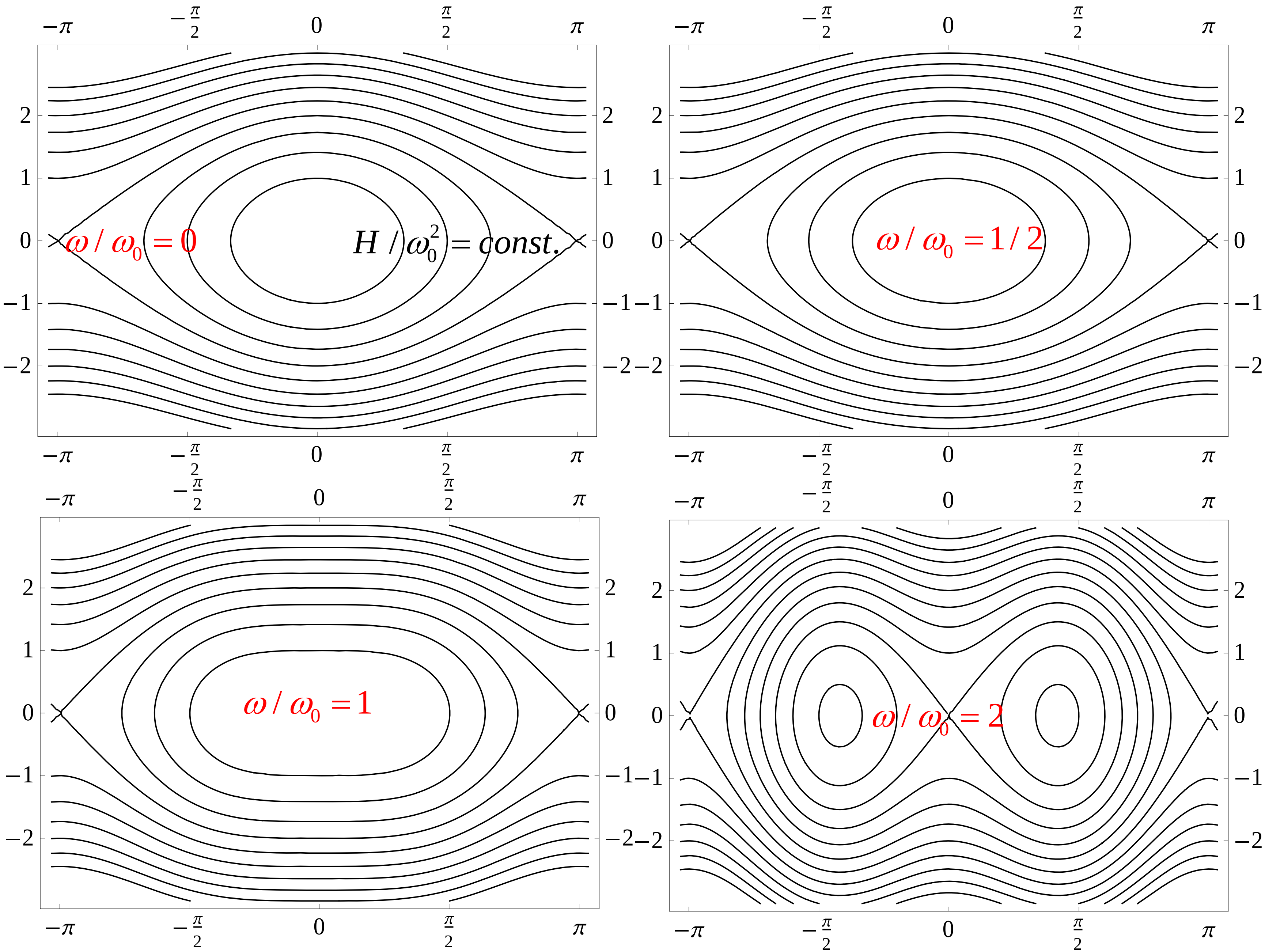
$$\theta_{e3}=\arccos(\omega_0^2/\omega^2)\quad(\omega_0^2\le\omega^2),$$

$$U''(\theta_{e1})=-\omega^2+\omega_0^2,\quad\Rightarrow\omega_0^2>\omega^2\ (\text{min});\quad\omega_0^2<\omega^2\ (\text{max})\ \textit{inestable}$$

$$U''(\theta_{e2})<0,\quad\Rightarrow\text{max}\ \textit{inestable},U''(\theta_{e3})=\left(1-\frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right)\omega^2>0,\quad\omega_0^2<\omega^2\ (\text{min})\ \textit{estable}$$







$\omega / \omega_0 = 0$
$H / \omega_0^2 = const.$
$\omega / \omega_0 = 1/2$
$\omega / \omega_0 = 1$
$\omega / \omega_0 = 2$

- **Tipos de funciones generatriz**: $pdq - PdQ = dF,$

a) Tipo 1: $F = F_1(q,Q), \quad pdq - PdQ = \frac{\partial F_1}{\partial q}dq + \frac{\partial F_1}{\partial Q}dQ,$

$$\boxed{p = \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q}} \Rightarrow q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

b) Tipo 2: $F = F_2(q,P) - QP, \; pdq - PdQ = \frac{\partial F_2}{\partial q}dq + \frac{\partial F_2}{\partial P}dP - QdP - PdQ,$

$$\boxed{p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P},} \Rightarrow q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

c) Tipo 3: $F = F_3(Q,p) - qp, \quad pdq - PdQ = \frac{\partial F_3}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F_3}{\partial p}dp - qdp - pdq,$

$$\boxed{q = -\frac{\partial F_3(Q,p)}{\partial p}, \quad P = -\frac{\partial F_3(Q,p)}{\partial Q},} \Rightarrow q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

d) Tipo 4: $F = F_4(p,P) + qp - QP,$

$$pdq - PdQ = \frac{\partial F_4}{\partial p}dp + \frac{\partial F_4}{\partial P}dP + qdp + pdq - QdP - PdQ,$$

$$\boxed{q = -\frac{\partial F_4(p,P)}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F_4(p,P)}{\partial P},} \Rightarrow q(Q,P), \quad p(Q,P),$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS:

Sea un sistema con Hamiltoniana $H(q,p,t)$, y las correspondientes ecuaciones canónicas

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

- La transformación de variables $Q_j = Q_j(q,p,t), \quad P_j = P_j(q,p,t),$ se dice que es canónica si las ecuaciones del movimiento en las nuevas variables se pueden escribir de la forma

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}, \quad j = 1,\ldots,n,$$

para cierta función $H'(Q,P,t)$.

- **Tª:** Una transformación es canónica si y solo si los corchetes de Poisson de las funciones Q_j, P_j verifican:

$$\left[Q_j, Q_k\right] = 0, \quad \left[P_j, P_k\right] = 0, \quad \left[Q_j, P_k\right] = \delta_{jk}.$$

- Cuando la **transformación canónica es independiente del tiempo**, la nueva Hamiltoniana es $H'(Q,P,t) = H(q,p,t)\big|_{(q,p)\to(Q,P)}$.

- El corchete de Poisson de dos funciones u, v, de las variable cánonicas y del tiempo, es independiente de las variables **canónicas utilizadas:**

$$\sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial v}{\partial p_j} - \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial v}{\partial q_j} \right) = \sum_j \left(\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_j} - \frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial Q_j} \right) = [u,v].$$

Función generatriz de una transformación canónica

- La aplicación del Principio de Hamilton ante una transformación canónica nos lleva a:

$$\sum_j p_j dq_j - H dt = \sum_j P_j dQ_j - H' dt + dF.$$

Un cálculo análogo al efectuado para un grado de libertad nos conduce a los siguientes cuatro tipos básicos de función generatriz:

a) Tipo 1: $F = F_1(q,Q,t),$ $\boxed{p_j = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_j}}$

b) Tipo 2: $F = F_2(q,P,t) - \sum_j Q_j P_j,$ $\boxed{p_j = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_j},}$

c) Tipo 3: $F = F_3(Q,p,t) - \sum_j q_j p_j,$ $\boxed{q_j = -\frac{\partial F_3(Q,p,t)}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F_3(Q,p,t)}{\partial Q_j},}$

d) Tipo 4: $F = F_4(p,P,t) + \sum_j (q_j p_j - Q_j P_j),$ $\boxed{q_j = -\frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_j}, \quad Q_j = \frac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_j},}$

$$\boxed{H' = \left(H + \frac{\partial F_\mu}{\partial t} \right)\Bigg|_{(q,p)\to(Q,P)}, \quad \mu = 1,2,3,4.}$$