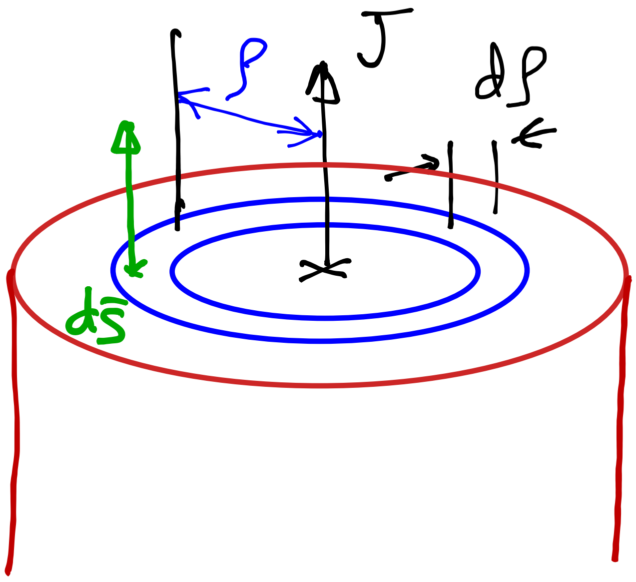
Prob. 7.8

El sistema tiene simetría cilíndrica alrededor del eje OZ y vamos a aplicar la ley de Ampère para el caso general del apartado (b) donde $\vec{J} = c\rho^n \vec{k}$ y luego lo particularizamos para el apartado (a) donde $n=1$

(b) Como nos piden que lo expresemos en función de la corriente I_c la calculamos en primer lugar.



$$I_c = \frac{dQ}{dt} = \int_{sup.} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Es el flujo del vector densidad de corriente sobre la superficie. Como está definido a trozos,

$$d\vec{S} = dS\,\vec{k} \quad y \quad \vec{J}(\rho) = \begin{cases} 0 & si\ \rho > R \\ c\rho^n \vec{k} & si\ \rho \leq R \end{cases}$$

La integral está extendida solo sobre la superficie del cilindro y definimos la superficie como un conjunto de círculos de radio ρ y espesor $d\rho$ de modo que,

$$I_c = \int_{cil} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^R (c\rho^n \vec{k})\cdot(2\pi\rho\, d\rho\, \vec{k}) = 2\pi c \int_0^R \rho^{(n+1)} d\rho$$

$$\boxed{I_c = 2\pi c\, \frac{R^{n+2}}{(n+2)}} \rightarrow$$ una primera consecuencia es que ha de tenerse $n \geq -2$

Con este valor eliminamos la cte. C y queda

$$C = \frac{(n+2)\, I_c}{2\pi\, R^{(n+1)}} \longrightarrow \vec{J}(r) = \frac{(n+2)\, I_c}{2\pi\, R^{(n+2)}}\, \rho^{n}\, \vec{k} \quad [1]$$

Para calcular $\vec{B}$ tomamos círculos de radio ρ en el plano perpendicular al eje del cilindro, dividimos el espacio en dos regiones y aplicamos la ley de Ampère sobre el círculo C'

$$\oint_{C'} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{S_c} \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

donde S_c es la superficie circular que define la circunferencia de radio ρ.

Para $0 \le \rho \le R$ dentro del cilindro tendremos,

$$\oint_{C'} \vec{B}\cdot d\vec{l} = |\vec{B}|\,(2\pi\rho) = \mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$$ Calculamos la integral

$$\mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_0^{\rho} \frac{(n+2)\, I_c}{\cancel{2\pi}\, R^{(n+2)}}\, \rho^{n}\, (\cancel{2\pi})\, \rho\, d\rho = \frac{\mu_0 (n+2)\, I_c}{R^{(n+2)}} \int_0^{\rho} \rho^{n+1}\, d\rho$$

$$\mu_0 \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0\, \cancel{(n+2)}\, I_c}{R^{(n+2)}\, \cancel{(n+2)}}\, \rho^{(n+2)} = |\vec{B}|\,(2\pi\rho)$$ luego

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0\, I_c}{2\pi\, R^{n+2}}\, \rho^{(n+1)} \quad [2]$$

y el campo $\overline{B}$ apunta en la dirección del vector unitario $\overline{u}_\varphi$

Para $\rho > R$ el conductor se ve como un hilo infinitamente largo que transporta una corriente I_c luego simplemente,

$$\oint \vec{B} \cdot d\overline{l} = |\vec{B}|\,(2\pi\rho) = \mu_0 I_c \rightarrow \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi \quad [3]$$

Ahora particularizamos para cada caso del problema.

(1) Si $\vec{J} = j\vec{k}$ entonces en [1] $n=0$ y se tiene

$$\vec{J} = \frac{\cancel{2} I_c}{\cancel{2}\pi R^2}\vec{k} = \frac{I_c}{\pi R^2}\vec{k} \rightarrow$$ es decir, cuando $\vec{J}$ es uniforme sobre la sección.

$$n=0 \begin{cases} \overline{B} = \dfrac{\mu_0 I_c}{2\pi}\dfrac{\rho}{R^2}\vec{u}_\varphi \rightarrow \overline{B} = \dfrac{\mu_0 I_c \rho}{2\pi R^2}\vec{u}_\varphi & 0 < \rho \le R \\ \overline{B} = \dfrac{\mu_0 I_c}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi & \rho > R \end{cases}$$

ambos son iguales en el límite $r \to R$

(2) Las ~~Las~~ soluciones de este apartado son las ecuaciones [2] y [3]. y el campo es uniforme dentro del cilindro para $n = -1$ ya que entonces [2] es cte.