5.- Electrostática de materiales dieléctricos

- **Problema 5.1**

Se tiene un dipolo eléctrico de momento $\boldsymbol{p} = p\,\boldsymbol{j}$ situado en el origen de un sistema de referencia y se pide:

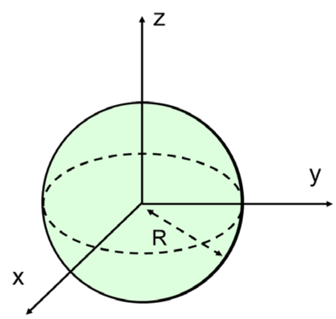
a) La fuerza de Coulomb que ejerce sobre una carga puntual q situada en el punto $P\,(0, d, 0)$.
b) El trabajo realizado por el campo electrostático del dipolo para mover q desde el punto P anterior hasta el $Q\,(0, 2\,d, 0)$.

Solución :

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{F} = \frac{q\,p}{2\pi\varepsilon_o\,d^3}\,\boldsymbol{j} \qquad\qquad \text{b)} \quad W = \frac{3q\,p}{16\pi\varepsilon_o\,d^2}$$

- **Problema 5.2**

Se tiene una esfera de radio R rellena de un material dieléctrico, de constante relativa ε_r, que tiene una distribución de carga de densidad ρ_o uniforme. Si r es la distancia al origen de coordenadas. Se pide calcular:



a) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, desplazamiento eléctrico $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$ y vector polarización $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$ en todos los puntos del espacio.
b) El potencial eléctrico $V(r)$ en todos los puntos del espacio.
c) La densidad superficial de carga de polarización $\sigma_p(\boldsymbol{r})$.

Solución :

$$\text{a)} \quad r < R \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_o\,r}{3\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \quad r \geq R \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_o\,R^3}{3\,\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

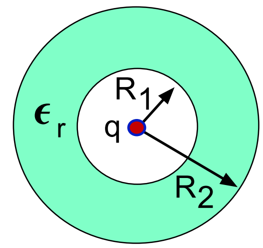
$$r < R \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_o\,r}{3}\,\boldsymbol{e}_r \quad ; \quad r \geq R \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho_o\,R^3}{3r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

$$r \leq R \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{\rho_o\,r}{3}\,\boldsymbol{e}_r$$

$$\text{b)} \quad r \geq R \quad V(r) = \frac{\rho_o\,R^3}{3\,\varepsilon_o\,r} \quad ; \quad r < R \quad V(r) = \frac{\rho_o\,R^2}{3\,\varepsilon_o} - \frac{\rho_o}{6\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\,(r^2 - R^2)$$

- **Problema 5.3**

Una cáscara esférica de un material dieléctrico de permitividad ε_r y radios R_2, R_1 , tiene en su centro una carga puntual q. Si r es la distancia al origen se pide calcular en todos los puntos del espacio:



a) El vector desplazamiento $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ y el vector polarización $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$.
b) El potencial eléctrico $V(\boldsymbol{r})$.
c) Las densidades de carga superficiales σ_p, volumétrica ρ_p y la carga eléctrica total Q_p de polarización en el dieléctrico.

Solución :

a) $r < R_1 \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; R_2 \geq r \geq R_1 \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; r > R_2 \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r$

$r < R_1 \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; R_2 \geq r \geq R_1 \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; r > R_2 \quad \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r$

$R_2 \geq r \geq R_1 \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\dfrac{q_o}{4\pi\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r$

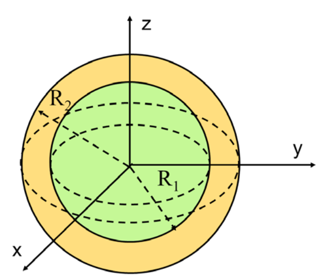
b) $r < R_1 \quad V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\left(\dfrac{1-\varepsilon_r}{R_1} + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{R_2} + \dfrac{\varepsilon_r}{r}\right) \;\; ; \;\; R_2 \geq r \geq R_1 \quad V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right)$

$r > R_2 \quad V(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o\,r}$

c) $\sigma_p(R_1) = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\dfrac{q}{4\pi R_1^2} \;\; ; \;\; \sigma_p(R_2) = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\dfrac{q}{4\pi R_2^2} \;\; ; \;\; \rho_p = 0 \;\; ; \;\; Q_p = 0$

- **Problema 5.4**

Como se muestra en la figura, una esfera conductora de radio R_1 que almacena una carga eléctrica Q está rodeada por una corteza esférica de material dieléctrico de permitividad ε_r y radios R_1 y $R_2 > R_1$. En función de la distancia r al centro de la esfera se pide calcular:



a) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ y el vector polarización $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r})$.
b) Las densidades de carga superficiales σ_p, volumétrica ρ_p y la carga eléctrica total Q_p de polarización en el dieléctrico.
c) El potencial $V(\boldsymbol{r})$

Solución :

a) $r < R_1 \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \;\; ; \;\; R_2 \geq r \geq R_1 \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r \;\; ; \;\; r > R_2 \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{q_o}{4\pi\,\varepsilon_o\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r$

$R_2 \geq r \geq R_2 \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\,\dfrac{Q}{4\pi\,r^2}\,\boldsymbol{e}_r$

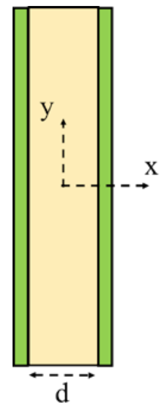
b) $\sigma_p(R_1) = -\dfrac{(\varepsilon_r - 1)\,Q}{4\pi\,\varepsilon_r\,R_1^2} \;\; ; \;\; \sigma_p(R_2) = \dfrac{(\varepsilon_r - 1)\,Q}{4\pi\,\varepsilon_r\,R_2^2} \;\; ; \;\; \rho_p = 0 \;\; ; \;\; Q_p = 0$

c) $r < R_1 \quad V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right) \;\; ; \;\; R_2 \geq r \geq R_1 \quad V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{R_2}\right)$

$r > R_2 \quad V(r) = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_o\,r}$

- **Problema 5.5**

Se tiene un condensador plano-paralelo infinito, placas de área S separadas en el vacío una distancia d tal que $d \ll \sqrt{S}$, por lo que pueden despreciarse los efectos de borde. El condensador se carga conectándolo a una fuente de alimentación que da una diferencia de potencial de valor V_o entre las armaduras, estando la placa en $x = d/2$ a menor potencial. Una vez cargado, se desconecta la fuente y con el condensador aislado se introduce entre sus placas una lámina descargada de material dieléctrico de permitividad relativa ε_r, que ocupa todo el espacio entre las armaduras. Se pide calcular:



a) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, vectores desplazamiento $\boldsymbol{D}$ y de polarización $\boldsymbol{P}$ en el dieléctrico.
b) La densidad de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
c) La diferencia de potencial $\Delta V'$ entre las placas del condensador con relleno dieléctrico.

Solución :

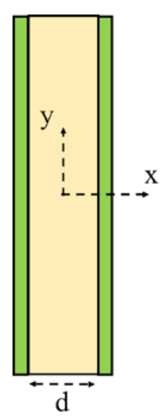
$$\text{a)} \quad \boldsymbol{E} = \frac{V_o}{\varepsilon_r\, d}\boldsymbol{i} \quad ; \quad \boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon_o\, V_o}{d}\,\boldsymbol{i} \quad ; \quad \boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d}\,\boldsymbol{i}$$

$$\text{b)} \quad \sigma_{p1} = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d} \quad ; \quad \sigma_{p2} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d}$$

$$\text{c)} \quad \Delta V' = \frac{V_o}{\varepsilon_r} = \frac{\Delta V_{vacio}}{\varepsilon_r}$$

- **Problema 5.6**

Se tiene un condensador plano-paralelo infinito de placas con área enfrentada S separadas en el vacío una distancia pequeña d, tal que $d \ll \sqrt{S}$. El condensador se carga conectándolo a una fuente de alimentación a diferencia de potencial V_o entre las armaduras, estando la placa en $x = d/2$ a menor potencial. Manteniendo ahora esta diferencia de potencial entre sus armaduras, se introduce un dieléctrico de permitividad relativa ε_r. Se pide:



a) El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, vectores desplazamiento $\boldsymbol{D}$ y polarización $\boldsymbol{P}$ en el dieléctrico.
b) La densidad de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
c) La carga Q' del condensador con relleno dieléctrico.

Solución :

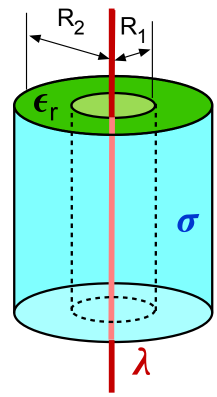
$$\text{b)} \quad \boldsymbol{E} = \frac{V_o}{d}\boldsymbol{i} \quad ; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon_r\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d}\,\boldsymbol{i} \quad ; \quad \boldsymbol{P} = (\varepsilon_r - 1)\,\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d}\,\boldsymbol{i}$$

$$\text{a)} \quad \sigma_{p1} = -(\varepsilon_r - 1)\,\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d} \quad ; \quad \sigma_{p2} = (\varepsilon_r - 1)\,\frac{\varepsilon_o\, V_o}{d}$$

$$\text{c)} \quad Q' = \varepsilon_r\frac{\varepsilon_o S V_o}{d} = \varepsilon_r Q_{vacio}$$

• **Problema 5.7**

El sistema de la figura consta de un hilo conductor de longitud infinita y densidad de carga λ se encuentra rodeado por un cilindro metálico coaxial de radio R_2, de espesor despreciable y densidad de carga $\sigma = -\lambda/(2\pi\, R_2)$. La región de radios R_1 y R_2 entre ambos está rellena de un material dieléctrico lineal de permitividad ε_r. En función de la distancia radial al hilo ρ en coordenadas cilíndricas se pide en todas las regiones del espacio:



a) El vector desplazamiento $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\rho)$, el campo eléctrico $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\rho)$ y el vector polarización $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(\rho)$.
b) Las densidades de carga de polarización σ_p y ρ_p en el dieléctrico
c) El potencial electrostático $V(\rho)$ si $V(R_2) = 0$.

Solución :

a) $\rho \geq R_2 \qquad \boldsymbol{D} = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{E} = 0$

$R_2 > \rho > R_1 \quad \boldsymbol{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho \;\; ; \;\; \boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\varepsilon_r\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho \;\; ; \;\; \boldsymbol{P} = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\dfrac{\lambda}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho$

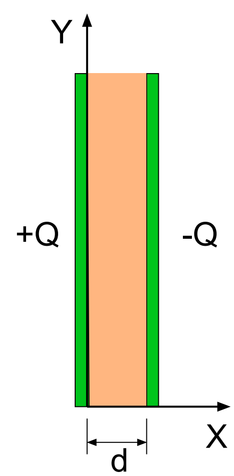
$R_1 > \rho \qquad \boldsymbol{D} = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho \;\; ; \;\; \boldsymbol{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho$

b) $\sigma_p(R_1) = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\dfrac{\lambda}{2\pi\,R_1} \;\; ; \;\; \sigma_p(R_2) = \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\,\dfrac{\lambda}{2\pi\,R_2} \;\; ; \;\; \rho_p = 0 \;\; ; \;\; Q_p = 0$

c) $\rho \geq R_2 : \;\; V = 0 \;\; ; \;\; R_2 > \rho > R_1 : \quad V = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\,\varepsilon_r}\,\ln\dfrac{R_2}{\rho} \;\; ; \;\; 0 < \rho < R_1 : V = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_r}\,\ln\dfrac{R_2}{R_1} + \ln\dfrac{R_1}{\rho}\right]$

• **Problema 5.8**

El condensador plano-paralelo de la figura tiene área S y en sus placas, separadas una distancia $d \ll \sqrt{S}$ se almacena una carga $\pm Q$ como se indica. Está relleno de una pastilla de material dieléctrico con permitividad $\varepsilon_r(x)$ que toma el valor $\varepsilon_r(0) = \varepsilon_1$ y $\varepsilon_r(d) = \varepsilon_2$ en los lados. Se pide:



a) La densidad volumétrica de carga de polarización ρ_p en función de $\varepsilon_r(x)$ y $d\varepsilon_r/dx$
b) La densidad superficial de carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
c) La carga total Q_p de polarización en el dieléctrico.

Solución :

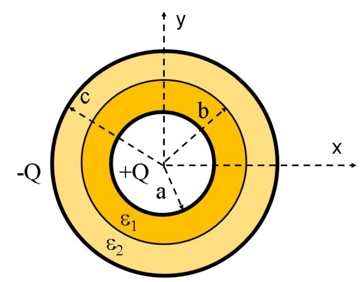
a) $\rho_p = -\dfrac{Q}{S}\,\dfrac{1}{\varepsilon_r^2}\,\dfrac{d\varepsilon_r}{dx}$

b) $\sigma_p(0) = -\dfrac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}\,\dfrac{Q}{S} \quad ; \quad \sigma_p(d) = \dfrac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}\,\dfrac{Q}{S}$

c) $Q_p = 0$

- **Problema 5.9**

Un condensador esférico que se representa en la figura de radios a y c tiene depositadas en sus placas cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente. En su interior hay dos dieléctricos en forma de corteza esférica de permitividades ε_1 y ε_2 siendo $r = b$ su superficie de separación, tal como se indica. El potencial es nulo en el infinito. Calcular:



a) El campo y potencial eléctrico en todo punto del espacio.
b) La capacidad del condensador.

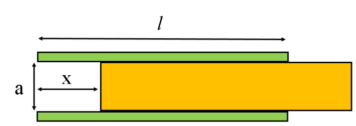
Solución :

$$
\begin{array}{lllll}
\text{a)} & c < r & \boldsymbol{E} = 0 & ; & V = 0 \\
 & b < r < c & \boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\ \varepsilon_2\, r^2}\,\boldsymbol{e}_r & ; & V = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{c}\right) \\
 & a < r < b & \boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{4\pi\ \varepsilon_1\, r^2}\,\boldsymbol{e}_r & ; & V = \dfrac{Q}{4\pi}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\right] \\
 & r < a & \boldsymbol{E} = 0 & ; & V = \dfrac{Q}{4\pi}\left[\dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right) + \dfrac{1}{\varepsilon_2}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)\right]
\end{array}
$$

$$
\text{b)} \quad C = \frac{4\pi\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,b}{\varepsilon_1\left(1 - \frac{b}{c}\right) + \varepsilon_2\left(\frac{b}{a} - 1\right)}
$$

- **Problema 5.10**

Se tiene un condensador plano-paralelo, con superficie de placas rectangular S muy grande y separación de placas a, conectado a una fuente de alimentación con voltaje V_o. En una dirección en la que las placas tienen longitud l se introduce parcialmente una lámina de material dieléctrico de permeabilidad ε_r como muestra la figura. En función de la distancia x se pide calcular:



a) La capacidad
b) La energía electrostática almacenada.

Solución :

$$
\text{a)} \quad C(x) = \frac{\varepsilon_o\,S}{a}\left(\frac{x}{l} + \varepsilon_r\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)
$$

$$
\text{b)} \quad U_e = \frac{\varepsilon_o\,S}{2a}\,V_o^2\left(\frac{x}{l} + \varepsilon_r\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right)
$$