7.- Magnetostática del vacío

• **Problema 7.1**

Una partícula puntual de carga q y masa m penetra en una región donde existen un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y un campo magnético $\boldsymbol{B}$, ambos uniformes. En el instante inicial $t = 0$ la partícula se halla en el origen de coordenadas con velocidad $\boldsymbol{v}_o = v_{ox}\,\boldsymbol{i} + v_{oy}\,\boldsymbol{j}$. Determinar la posición de la partícula en todo instante $t > 0$ si los campos son paralelos, dados por $\boldsymbol{E} = E\,\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{i}$. Esbozar la curva de la trayectoria para $E = 0$. Nota: Basta plantear las ecuaciones dinámicas del movimiento e indicar en clase cómo se resolverían.

Solución :

$$x = v_{ox}\,t + \frac{q\,E}{2m}\,t^2 \quad ; \quad y = \frac{v_{oy}}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega\,t) \quad ; \quad z = \frac{v_{oz}}{\omega}\,(\cos(\omega\,t) - 1) \quad \text{donde,} \quad \omega = \frac{q\,B}{m}$$

• **Problema 7.2**

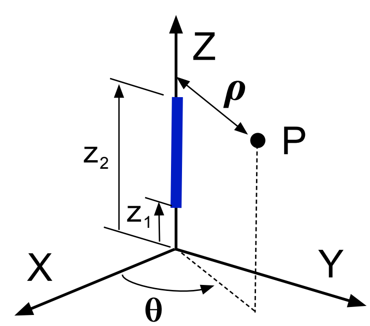
Como en el caso anterior, determinar la posición de la carga puntual si ésta parte del reposo en el origen de coordenadas cuando los campos uniformes son perpendiculares. En este caso, también sin pérdida de generalidad, pueden considerarse $\boldsymbol{E} = E\,\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{k}$. Demostrar que si $E = 0$, la energía cinética de la carga permanece constante en el tiempo cualquiera que sea $\boldsymbol{B}$ (si no actúan otras fuerzas sobre ella). Nota: Basta plantear las ecuaciones dinámicas del movimiento e indicar en clase cómo se resolverían.

Solución :

$$x = \frac{E}{\omega\,B}\,(1 - \cos(\omega\,t)) \quad ; \quad y = \frac{E}{\omega\,B}\,(\mathrm{sen}(\omega\,t) - \omega\,t) \quad ; \quad z = 0 \quad \text{con,} \quad \omega = \frac{q\,B}{m}$$

• **Problema 7.3**

La figura adjunta muestra un tramo rectilíneo de un hilo conductor de un circuito por el que circula una corriente de intensidad I. El segmento de corriente yace sobre el eje OZ con extremos en las coordenadas z_1 y z_2 indicadas. Usando coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta = \varphi, z)$ se pide:



a) Calcular el campo magnético $\boldsymbol{B}$ debido a este segmento de corriente en cualquier punto P del espacio.

b) Obtener de la expresión anterior el campo creado por un hilo rectilíneo infinito de corriente I (límites $z_1 \to -\infty$ y $z_2 \to \infty$).

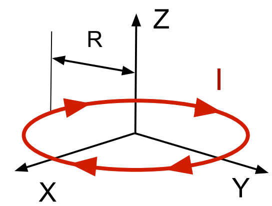
Solución :

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_o\,I}{4\pi\rho}\left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}}\right)\boldsymbol{u}_\varphi \qquad \text{b)} \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_o\,I}{2\pi\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

- **Problema 7.4**

Calcular el campo magnético $\boldsymbol{B}$ creado por el anillo circular de la figura de radio R y por el que circula una corriente I en:

a) Un punto P cualquiera del eje Z.
b) En el centro geométrico del anillo.



Solución :

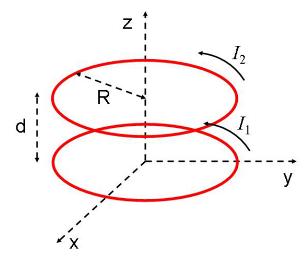
$$\text{a)} \quad \boldsymbol{B}(0,0,z) = \frac{\mu_o R^2 I}{2\,(R^2+z^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{k}$$

$$\text{b)} \quad \boldsymbol{B}(0,0,z) = \frac{\mu_o I}{2R}\,\boldsymbol{k}$$

- **Problema 7.5**

Usando los resultados del problema anterior se pide:

a) Calcular el campo magnético $\boldsymbol{B}$ creado en un punto P del eje Z por dos anillos de corrientes I_1 e I_2 dispuestos como muestra la figura.
b) Si las intensidades de corriente son tales que $I_1 = I_2 = I$ y circulan en sentidos opuestos, determinar en qué puntos del eje z se anula $\boldsymbol{B}$.



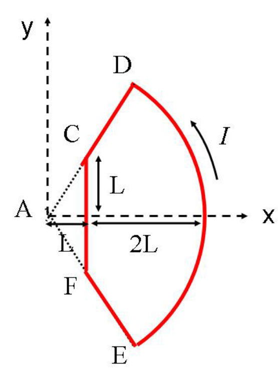
Solución :

$$\text{a)} \quad \boldsymbol{B}(z) = \frac{\mu_o R^2}{2}\left(\frac{I_1}{(R^2+z^2)^{3/2}} + \frac{I_2}{(R^2+(z-d)^2)^{3/2}}\right)\boldsymbol{k}$$

b) Sólo se anula en $z = d/2$

- **Problema 7.6**

Calcular el campo magnético producido en el punto A por la espira $CFED$ recorrida por la intensidad I.

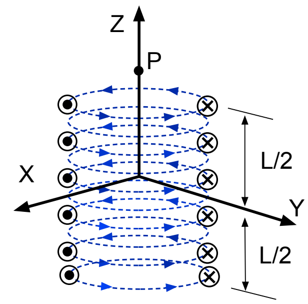


Solución :

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi L}\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\right)\boldsymbol{k}$$

• **Problema 7.7**

Un solenoide de longitud L está formado por el arrollamiento de un hilo conductor por el que circula una corriente de intensidad I, que forma un devanado prácticamente continuo de N espiras circulares de radio R, con densidad de espiras $n = N/L$ uniforme por unidad de longitud. Se pide calcular:



a) El campo magnético $\boldsymbol{B}$ en un punto cualquiera P del eje OZ.
b) Si el solenoide puede considerarse de longitud infinita, el valor de $\boldsymbol{B}$ en todo punto del espacio.

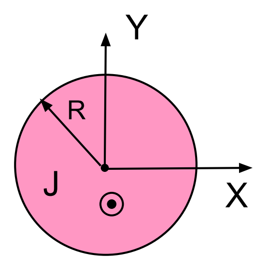
Solución :

a) $$\boldsymbol{B}(0,0,z) = \frac{\mu_o\, n\, I}{2}\left(\frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}\right)\boldsymbol{k}$$

b) $\boldsymbol{B} = \mu_o\, n\, I\, \boldsymbol{k}$ dentro del solenoide y $\boldsymbol{B} = 0$ fuera.

• **Problema 7.8**

El cilindro de material conductor muy largo, de sección transversal de radio R representado en la figura adjunta, es atravesado por una corriente que fluye paralela a su eje. Empleando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) se pide calcular la intensidad de corriente I y el campo $\boldsymbol{B}$ en todo punto del espacio en los siguientes casos:



a) Cuando la densidad de corriente $\boldsymbol{J} = J_o\, \boldsymbol{k}$ es uniforme.
b) Si $\boldsymbol{J} = C\, \rho^n\, \boldsymbol{k}$, donde C y $n > -2$ son constantes y ρ es la distancia al eje del cilindro.

Solución :

a) $$I = (\pi\, R^2)\, J_o$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\mu_o\, I\, \rho}{2\pi\, R^2}\, \boldsymbol{u}_\varphi \quad (0 < \rho < R)$$

$$\boldsymbol{B}_e = \frac{\mu_o\, I}{2\pi\, \rho}\, \boldsymbol{u}_\varphi \quad (\rho > R)$$

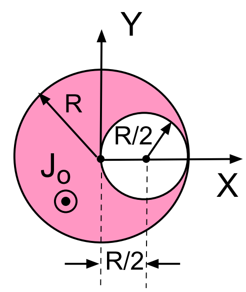
b) $$I = \frac{2\pi\, C\, R^{n+2}}{n+2}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\mu_o\, I\, \rho^{n+1}}{2\pi\, R^{n+2}}\, \boldsymbol{u}_\varphi \quad (0 < \rho < R)$$

$$\boldsymbol{B}_e = \frac{\mu_o\, I}{2\pi\, \rho}\, \boldsymbol{u}_\varphi \quad (\rho > R)$$

• **Problema 7.9**

El cilindro de la figura de radio R es muy largo y está relleno de un material conductor por el que circula una densidad de corriente uniforme $\boldsymbol{J}_o = J_0\,\boldsymbol{k}$ excepto por el hueco de radio $R/2$ practicado en su interior. Empleando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) calcular el campo magnético $\boldsymbol{B}$ en todo punto del espacio. (En clase basta dar el procedimiento de resolución y dejar indicadas las soluciones matemáticas)



Solución :

Empleando los vectores $\boldsymbol{\rho} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{u}_\varphi = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\rho}/\rho$ de las coordenadas cilíndricas se tienen los equivalentes.

$$\boldsymbol{\rho}' = (x - R/2)\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} \quad \text{y,} \quad \boldsymbol{u}'_\varphi = \boldsymbol{k} \times \frac{\boldsymbol{\rho}'}{\rho'}$$

centrados en el hueco. Con los campos:

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\mu_o\,J_o\,\rho}{2}\,\boldsymbol{u}_\varphi \;\; ; \;\; \boldsymbol{B}_e = \frac{\mu_o\,J_o\,R^2}{2\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi \;\; ; \;\; \boldsymbol{B}'_i = -\frac{\mu_o\,J_o\rho'}{2}\,\boldsymbol{u}'_\varphi \;\; ; \;\; \boldsymbol{B}'_e = -\frac{\mu_o\,J_o\,(R/2)^2}{2\,\rho'}\,\boldsymbol{u}'_\varphi$$

se tiene:

a) En el interior del hueco: $\boldsymbol{B}_H = \boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{B}'_i$
b) En el material conductor: $\boldsymbol{B}_C = \boldsymbol{B}_i + \boldsymbol{B}'_e$
c) Fuera del cilindro: $\boldsymbol{B}_E = \boldsymbol{B}_e + \boldsymbol{B}'_e$

• **Problema 7.10**

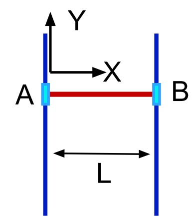
En el caso del problema anterior se tiende un hilo rectilíneo infinito, con intensidad de corriente I, a lo largo del eje del cilindro hueco. Si I es tal que anula la intensidad de corriente neta que fluye por una sección transversal de la distribución de corrientes, ¿cuál sería $\boldsymbol{B}$ en la zona vacía del hueco?.

Solución :

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o\,J_o\,R}{4}\,\boldsymbol{j} - \frac{3\mu_o\,J_o\,R^2}{8\,\rho'}\boldsymbol{u}'_\varphi \quad \text{para,} \quad 0 < \rho' < R/2.$$

- **Problema 7.11**

La varilla AB tiene masa M, longitud L y puede deslizar sin fricción a lo largo de dos guías verticales como muestra la figura. Una corriente I circula del punto B al A y se pide calcular el valor del campo $\boldsymbol{B}_o = B_o\, \boldsymbol{k}$ para que la varilla AB ascienda con velocidad constante.

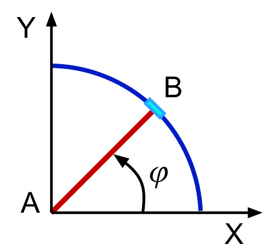


Solución :

$$B_o = \frac{M\, g}{I\, L}$$

- **Problema 7.12**

La varilla AB tiene masa M, longitud L, está articulada en el punto A y desliza sin fricción a lo largo de una guía circular como vuestra la figura. Una corriente I circula del punto B al A y se pide calcular el valor del campo $\boldsymbol{B}(\varphi) = B(\varphi)\, \boldsymbol{k}$ para que la varilla AB gire con velocidad angular constante.



Solución :

$$B(\varphi) = \frac{M\, g}{I\, L}\, \cos\varphi$$
