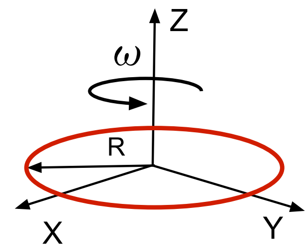
8.- Magnetostática en Medios Materiales

- **Problema 8.1**

El anillo circular de radio R de la figura tiene carga eléctrica Q uniformemente distribuida y gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{k}$, funcionando entonces como un anillo de corriente. Se pide:



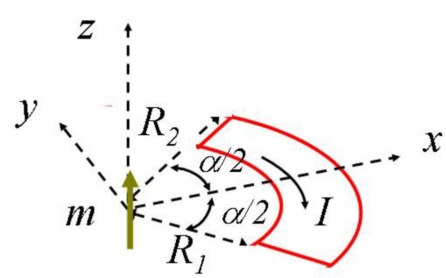
1) Calcular la intensidad de corriente eléctrica I que crea el anillo girando, así como su momento magnético $\boldsymbol{m}$.
2) Si se aplica un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$, determinar la fuerza y el momento mecánico $\boldsymbol{\tau}$ de ésta, sobre el anillo cuando (a) $\boldsymbol{B} = B\,\boldsymbol{k}$ y (b) $\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j}$.

Solución :

$$\begin{array}{ll} 1) & I = \dfrac{Q\,\omega}{2\pi} \;\;;\;\; \boldsymbol{m} = \dfrac{Q\,\omega\,R^2}{2}\,\boldsymbol{k} \\ 2a) & \boldsymbol{F} = 0 \;\;;\;\; \boldsymbol{\tau} = 0 \\ 2b) & \boldsymbol{F} = 0 \;\;;\;\; \boldsymbol{\tau} = \dfrac{q\,\omega\,R^2}{2}\,(B_x\,\boldsymbol{j} - B_y\,\boldsymbol{i}) \end{array}$$

- **Problema 8.2**

Un dipolo magnético de momento dipolar $\boldsymbol{m} = m\,\boldsymbol{k}$ se ubica en el origen cerca de la espira que muestra la figura, definida por dos arcos de circunferencia de radios R_1 y R_2 unidos por dos tramos rectilíneos.



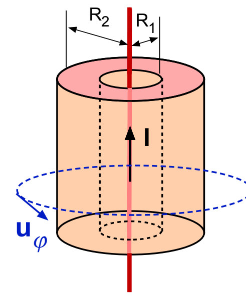
a) Calcular el flujo ϕ del campo magnético $\boldsymbol{B}_{dp}$ del dipolo a través de la superficie que define la espira.
b) Si por la espira circula una corriente de intensidad I como se indica, determinar la fuerza debida a $\boldsymbol{B}_{dp}$ sobre el arco de espira de radio R_1.

Solución :

$$\begin{array}{ll} a) & \phi = \dfrac{\mu_o\,m\,\alpha}{4\pi}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) \\ b) & \boldsymbol{F} = \dfrac{\mu_o\,m\,I}{2\pi\,R^2}\;\mathrm{sen}(\dfrac{\alpha}{2})\,\boldsymbol{i} \end{array}$$

- **Problema 8.3**

Un hilo conductor muy largo por el que circula una corriente de intensidad I está en el eje de una corteza cilíndrica, también muy larga, de radio interior R_1 y exterior R_2 (ver figura). La cáscara cilíndrica está formada por un material magnético lineal de permeabilidad relativa μ_r. Atendiendo a la simetría cilíndrica de la configuración, se piden, en todo punto del espacio, los vectores:



a) Intensidad de campo magnético $\boldsymbol{H}$ (campo magnetizante).
b) Inducción magnética, es decir, el campo $\boldsymbol{B}$.
c) Magnetización $\boldsymbol{M}$ en la corteza cilíndrica (en el exterior hay vacío).
d) Las densidades superficial $\boldsymbol{J}_{sm}$ y volumétrica $\boldsymbol{J}_m$ de magnetización.

Solución :

a) $$\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

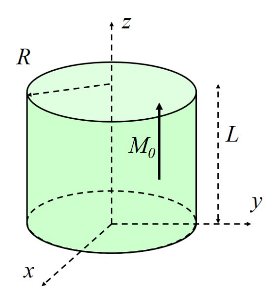
b) $$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o\,I}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi \quad (0<\rho<R_1) \quad ; \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_r\,\mu_o\,I}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi \quad (R_1<\rho<R_2) \quad ; \quad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_o\,I}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi \quad (\rho>R_2)$$

c) $$\boldsymbol{M} = \frac{(\mu_r-1)\,I}{2\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\varphi$$

d) $$\boldsymbol{J}_{sm}(R_1) = \frac{(\mu_r-1)\,I}{2\pi\,R_1}\,\boldsymbol{k} \quad ; \quad \boldsymbol{J}_{sm}(R_2) = -\frac{(\mu_r-1)\,I}{2\pi\,R_2}\,\boldsymbol{k} \quad ; \quad \boldsymbol{J}_m = 0$$

- **Problema 8.4**

El cilindro de radio R y altura L de la figura está constituido por un material magnético no lineal magnetizado permanentemente. La imanación se caracteriza por un vector de magnetización uniforme dado por $\boldsymbol{M} = M_o\,\boldsymbol{k}$. Calcular los campos, magnético $\boldsymbol{B}$ y magnetizante $\boldsymbol{H}$, en cualquier punto del eje Z exterior al material (considerar las bases del cilindro en los planos $z=-L/2$ y $z=L/2$).



Sugerencia: establecer la analogía con un solenoide de igual radio y altura formado por un devanado de corriente (ver problema 7.7) estableciendo la relación entre $N\,I/L$ y la densidad superficial de corriente de magnetización debida a M_o.

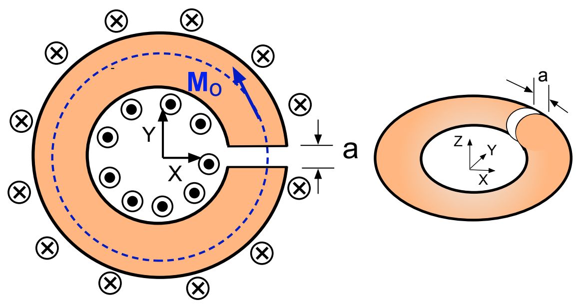
Solución :

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_o\,M_o}{2}\left(\frac{z+L/2}{\sqrt{R^2+(z+L/2)^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{R^2+(z-L/2)^2}}\right)\boldsymbol{k} \quad ; \quad \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_o}\boldsymbol{B} - M_o\,\boldsymbol{k}$$

$$\text{Analogía:} \quad M_o \leftrightarrow \frac{N\,I}{L} \quad ; \quad \boldsymbol{J}_{Sm}(R) \longleftrightarrow \left(\frac{N\,I}{L}\right)\boldsymbol{u}_\varphi$$

- **Problema 8.5**

Una pieza toroidal de material ferromagnético no lineal de radio medio R se halla uniformemente imanada con imanación $\boldsymbol{M} = M_o\, \boldsymbol{u}_\varphi$ en torno al eje OZ. El material se encuentra recubierto por un devanado de un hilo conductor por el que pasa una corriente I formando N espiras, como muestra la figura. En el material se ha practicado un pequeño corte transversal (entrehierro) de longitud $a \ll 2\pi R$. Determinar el campo $\boldsymbol{H}_m$ en el interior de material y $\boldsymbol{H}_a$ en el espacio del entrehierro. En el hueco se pueden despreciar efectos de borde (distorsión transversal de líneas de campo hacia el exterior) y suponer que la sección interior del toroide es muy pequeña.



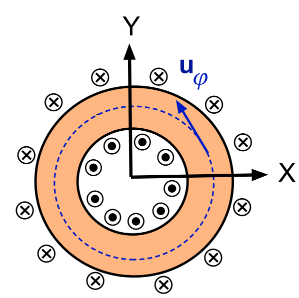
Solución :

$$\boldsymbol{H}_m = \left(\frac{N\, I - a\, M_o}{2\pi R} \right) \boldsymbol{u}_\varphi \quad ; \quad \boldsymbol{H}_a = \left(\frac{N\, I + (2\pi\, R - a)\, M_o}{2\pi R} \right) \boldsymbol{u}_\varphi$$

- **Problema 8.6**

El material imanado del toroide del problema anterior se reemplaza por un material magnético lineal de permeabilidad magnética relativa μ_r, calcular:

a) El campo $\boldsymbol{H}$ en el material y en el entrehierro.
b) Se cierra el entrehierro y se pide el campo $\boldsymbol{B}$ en el interior del solenoide toroidal estrecho que resulta.



Solución :

a) $\quad \boldsymbol{H}_m = \dfrac{N\, I}{2\pi R + (\mu_r - 1)\, a}\, \boldsymbol{u}_\varphi \quad ; \quad \boldsymbol{H}_a = \mu_r\, \boldsymbol{H}_m$

b) $\quad \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_r\, \mu_o\, N\, I}{2\pi R}\, \boldsymbol{u}_\varphi$