Tenemos el campo vectorial

$$\vec{A} = 2xz\,\vec{i} + z\,\mathrm{sen}\,x\,\vec{j} + (x^2+y^2-z^2)\,\vec{k}$$

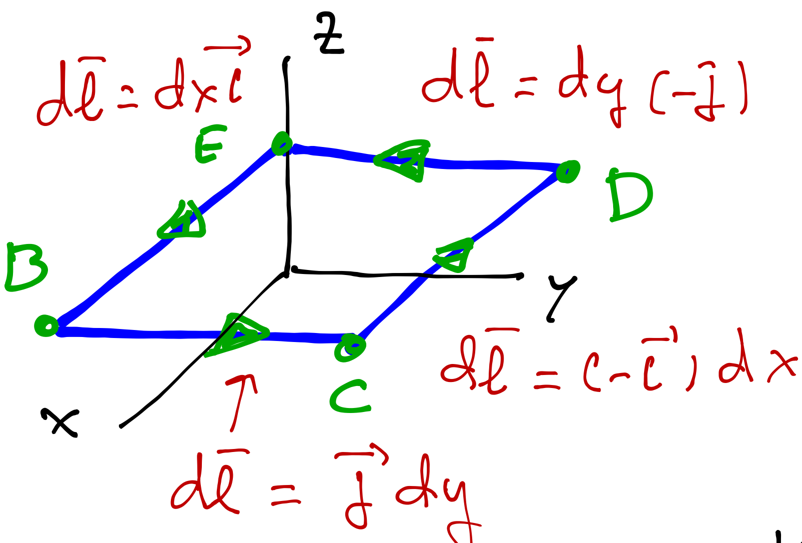
Prob: 2.4

(a) Primero calculamos $\nabla\wedge\vec{A}$

$$\nabla\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2zx & z\,\mathrm{sen}\,x & (x^2+y^2-z^2) \end{vmatrix} = \vec{i}\,(2y-\mathrm{sen}\,x) - \vec{j}\,(\cancelto{0}{2x-2x}) + \vec{k}\,(z\cos x)$$

Queda,

$$\nabla\wedge\vec{A} = \vec{i}\,(2y-\mathrm{sen}\,x) + \vec{k}\,(z\cos x)$$



El cuadrado BCDE del dibujo está situado en $z=2$ y se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj y los diferenciales están indicados. Tendremos entonces;

$$I = \oint_{BCDE} (\nabla\wedge\vec{A})\cdot d\vec{l} = \cancelto{0}{\int_B^C (\nabla\wedge\vec{A})\cdot\vec{j}\,dy} + \int_C^D (\nabla\wedge\bar{A})\cdot(-\bar{i})\,dx$$

$$+ \cancelto{0}{\int_D^E (\nabla\wedge\bar{A})\cdot(-\bar{j})\,dy} + \int_E^B (\nabla\wedge\vec{A})\cdot\vec{i}\,dx$$

$\nabla\wedge\bar{A}$ no tiene componente $\vec{j}$

Con esto resulta

y = 2 en el tramo CD

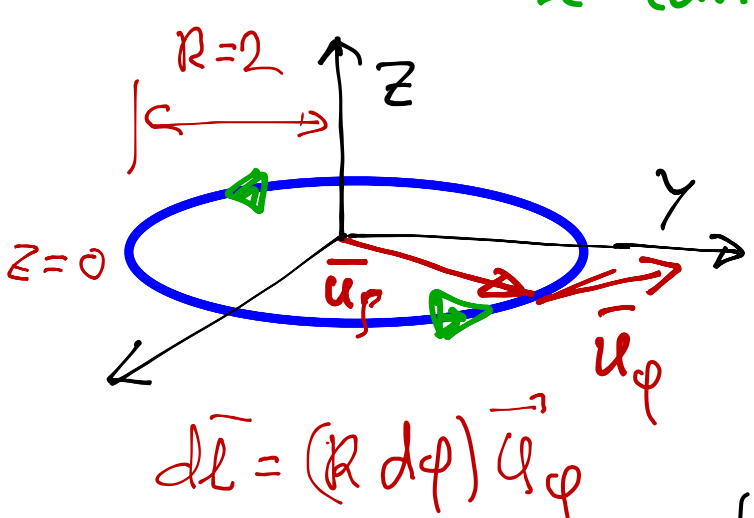
y = 0 en el tramo EB

$$I=\int_C^D (-1)\,(2\underbrace{y}_{=2}-\operatorname{sen}x)\,dx+\int_E^B (2\underbrace{\cancel{y}}_{0}-\operatorname{sen}x)\,dx$$

$$I=\int_0^2 (-1)\,[4-\operatorname{sen}x]\,dx+\int_0^2 (-\operatorname{sen}x)\,dx$$

$$I=\cancel{\int_0^2 \operatorname{sen}x\,dx}-4\int_0^2 dx-\cancel{\int_0^2 \operatorname{sen}x\,dx}=-8$$

Se cancelan las dos integrales en el sen x



(5) Para calcular $d\overline{l}$ se emplean los vectores unitarios $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi)$ en coordenadas cilíndricas como muestra el dibujo.

$$d\overline{l}=(R\,\overline{u}_\varphi)\,d\varphi=R\,(-\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j})\,d\varphi$$

$$d\overline{l}=[-R\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i}+R\cos\varphi\,\vec{j}]\,d\varphi=[-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}]\,d\varphi$$

z = 0 en el plano (x, y) donde está el círculo

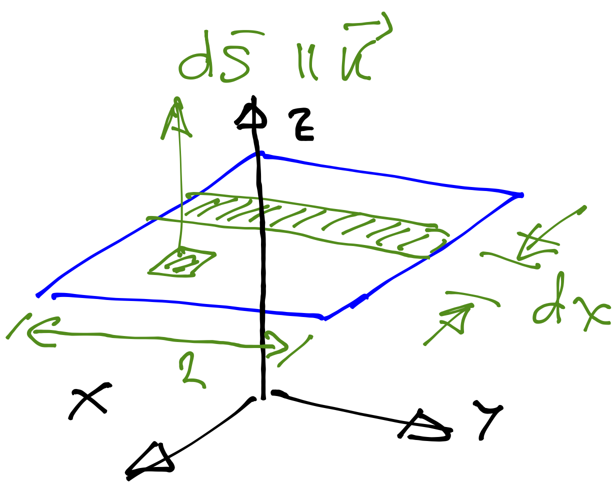
$$\vec{A}\cdot d\overline{l}=[2\underbrace{\cancel{z}}_{0}x\,\vec{i}+\underbrace{\cancel{z}}_{0}\operatorname{sen}x\,\vec{j}+(x^2+y^2-\underbrace{\cancel{z^2}}_{0})\,\overline{k}\,]\cdot[-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}\,]\,d\varphi$$

Queda

$$\bar{A}\cdot d\bar{l} = [(x^2+y^2)\,\vec{k}]\cdot[-y\,\bar{i}+x\,\bar{j}]\,d\varphi = 0$$

luego $\bar{A}\cdot d\bar{l} = 0$ y $\int_{\text{circulo}} \bar{A}\cdot d\bar{l} = 0$

(3) Para calcular el flujo de $\bar{A}$ a través del recinto del dibujo tomamos el elemento de superficie



$$d\bar{S} = dS\,\vec{k} = (\overset{2}{\overset{\shortparallel}{l}}\,dx)\,\vec{k}$$

$$\nabla\wedge\vec{A} = (2y-\operatorname{Sen}x)\,\vec{i} + z\operatorname{Cos}x\,\vec{k}$$

$$\Phi = \int_{\text{sup}} (\nabla\wedge\bar{A})\cdot d\bar{S}$$

$$\Phi = \int_{\text{Sup}} [(2y-\operatorname{Sen}x)\vec{i} + z\operatorname{Cos}x\,\vec{k}]\cdot[2\,dx\,\vec{k}]$$

2 en el plano del dibujo

$$\Phi = \int_{\text{Sup}} 2\overset{2}{\overset{\shortparallel}{z}}\operatorname{Cos}x\,dx = 4\int_0^2 \operatorname{Cos}x\,dx = 4\operatorname{Sen}2$$

(d) El flujo a través de toda la figura del dibujo será;

$$\Phi_{fig} = \int_{\text{fig.}} \bar{A}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int_{\text{Semiesf.}} \bar{A}\cdot d\vec{S}}_{\Phi_{\text{semiesf}}} + \underbrace{\int_{\text{base}} \vec{A}\cdot d\vec{S}}_{\Phi_{\text{base}}}$$

igual a la suma de los flujos sobre cada una de sus superficies. El flujo Φ_{fig} total sobre la figura puede calcularse empleando el teorema de Gauss.

$$\Phi_{fig} = \int_{fig} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{Vol} (\nabla \cdot \vec{A})\, dV$$ y si calculamos

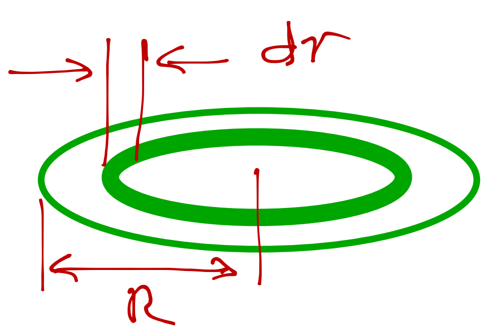
la divergencia de $\vec{A}$ $\quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}[2zx] + \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\cancel{[z \operatorname{sen} x]}}_{0} + \frac{\partial}{\partial z}[x^2 + y^2 - z^2]$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 2z - 2z = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \Phi_{fig} = 0$$

por lo tanto $\quad \Phi_{semiesf} = -\Phi_{base}$

Solo tenemos que calcular el flujo a través de la base circular. Tomamos círculos concéntricos de espesor dr como indica la figura



$d\vec{S} = dS\,\vec{k} \quad dS = (2\pi r)\, dr$

$$\Phi_{base} = \int_{base} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_{base} [(x^2 + y^2 - \underbrace{\cancel{z^2}}_{0})\vec{k}] \cdot [dS\,\vec{k}]$$

el valor de $z=0$ para el circulo

$$\Phi_{base} = \int_{base} \underbrace{(x^2+y^2)}_{"r^2 \text{ en el circulo}} (2\pi r\, dr) = \int_0^{R=2} 2\pi r^3 dr$$

$$\Phi_{base} = 2\pi \int_0^2 r^3 dr = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 2\pi \frac{2^4}{4}$$

$$\Phi_{base} = \pi \frac{2^5}{2^2} = \pi 2^3 = 8\pi$$

y como $\Phi_{figura} = \Phi_{semiesf.} + \Phi_{base} = 0$

$$\Phi_{semiesf.} = -\Phi_{base} = -8\pi$$