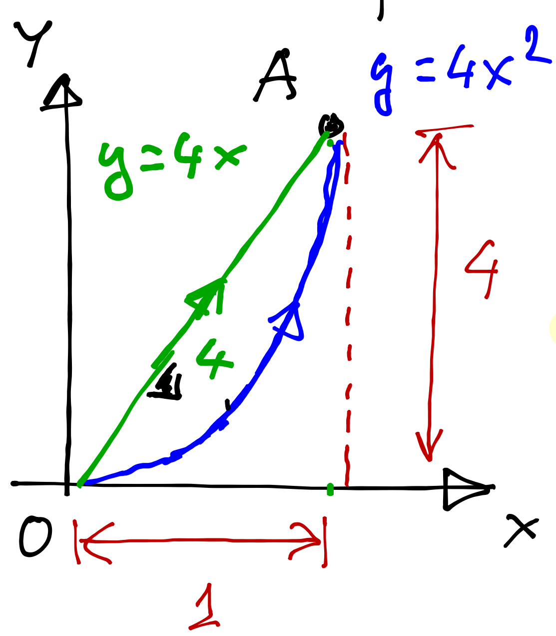
Campos



$$\begin{cases} \vec{a} = x^2 y\,\vec{i} + x^5\,\vec{j} + \dfrac{1}{x}\,\vec{k} \\ \vec{b} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} \end{cases}$$

Prob: 2.5

(1) Integramos a lo largo de la curva $y=4x$ que se muestra en el dibujo con el sentido que se indica entre el origen O y el punto A.

Tenemos que calcular $I_a = \displaystyle\int_{curva} \vec{a}\cdot d\vec{l}$ donde

$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

$$I_a = \int_{curva} \left[x^2 y\,\vec{i} + x^5\,\vec{j} + \frac{1}{x}\,\vec{k}\right]\cdot\left[dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}\right]$$

$$I_a = \int_{curva} (x^2 y)\,dx + x^5\,dy = \int_{curva} x^2 y\,dx + \int_{curva} x^5\,dy$$

Para integrar a lo largo de la curva necesitamos su expresión $y=4x$ si diferenciamos $dy = 4dx$ y sustituimos en la integral,

$$I_a = \int_0^1 x^2 \overbrace{[4x]}^{y(x)}\,dx + \int_0^1 x^5[4dx] = \int_0^1 (4x^3 + 4x^5)\,dx$$

$$I_a = 4\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 + 4\frac{x^6}{6}\Big]_0^1 = 1 + \frac{4}{6} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Repetimos el mismo procedimiento para el otro campo vectorial

$$\vec{b}\cdot d\vec{l} = [2xy\,\vec{i} + x^2\vec{j}]\cdot[dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}]$$

$$\bar{b}\cdot d\bar{l} = (2xy\,dx) + (x^2 dy)$$

$$I_b = \int_{\text{curva}} 2xy\,dx + x^2 dy \qquad y \quad dy = 4dx$$

$$I_b = \int_{\text{curva}} 2x[4x]\,dx + x^2(4dx) = \int_0^1 (8x^2 + 4x^2)\,dx$$

$$I_b = 12\int_0^1 x^2 dx = 12\frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{12}{3} = 4$$

(2) Repetimos el mismo procedimiento pero ahora para la curva $y = 4x^2$ en azul en el dibujo

$$I_a = \int_{\text{curva}} \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int_{\text{curva}} [x^2 y\,dx + x^5 dy] \qquad \begin{cases} y = 4x^2 \\ dy = 8x\,dx \end{cases}$$

$$I_a = \int_0^1 [x^2(4x^2)\,dx + x^5(8x)]\,dx$$

$$I_a = \int_0^1 (4x^4 + 8x^6)\, dx = 4\frac{x^5}{5}\Big]_0^1 + 8\frac{x^7}{7}\Big]_0^1$$

$$I_a = \frac{4}{5} + \frac{8}{7} = \frac{28+40}{35} = \frac{68}{35}$$

Para el otro campo;

$$I_b = \int_{\text{curva}} \bar{b} \cdot d\bar{l} = \int_{\text{curva}} (2xy\, dx + x^2\, dy)$$

$$I_b = \int_0^1 \left[2x(4x^2) + x^2(8x)\right] dx$$

$$I_b = \int_0^1 (8x^3 + 8x^3)\, dx = \int_0^1 16x^3\, dx = 16\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = 4$$