a) Para el campo $\vec{g} = Hy^2 \vec{i}$ calculamos

Prob: 2.7

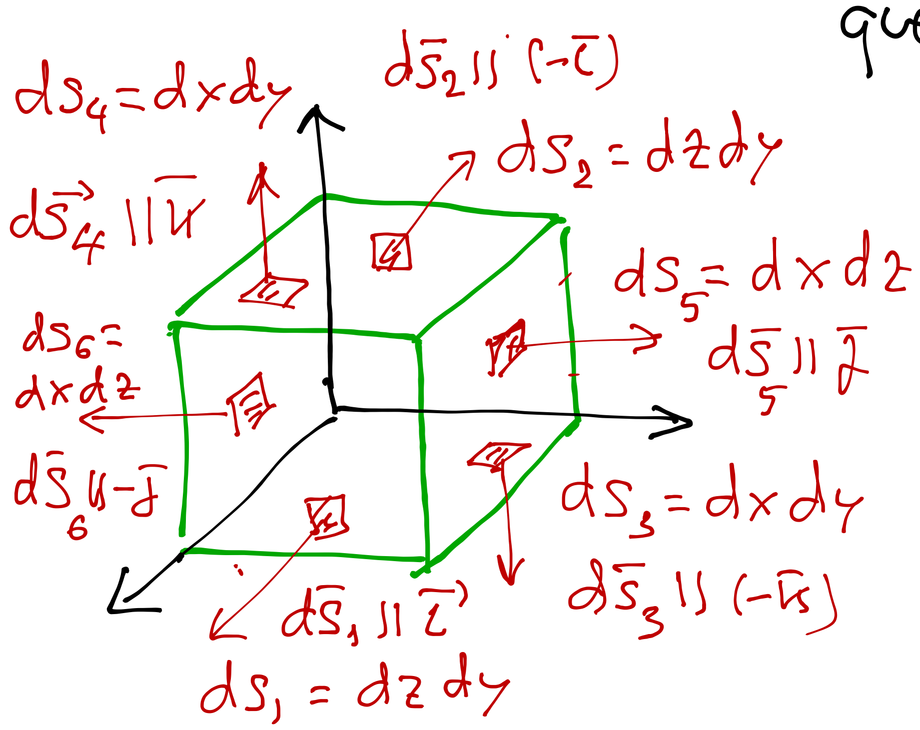
$$\nabla \cdot \bar{g} = \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(Hy^2) = 0$$

y entonces $\nabla(\nabla \cdot \bar{g}) = 0$ también

$$\nabla \wedge \bar{g} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ Hy^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0) - \bar{j}(0) + \vec{k}(-2Hy)$$

$$\nabla \wedge \bar{g} = -2Hy\,\vec{k}$$

(b) Para el cubo del dibujo tenemos que comprobar que en su volumen $\bar{V}$



$$\int_{\bar{V}} \nabla \cdot \bar{g}\, dV = \int_{S(V)} \bar{g} \cdot d\bar{S}$$

siendo $S(V)$ la superficie del cubo. Como se tiene que $\nabla \cdot \bar{g} = 0$ el flujo Φ sobre sus caras

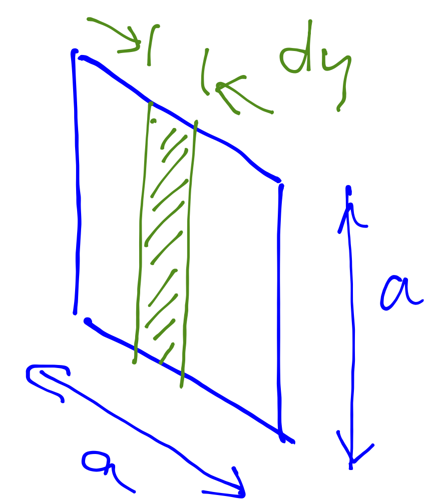
$$\Phi = \int_{S(V)} \bar{g} \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} \bar{g} \cdot d\bar{S}_1 + \int_{S_2} \bar{g} \cdot d\bar{S}_2 + \dots + \int_{S_6} \bar{g} \cdot d\bar{S}_6$$

luego $\Phi = 0$ el flujo ha de ser nulo.

(c) Como $\bar{g} = Hy^2\vec{i}$ el producto escalar $\bar{g}\cdot d\bar{s}$ sólo es distinto de cero cuando $d\bar{s}$ es paralelo al versor $\vec{i}$ luego sólo hay dos términos que cuentan para el flujo,

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{g}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \bar{g}_2 \cdot d\vec{S}_2$$ los demás son cero.

$$\Phi = \int_{S_1} (Hy^2\vec{i}) \cdot (\vec{i}\,dx\,dz) + \int_{S_2} (Hy^2\vec{i}) \cdot (-\vec{i}\,dx\,dz)$$



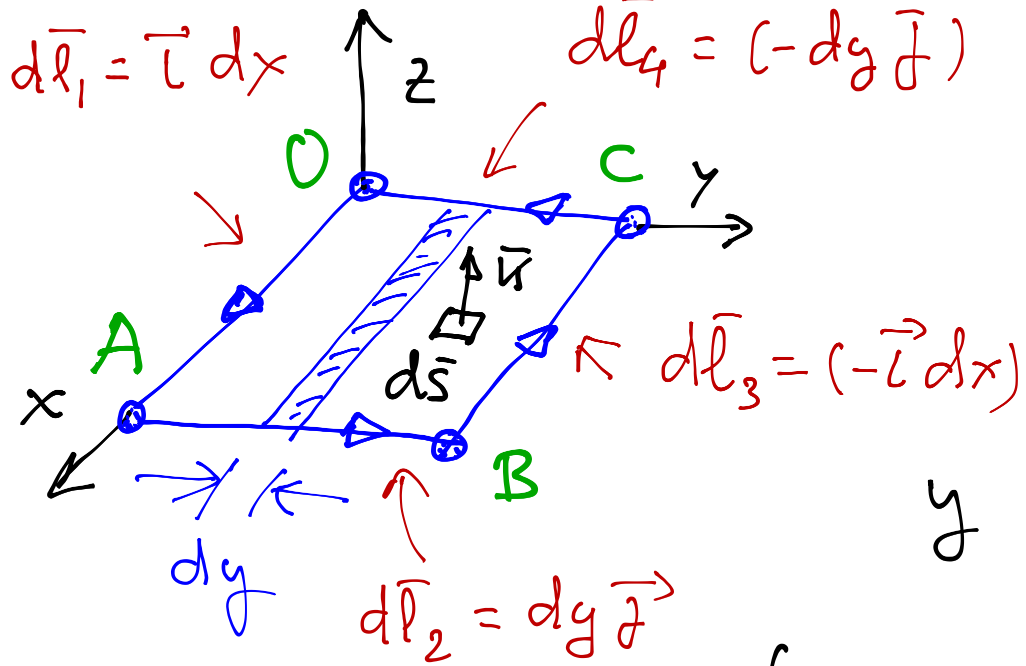
$$\Phi = \int_{S_1} Hy^2\,dx\,dz - \int_{S_2} Hy^2\,dx\,dz$$

Podemos calcular $dS = dx\,dy = a\,dy$ para evaluar la integral sobre cada cara y

$$\Phi = \int_0^a aHy^2\,dy - \int_0^a aHy^2\,dy = 0$$

(3) Comprobamos el t^{ma} de Stokes en el cuadrado OABC del dibujo siguiente.

$$\int_S \nabla\wedge g \cdot d\vec{S} = \int_C \bar{g}\cdot d\vec{l}$$



Hemos calculado antes el rotacional

$$\nabla \wedge \vec{g} = -2Hy\,\vec{k}$$

y $d\vec{S} = dx\,dy\,\vec{k} = a\,dy\,\vec{k}$

$$\int_S (\nabla \wedge \bar{g}) \cdot d\bar{S} = \int_0^a (-2Hy\,\bar{k}) \cdot (a\,dy\,\bar{k})$$

$$\int_S (\nabla \wedge \bar{g}) \cdot d\bar{S} = \int_0^a (-2Ha)\,y\,dy = (-2Ha)\left.\frac{y^2}{2}\right]_0^a = -Ha^3$$

Calculamos ahora la integral de línea

$$\int_{OABC} \bar{g} \cdot d\bar{l} = \int_O^A \underbrace{\bar{g}_1 \cdot d\bar{l}_1}_{0} + \int_A^B \underbrace{\bar{g}_2 \cdot d\bar{l}_2}_{0} + \int_B^C \bar{g}_3 \cdot d\bar{l}_3 + \int_C^O \underbrace{\bar{g}_4 \cdot d\bar{l}_4}_{0}$$

$\vec{g}_1 = 0$ en el tramo OA pues $y = 0$

$\vec{g}_2 \perp d\bar{l}_2 \parallel \vec{j}$

$\bar{g}_4 \perp d\bar{l}_4 \parallel -\vec{j}$

Aquí $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, ... etc, representa el valor que toma la función $\vec{g}$ a lo largo de cada tramo y queda

$$\int_{OABC} \bar{g} \cdot d\bar{l} = \int_B^C \bar{g}_3 \cdot d\bar{l}_3 = \int_B^C (Hy^2\,\vec{i}) \cdot (-\vec{i}\,dx)$$

" a^2 a lo largo de BC

$$\int_{OABC} \bar{g} \cdot d\bar{l} = \int_0^a -Ha^2 dx = -Ha^3$$

Que es el mismo resultado que obtuvimos antes.