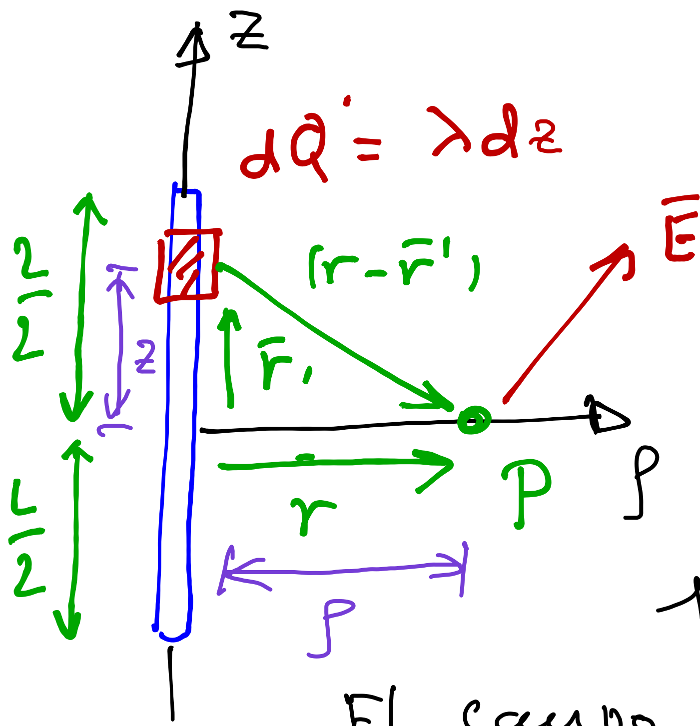
Prob: 3.2



(a) Como el segmento es finito no hay que integrar aprovechando la simetría cilíndrica del problema.

El campo dE que crea la carga dQ del esquema,

$$d\bar E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(\bar r - \bar r')\,dQ}{|\bar r - \bar r'|^3}$$

Los vectores son: $\bar r = \rho\,\vec u_\rho$ $\quad \bar r' = z\,\vec k$ luego

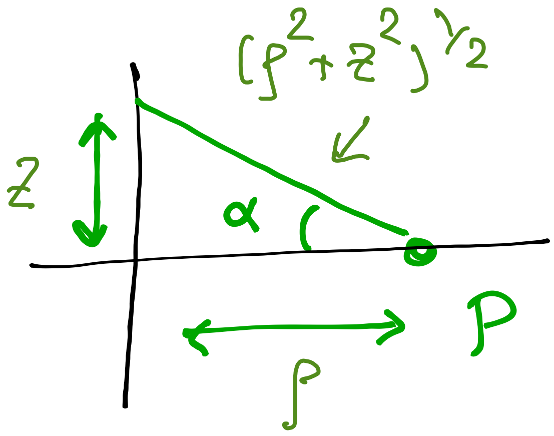
$$\left.\begin{array}{l}(\bar r - \bar r') = \rho\,\vec u_\rho - z\,\vec k \\ |\bar r - \bar r'|^3 = (\rho^2 + z^2)^{3/2}\end{array}\right\} \begin{array}{l} y \text{ con } dQ = \lambda dz \\ \text{con } \lambda = Q/L\end{array}$$

$$d\vec E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\,\vec u_\rho - z\,\vec k}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\left(\frac{Q}{L}\right)dz$$

Esta integral es cero por simetría, pues para un pto. del plano (x,y) la carga para z>0 y z<0 son iguales

$$\vec E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\vec u_\rho \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{\rho\,dz}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}}_{I_1} - \vec k \underbrace{\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{z\,dz}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}}_{I_2}\right]$$

El problema se reduce ahora a calcular dos integrales. Se resuelven con el cambio de variable que se muestra en el dibujo



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z}{\rho} \qquad dz = \rho\,\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{z}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \qquad \cos\alpha = \frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}$$

$$(\rho^2+z^2) = [\rho^2+\rho^2\operatorname{tg}^2\alpha] = \rho^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Sustituyendo en I_1 resulta

$$I_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\rho\,dz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{\rho}{\rho^3(1/\cos\alpha)^3}\,\frac{\rho\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$I_1 = \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{\rho^{\cancel{2}}\cos\alpha}{\rho^{\cancel{3}}}\,d\alpha = \frac{1}{\rho}\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \cos\alpha\,d\alpha$$

$$I_1 = \frac{1}{\rho}\,[\operatorname{sen}\alpha]_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} = \frac{1}{\rho}\,[\operatorname{sen}\alpha_{max} - \operatorname{sen}\alpha_{min}]$$

La segunda integral I_2 es nula puesto que el el integrando es una función impar integrada en el intervalo $[-L/2, L/2]$

Vamos a comprobarlo

$$I_2 = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{z\, dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{\rho \operatorname{tg}\alpha}{\rho^3 (1/\cos\alpha)^3} \frac{\rho\, d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$I_2 = \frac{\rho^2}{\rho^3} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\rho} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha$$

$$I_2 = \frac{1}{\rho} \left[-\cos\alpha\right]_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} = \left(\frac{-1}{\rho}\right) \left[\cos\alpha_{max} - \cos\alpha_{min}\right]$$

y si sustituimos lo que vale el coseno (ver dibujo) tendremos entonces;

$$\cos\alpha_{max} = \frac{x}{[\rho^2 + (L/2)^2]^{1/2}} = \frac{x}{[\rho^2 + (-L/2)^2]^{1/2}} = \cos\alpha_{min}$$

Como $\cos\alpha_{max} = \cos\alpha_{min}$ la integral es nula.

Este resultado era de esperar por razones de simetría ya que el pto. P está situado sobre el eje Z, la cantidad de carga positiva que hay para $z > 0$ es igual que la que existe en $z < 0$. Por tanto en el punto P, el campo $\vec{E}$ no puede tener compuesto a lo largo del eje z

Para el campo eléctrico tenemos entonces,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L}\left[\operatorname{sen}\alpha_{max} - \operatorname{sen}\alpha_{min}\right]\vec{u}_\rho$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L\rho}\left[\frac{L/2}{[\rho^2+(L/2)^2]^{1/2}} - \frac{(-L/2)}{[\rho^2+(-L/2)^2]^{1/2}}\right]\vec{u}_\rho$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L\rho}\left[\frac{\cancel{2}L/\cancel{2}}{[\rho^2+(L/2)^2]^{1/2}}\right]\vec{u}_\rho$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \rho \cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{[\rho^2+L^2/4]^{1/2}}\vec{u}_\rho$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\rho}\frac{2}{[4\rho^2+L^2]^{1/2}}\vec{u}_\rho = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\rho[4\rho^2+L^2]^{1/2}}\vec{u}_\rho$$

El potencial eléctrico es:

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{[\rho^2+z^2]^{1/2}}$$

y como antes $\quad dq = \lambda\, dz = \frac{Q}{L}\, dz$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left[\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right]$$

$$(z^2+\rho^2)^{1/2} = [\rho^2+\rho^2 tg^2\alpha]^{1/2} = \rho\,(1+tg^2\alpha)^{1/2}$$

$$(\rho^2+z^2) = \frac{\rho}{\cos\alpha}$$

$$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{\cos\alpha}{\cancel{\rho}}\,\frac{\cancel{\rho}\, d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L}\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

Esta integral es un dato del problema

$$\int \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = \ln\Big[\underbrace{\frac{1}{\cos\alpha} + tg\,\alpha}_{f(\alpha)}\Big]$$

$$\begin{cases} tg\,\alpha = z/\rho \\ \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{[\rho^2+z^2]^{1/2}}{\rho} \end{cases}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} + tg\,\alpha = \frac{[\rho^2+z^2]^{1/2}}{\rho} + \frac{z}{\rho}$$

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left[\frac{f(\alpha_{max})}{f(\alpha_{min})}\right]$$

y vamos a calcular el cociente del paréntesis

$$\frac{f(\alpha_{max})}{f(\alpha_{min})} = \frac{\dfrac{\left[\rho^2+\frac{L^2}{4}\right]^{1/2}}{\rho} + \dfrac{L}{2\rho}}{\dfrac{\left[\rho^2+\frac{L^2}{4}\right]^{1/2}}{\rho} - \dfrac{L}{2\rho}} = \frac{\left(\rho^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2} + L/2}{\left(\rho^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2} - L/2}$$

Multiplicamos numerador y denominador por $(\rho^2+L^2/4)^{1/2}+L/2$ y entonces

$$\frac{f(\alpha_{max})}{f(\alpha_{min})} = \frac{\left[(\rho^2+L^2/4)^{1/2}+L/2\right]^2}{\rho^2+\cancel{\frac{L^2}{4}}-\cancel{\frac{L^2}{4}}} =$$

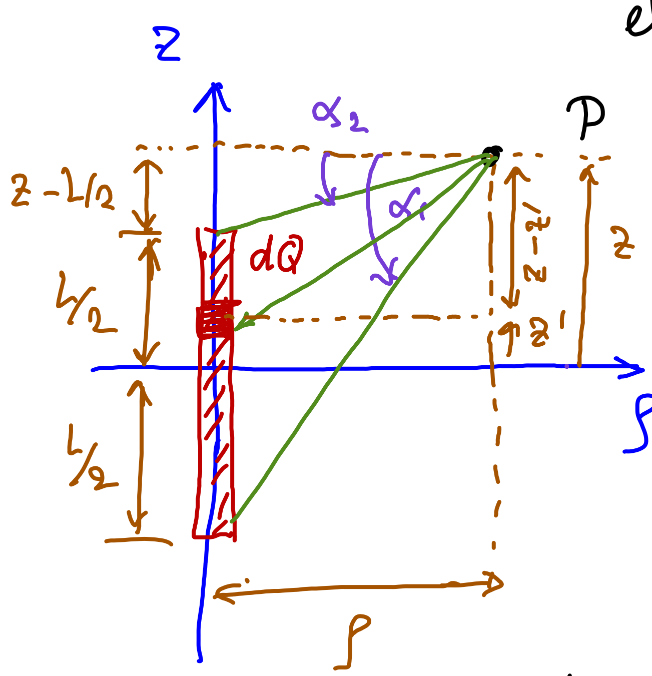
$$\frac{f(\alpha_{max})}{f(\alpha_{min})} = \left[\frac{\left(\rho^2+\frac{L^2}{4}\right)^{1/2}+\frac{L}{2}}{\rho}\right]^2$$

luego resulta reestituyendo

$$\phi = \frac{q}{4\pi G L}\, 2 \times \ln\left[\frac{(4\rho^2+L^2)^{1/2}+L}{2\rho}\right]$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi G L} \ln\left[\frac{(4\rho^2+L^2)^{1/2}+L}{2\rho}\right]$$

(b) Si el punto P con $\rho > 0$ está fuera del plano (x,y) entonces tenemos la situación del dibujo y el potencial que crea la carga $dQ = \left(\frac{Q}{L}\right) dz'$ es entonces



$dQ = \left(\frac{Q}{L}\right) dz'$

$$d\phi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 \left[\rho^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

distancia del elemento dQ al punto P

que hay que integrar en $-\frac{L}{2} \leq z' \leq \frac{L}{2}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{L}\right)\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dz'}{\left[\rho^2 + (z-z')^2\right]^{1/2}}$$

Se ve en el dibujo que para el ángulo α que forma con la horizontal el punto P se tiene:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{z + L/2}{\rho} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{z - L/2}{\rho} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{z - z'}{\rho}$$

y para el elemento de carga dQ cuya coordenada es z'. La integral anterior se escribe,

$$I = (-\cancel{\rho})\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{d(-z'/\rho)}{\cancel{\rho}\left[1 + \frac{(z-z')^2}{\rho^2}\right]^{1/2}}$$

que sugiere introducir el cambio de variable

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z - z'}{\rho}$$

$$-\frac{dz'}{\rho} = \frac{d}{d\alpha}\left[\operatorname{tg}\alpha\right] d\alpha = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\left[1+\frac{(z-z')^2}{\rho^2}\right] = 1+tg^2\alpha = 1+\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$I = (-1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha/cos^2\alpha}{[1/cos^2\alpha]^{1/2}} = (-1)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{cos\alpha}$$ y con la

misma integral indefinida que en el apartado anterior

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}(-1)\left. Ln\left(\underbrace{\frac{1}{cos\alpha}+tg\alpha}_{f(\alpha)}\right)\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}Ln\left[\frac{f(\alpha_1)}{f(\alpha_2)}\right]$$

Calculamos el paréntesis para α_1 y α_2 con los datos del esquema anterior.

$$Sen\,\alpha_1 = \frac{z+L/2}{[\rho^2+(z+L/2)^2]^{1/2}} \qquad Cos\,\alpha_1 = \frac{\rho}{[\rho^2+(z+L/2)^2]^{1/2}}$$

$$Sen\,\alpha_2 = \frac{z-L/2}{[\rho^2+(z-L/2)^2]^{1/2}} \qquad Cos\,\alpha_2 = \frac{\rho}{[\rho^2+(z-L/2)^2]^{1/2}}$$

y entonces

$$\begin{cases} f(\alpha_1) = \dfrac{1}{cos\alpha_1}+tg\alpha_1 = \dfrac{[\rho^2+(z+L/2)^2]^{1/2}}{\rho}+\dfrac{z+L/2}{\rho} \\ f(\alpha_2) = \dfrac{1}{cos\alpha_2}+tg\alpha_2 = \dfrac{[\rho^2+(z-L/2)^2]^{1/2}}{\rho}+\dfrac{z-L/2}{\rho} \end{cases}$$

y queda finalmente

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{L}\ \mathrm{Ln}\left[\frac{\left[\rho^2+(z+L/2)^2\right]^{1/2}+(z+L/2)}{\left[\rho^2+(z-L/2)^2\right]^{1/2}+(z-L/2)}\right]$$