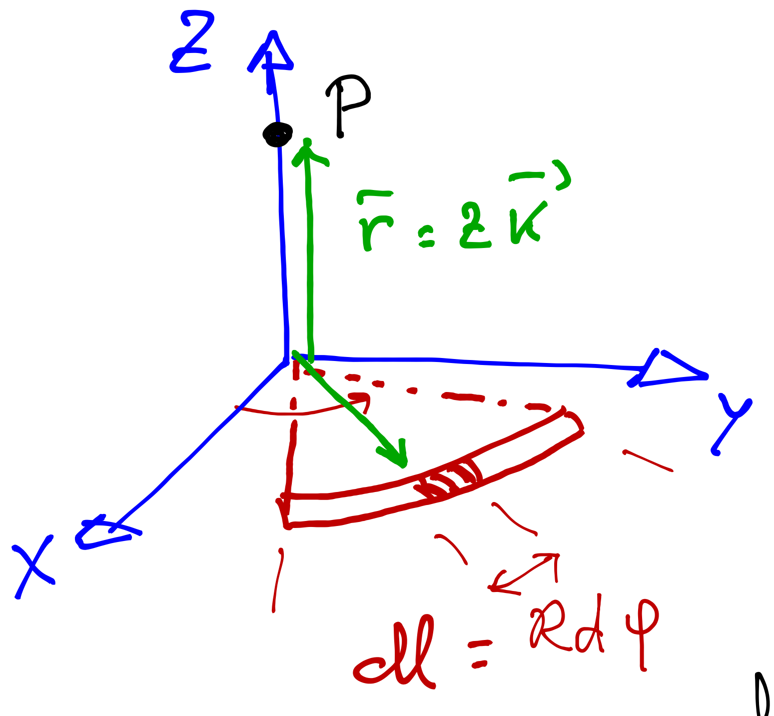

Prob. 3.3

La cantidad de carga eléctrica en el segmento de longitud $dl = R\,d\varphi$ es

$$dQ = \lambda_0\, dl = \lambda_0 R\, d\varphi$$

la posición del pto. P es $\bar{r} = z\vec{k}$

y el vector $\bar{r}'$ apunta donde está la carga dQ,

$$\bar{r}' = R\,\bar{u}_\rho = R(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j})$$

La distancia de la carga al pto. P es entonces,

$$\bar{r} - \bar{r}' = z\vec{k} - R\,\vec{u}_\rho \qquad |\bar{r} - \bar{r}'| = (z^2 + R^2)^{1/2}$$

El campo que genera la carga dQ en un punto $\bar{r}$ del espacio es,

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{dQ}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}\,\frac{(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

y lo particularizamos para nuestro caso.

$$d\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\lambda R\,d\varphi}{[z^2+R^2]^{3/2}}\,(z\vec{k} - R\,\vec{u}_\rho)\right] = d\bar{E}_z + d\bar{E}_\rho$$

El campo eléctrico tiene dos componentes $d\bar{E}_\rho$ que es paralela a $\bar{u}_\rho$ y $d\bar{E}_z$ paralela al vector $\vec{k}$ unitario.

Calculamos primero $d\bar{E}_z$

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,d\varphi \rightarrow E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi$$

Luego

$$\vec{E_z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\,\lambda R}{(z^2+R^2)^{3/2}}(2\pi)\,\vec{k}$$

$Q = 2\pi\lambda$ es la carga del segmento.

$$\vec{E_z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{k}$$

Para la componente radial se tiene.

$$dE_\rho = \frac{(-1)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R^2 d\varphi}{(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{u_\rho} = \frac{(-\lambda R^2)}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,d\varphi$$

$$\vec{E_\rho} = \frac{(-\lambda R)}{4\pi\epsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}\left[\vec{i}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi + \vec{j}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\right] = 0$$

Como es de esperar por la simetría del problema.

Para el potencial eléctrico calculamos,

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R\, d\varphi}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R}{(z^2+R^2)^{1/2}}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\lambda R\,(2\pi)}{4\pi\epsilon_0\,(z^2+R^2)^{1/2}}$$

Finalmente:

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R^2+z^2)^{1/2}}$$