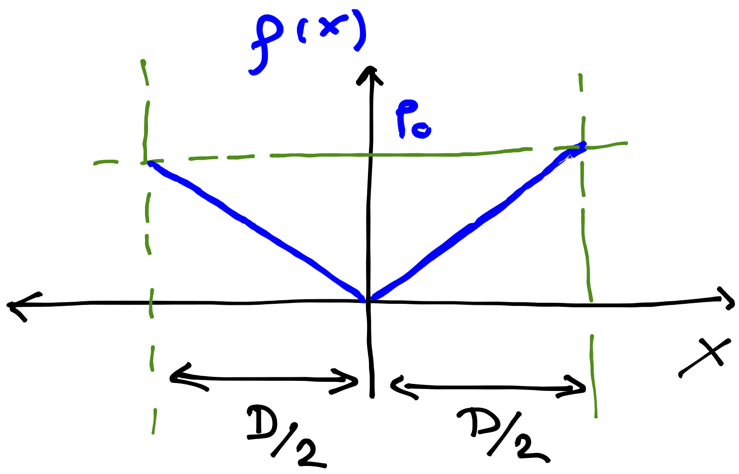
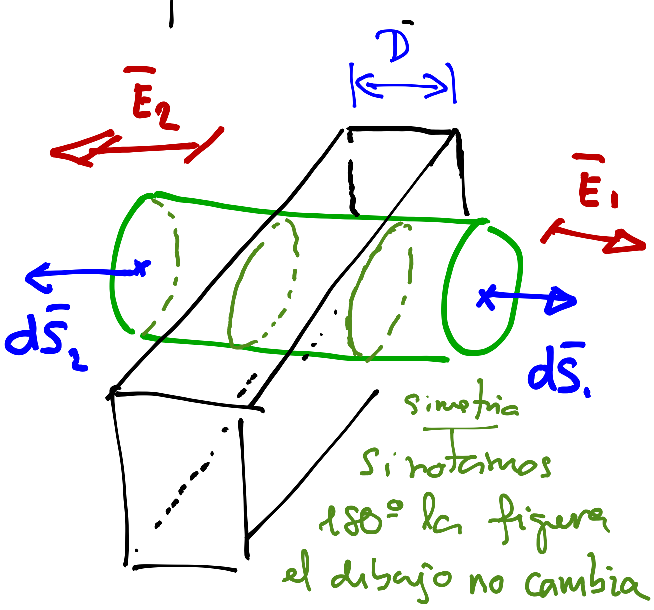
Prob. 3.6

La densidad de carga que nos dan en el problema es una función como la de la figura.

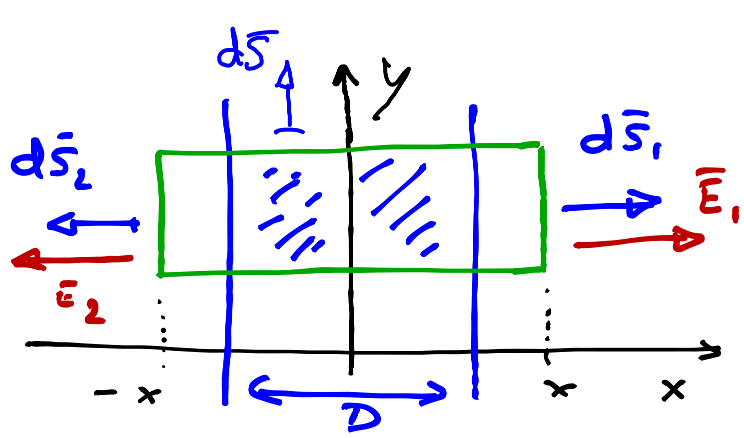


Como la distribución de carga se extiende a lo largo del eje y, el campo eléctrico sólo tiene componente $\vec{E} = E(x)\,\vec{i}$ por simetría.

Empleamos el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico empleando el cilindro de la figura cuyo eje está alineado con el verso $\vec{i}$.



También por simetría los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen direcciones opuestas.



Aplicamos el t^{ma} de Gauss al cilindro del dibujo. para $|x| > D/2$

$$\oint_{\text{cilindro}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{lados}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{S_1} \vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2 = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0}$$

0

$\vec{E} \perp d\vec{S}$ en la sup. lateral.

Q_{TOT} es la carga encerrada dentro del cilindro completo.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = |\bar{E}_1|\, dS_1 \\ \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 = |\bar{E}_2|\, dS_2\end{array}\right\} \text{ por simetría } |\bar{E}_1|\, dS_1 = |\bar{E}_2|\, dS_2$$

y además el campo eléctrico toma el mismo valor sobre las superficies $S_1 = S_2 = S_c$ luego:

$$\oint_{cil.} \bar{E} \cdot d\bar{S} = \int_{S_1} |\bar{E}_1|\, d\bar{S}_1 + \int_{S_2} |\bar{E}|\, dS_2 = 2|\bar{E}| \int dS = 2|\bar{E}| S_c$$

$$\oint_{cil} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2|\bar{E}|\, S_c = \frac{Q_{TOT}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-D/2}^{D/2} \rho(x)\, dv$$

y para el cilindro de la figura podemos escribir $dv = S_c\, dx$ y el t^ma^ de Gauss queda:

$$\oint_{cil.} \bar{E} \cdot d\bar{S} = 2S_c|\bar{E}| = \frac{1}{\epsilon_0}\left[\int_{-D/2}^{0} \frac{2\rho_0}{D}(-x)\, S_c\, dx + \int_{0}^{+D/2} \frac{2\rho_0}{D}(x)\, S_c\, dx\right]$$

función $|x|$ en cada región.

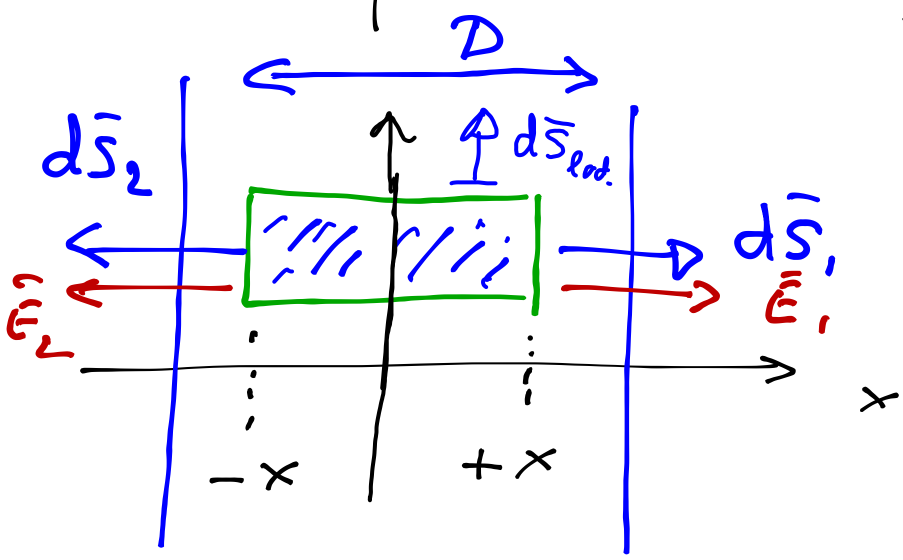
$$\cancel{2}\cancel{S_c}|\bar{E}| = \frac{\cancel{2}\rho_0 \cancel{S_c}}{\epsilon_0 D}\left[\int_{-D/2}^{0} (-x)\, dx + \int_{0}^{D/2} x\, dx\right]$$

$$|\bar{E}| = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 D}\left(-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-D/2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{D/2}\right) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 D}\left[\frac{(D/2)^2}{2} + \frac{(D/2)^2}{2}\right]$$

$$|\bar{E}| = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \cancel{D}}\, \cancel{2}\frac{D^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\times 4}$$

$$\boxed{\vec{E} = \pm \frac{\rho_0 D}{4\epsilon_0}\,\vec{i} \qquad |x| > D/2}$$

(2) Para $|x| < D/2$ nos encontramos con el esquema del dibujo y podemos repetir el argumento anterior:



$$\oint_S \bar{E}\cdot d\bar{S} = \int_{lados} \bar{E}\cdot \cancel{d\bar{S}}^{\,0} + \int_{S_1} \bar{E}_1 d\bar{S}_1 + \int_{S_2} \bar{E}_2 d\bar{S}_2$$

por simetría $\bar{E}_1 = -\bar{E}_2$

y también $\bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = |\bar{E}_1|\, dS_1 = |\bar{E}_2|\, dS_2$ luego,

$$2|\bar{E}_1| \times \cancel{S_1} = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\int_{-x}^{0} \rho(x) \times \cancel{S_2}\, dx + \int_0^x \rho(x) \times \cancel{S_1}\, dx\right]$$

$S_1 = S_2$

$$\cancel{2} E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\int_{-x}^{0} \cancel{2}\rho_0 \frac{(-x)}{D}\, dx + \int_0^x \cancel{2}\rho_0 \frac{x}{D}\, dx\right]$$

$$E_1 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 D}\left[\int_{-x}^{0} (-x)\, dx + \int_0^x x\, dx\right] = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 D}\left[+\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right]$$

$$E_1 = \frac{\rho_0 x^2}{\varepsilon_0 D} \quad \text{luego tendremos.}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_0 x^2}{\varepsilon_0 D}\vec{\imath} \quad \left(0 \le x \le \frac{D}{2}\right) \qquad \vec{E}_2 = -\frac{\rho_0 x^2}{\varepsilon_0 D}\vec{\imath} \quad \left(-\frac{D}{2} \le x \le 0\right)$$

Para calcular el potencial eléctrico se toma el mismo nulo en $x=0$ y se avanza hacia el exterior empleando la expresión,

$$\phi_b - \phi_a = -\int_{\bar{r}_a}^{\bar{r}_b} \bar{E}\cdot d\bar{r}$$

De modo que para $0 < x < D/2$ tendremos,

$$\phi(x) - \cancel{\phi(0)}^{\,0} = -\int_0^x \left[\frac{\rho_0 x^2}{D\epsilon_0}\right] dx$$

$$\phi(x) = -\frac{\rho_0}{D\epsilon_0}\int_0^x x^2 dx = -\frac{\rho_0 x^3}{3D\epsilon_0} \quad (0 < x \leq D/2)$$

y el valor en $x = D/2$ es entonces,

$$\phi\left(\frac{D}{2}\right) = -\frac{\rho_0}{3D\epsilon_0}\left[\frac{D^3}{8}\right] = -\frac{\rho_0}{D\epsilon_0}\frac{D^3}{24} = -\frac{\rho_0 D^2}{24\epsilon_0}$$

que es el punto inicial para calcular el potencial par $x > D/2$.

$$\phi(x) - \phi(D/2) = -\int_{D/2}^{x}\left[\frac{\rho_0 D}{4\epsilon_0}\right] dx$$

$$\phi(x) + \frac{\rho_0 D^2}{24\epsilon_0} = -\frac{\rho_0 D}{4\epsilon_0}\left[x - \frac{D}{2}\right] \quad \text{luego,}$$

$$\phi(x) = -\frac{\rho_0 D^2}{24\epsilon_0} - \frac{\rho_0 D}{4\epsilon_0}x + \frac{\rho_0 D^2}{8\epsilon_0}$$

$$\phi(x) = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{D^2}{6} + \frac{D^2}{2} - Dx\right]$$

$$\phi(x) = \frac{\rho_0 D}{4\varepsilon_0}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)}_{=1/3} D - x\right]$$

$$\phi(x) = \frac{\rho_0 D}{4\varepsilon_0}\left[\frac{D}{3} - x\right] \qquad \left(x \geq \frac{D}{2}\right) \quad [1]$$

El potencial para $x < -D/2$ se calcula por el mismo procedimiento pero también puede obtenerse por simetría haciendo el cambio $x \to -x$ y resulta

$$\phi(x) = \frac{\rho_0 D}{4\varepsilon_0}\left[\frac{D}{3} + x\right] \qquad (x \leq D/2) \quad [2]$$

y lo mismo podemos hacer para $-\frac{D}{2} < x < 0$ y se tiene

$$\phi(x) = \frac{\rho_0 x^3}{3\varepsilon_0 D}$$

NOTA: Hay que subrayar que este problema tiene incoherencia pues los potenciales [1] y [2] crecen al aumentar la coordenada x. Es decir que no están acotados cuando $x \to \pm\infty$, lo que es imposible según la teoría. Hemos calculado el potencial partiendo de $x=0$ donde $\phi(0)=0$ pero igualmente podríamos haber escrito;

$$\phi(\cancel{\infty})^{0} - \phi(x) = -\int_x^\infty E_x\, dx \qquad \text{para } x > D/2$$

$$\phi(\cancel{\infty})^{0} - \phi(x) = -\int_x^\infty \left(\frac{\rho_0 D}{4\varepsilon_0}\right) dx = \left(-\frac{\rho_0 D}{4\varepsilon_0}\right)\int_x^\infty dx$$

pero esta integral no puede calcularse porque su extremo superior diverge.

El origen de la incoherencia viene de considerar un plano infinito de carga, que no es una situación físicamente realista, pues su campo eléctrico ([3] y [4]) no disminuye con la distancia al plano.

Este problema es simplemente un ejercicio. Cuando en un problema aparecen planos infinitos de carga etc, hay que tener cuidado con la elección del punto escogido para calcular el potencial.