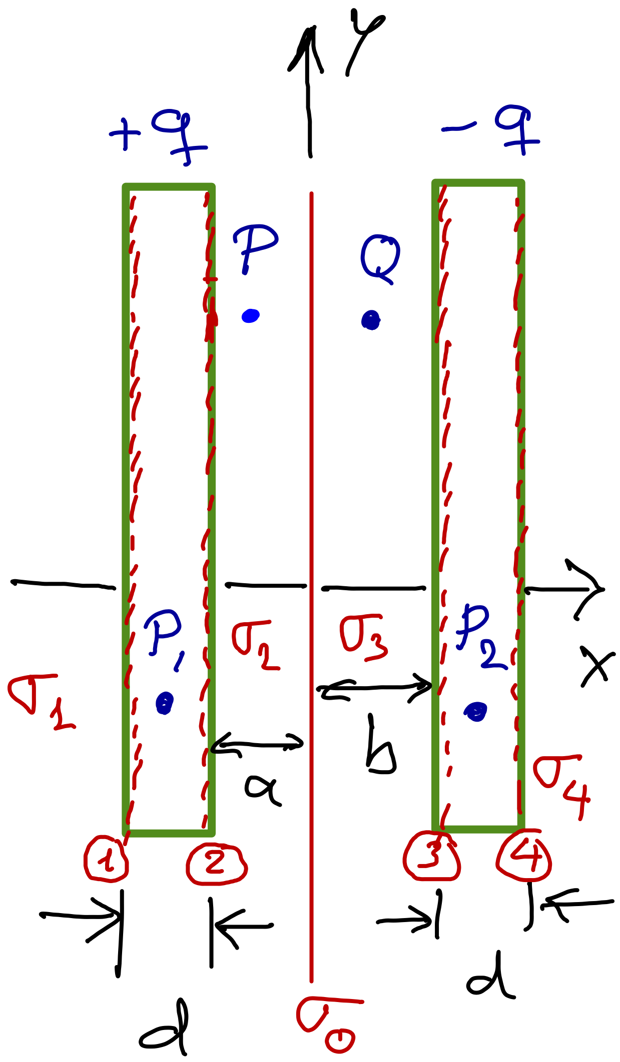
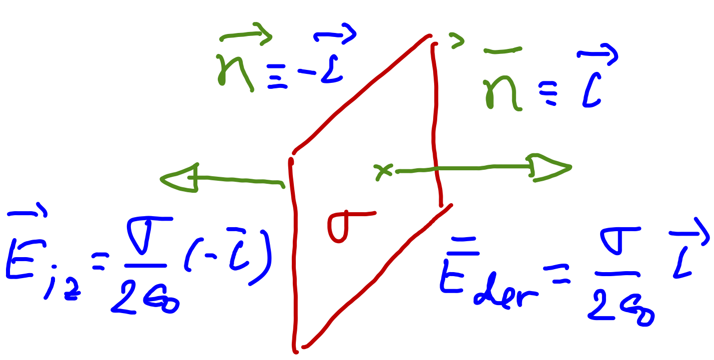
Aplicamos el principio de superposición para calcular los campos empleando la expresión para un plano de carga infinito. **Prob. 4.2**



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{n}$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal al plano. Sobre cada plano hay la densidad de carga σ_i que se indica en la figura.

(a) En los puntos P_1 y P_2 dentro del metal el campo eléctrico es nulo, y que es el resultado de la superposición de las campos creados por cada lámina de carga σ_i



Como muestra el dibujo cada una genera un campo a cada lado de igual magnitud y signos opuestos.

Para el punto P_1 dentro del metal tendremos:

plano de carga ①　　plano de carga ②　　plano de carga σ_0　　plano de carga ③　　plano de carga ④

$$\vec{E}(P_1) = 0 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}(\vec{i}) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0}(-\vec{i})$$

Solo el plano σ_1 a la izquierda de P_1 tiene contribucion positiva

Para el punto P_2 resulta.

Es la única contribución negativa pues está a la derecha de P_2 →

$$\vec{E}(P_2) = 0 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(\vec{i}) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(\vec{i}) + \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(\vec{i}) + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}(\vec{i}) + \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})$$

obtenemos dos ecuaciones que relacionan las densidades de carga de los conductores:

[1] $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_0 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0$

[2] $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_0 + \sigma_3 - \sigma_4 = 0$

Además la carga total del sistema se tiene que conservar de modo que:

$$q = \sigma_1 \times S + \sigma_2 \times S \longrightarrow \frac{q}{S} = \sigma_1 + \sigma_2 \quad [3]$$

$$-q = \sigma_3 \times S + \sigma_4 \times S \longrightarrow -\frac{q}{S} = \sigma_3 + \sigma_4 \quad [4]$$

Tenemos cuatro ecuaciones [1-4], la carga q, σ_0 y la superficie S son datos conocidos. Sumando [1] y [2] resulta.

$$2\sigma_1 + 2\sigma_4 = 0 \longrightarrow \sigma_1 = \sigma_4 \quad [5]$$

y si las restamos

$$-2\sigma_2 - 2\sigma_0 - 2\sigma_3 = 0 \longrightarrow -\sigma_0 = \sigma_2 + \sigma_3 \quad [6]$$

Empleando ahora [3], [4] y [5] se tiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{q}{S} &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ -\frac{q}{S} &= \sigma_3 + \sigma_4 = \sigma_3 + \sigma_1 \end{aligned}\right\}$$

Restando

$$\frac{2q}{S} = \sigma_2 - \sigma_3$$

y como en [6] $\sigma_3 = -(\sigma_0 + \sigma_2)$

$$\frac{2q}{S} = \sigma_2 + \sigma_0 + \sigma_2 = 2\sigma_2 + \sigma_0 \longrightarrow \sigma_2 = \frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}$$

Sustituyendo en [6] $(-\sigma_0) = \sigma_3 + \left(\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}\right)$

$$\sigma_3 = -\sigma_0 - \frac{q}{S} + \frac{\sigma_0}{2} = -\left(\frac{q}{S} + \frac{\sigma_0}{2}\right)$$

y ahora en [4] tendremos

$$-\frac{q}{S} = (\sigma_3 + \sigma_4) = -\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2} + \sigma_4$$

$$-\frac{q}{S} = -\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2} + \sigma_4 \longrightarrow \sigma_4 = \frac{\sigma_0}{2} = \sigma_1$$

Queda finalmente:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{\sigma_0}{2} \qquad \sigma_3 = -\left(\frac{q}{S} + \frac{\sigma_0}{2}\right) \qquad \sigma_2 = \frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}$$

(b) Conocidas las densidades de carga podemos calcular los campos en los puntos P y Q indicados.

$$\vec{E}(P) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}\vec{i} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_0 - \sigma_3 - \sigma_4)\,\vec{i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{i}}{2\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{\sigma_0}{2}} + \left(\frac{q}{S} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}\right) - \sigma_0 - \left(\frac{q}{S} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}\right) - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}\right]$$

$$\vec{E}(P) = \frac{\vec{i}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{2q}{S} - \sigma_0\right] = \frac{\vec{i}}{\varepsilon_0}\left[\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}\right] = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}(Q) = \frac{\vec{i}}{2\varepsilon_0}\left[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_0 - \sigma_3 - \sigma_4\right]$$

$$\vec{E}(Q) = \frac{\vec{i}}{2\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{\sigma_0}{2}} + \left(\frac{q}{S} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}\right) + \sigma_0 - \left(-\frac{q}{S} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}\right) - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}\right]$$

$$\vec{E}(Q) = \frac{\vec{i}}{2\varepsilon_0}\left[\frac{2q}{S} + \sigma_0\right] = \frac{\vec{i}}{\varepsilon_0}\left[\frac{q}{S} + \frac{\sigma_0}{2}\right] = -\frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

(c) Para calcular el potencial eléctrico partimos del punto central (densidad de carga σ_0) donde nos dicen en el enunciado que el potencial eléctrico es nulo. Aplicamos la definición:

(•) Para $0 < x \leq b$ $\quad \phi(x) - \underbrace{\phi(0)}_{\text{es nulo (enunciado)}}^{\,=0} = -\int_0^x \vec{E}_Q \cdot d\vec{r}$; $d\vec{r} = \vec{i}\,dx$

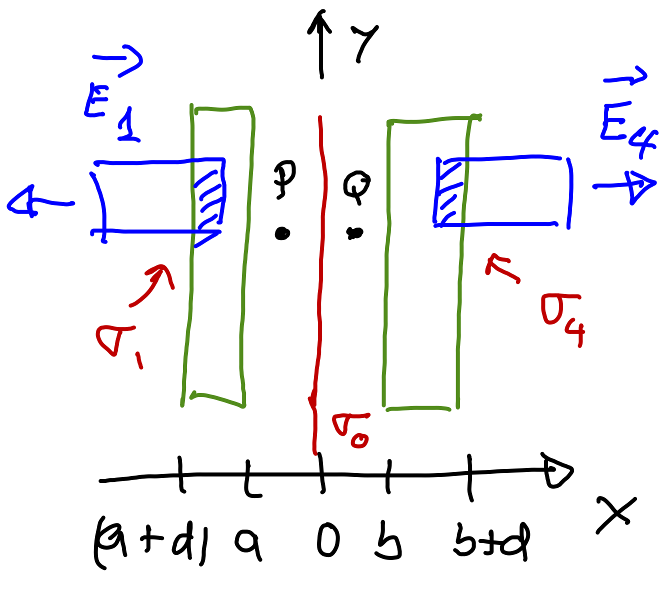
$$\phi(x) - \cancel{\phi(0)}^{\,0} = -\int_0^x \frac{(-\sigma_3)}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\,x \qquad \phi(x) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\,x$$

(•) En $b < x \leq b+d$ dentro del metal el campo eléctrico es nulo y el potencial una cte. Por continuidad

$$\phi(x) = \text{cte} = \phi(d) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\,b$$

Luego para $b < x \leq b+d$ $\quad \phi(x) = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_0}\,b \quad$ cte.

(•) Para $x > (b+d)$ el campo está determinado por la densidad de carga σ_4. Aplicando el t^{ma} de Gauss como se indica en el dibujo



$$\vec{E}_4 = \frac{\sigma_4}{\epsilon_0}\vec{i} \quad \text{y se tiene}$$

$d\vec{r} = \vec{i}\,dx$

$$\phi(x) - \phi(b+d) = -\int_{(b+d)}^{x} E_4\,dx = -\int_{(b+d)}^{x} \frac{\sigma_4}{\epsilon_0}\,dx$$

calculado antes $\sigma_3 b/\epsilon_0$

$$\phi(x) - \frac{\sigma_3 b}{\epsilon_0} = -\frac{\sigma_4}{\epsilon_0}\left[x - (b+d)\right]$$

$$x > (b+d) \qquad \phi(x) = \frac{\sigma_3 b}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{\epsilon_0}\left[x - (b+d)\right]$$

(•) Para $-a < x \leq 0$ procedemos como antes y

recorremos al revés el eje x

$$\cancel{\phi(0)}^{\,0} - \phi(x) = -\int_{x}^{0} \vec{E}_p \cdot d\vec{r} \qquad \text{con} \quad d\vec{r} = (-\vec{i})\,dx$$

(enunciado)

$$-\phi(x) = -\int_{x}^{0} \left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}\vec{i}\right)\cdot\left(-\vec{i}\,dx\right) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}x \qquad \phi(x) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0}x$$

(•) Entre $-(a+d) \leq x < -a$ es decir, dentro del metal el campo eléctrico es nulo y el potencial constante.

$$\phi(x) = \phi(-a) = -\frac{\sigma_2 a}{\epsilon_0} \qquad \phi(x) = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0}a \ \text{cte.}$$

(c) Para $x < -(a+d)$ necesitamos el campo eléctrico $\vec{E}_1$ (ver figura) y aplicando el T^ma de Gauss

$$\vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\vec{i}$$

$-\sigma_2 a/\epsilon_0$ calculado antes

$$\phi[-(d+a)] - \phi(x) = -\int_x^{-(d+a)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = -\int_x^{-(d+a)} \left(-\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\vec{i}\right)\cdot(-\vec{i}\,dx)$$

$$-\frac{\sigma_2 a}{\epsilon_0} - \phi(x) = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\left[-(d+a)-x\right] \quad \text{y queda}$$

$$\phi(x) = -\frac{\sigma_2 a}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\left[x+(a+d)\right]$$

NOTA: Los campos $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_4$ los hemos obtenido con el teorema de Gauss pero también pueden calcularse como la superposición de los creados por las hojas de carga. Vamos a comprobar que son equivalentes. Para el campo $\vec{E}_1$ en $x < -(d+a)$

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0}(-\vec{i}) + \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0}(-\vec{i})$$

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{i}}{2\epsilon_0}\left[-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_0 - \sigma_3 - \sigma_4\right]$$

El paréntesis es:

$$-\frac{\sigma_0}{2} - \left(\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}\right) - \sigma_0 + \left(\frac{q}{S} + \frac{\sigma_0}{2}\right) - \frac{\sigma_0}{2}$$

$$-\cancel{\frac{\sigma_0}{2}} - \cancel{\frac{q}{S}} + \cancel{\frac{\sigma_0}{2}} - \sigma_0 + \cancel{\frac{q}{S}} + \cancel{\frac{\sigma_0}{2}} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_0}{2}$$

Luego $\vec{E}_1 = \frac{\vec{\imath}}{2\epsilon_0}(-\sigma_0) = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = -\frac{\sigma_1}{\epsilon_0}\vec{\imath}$

Que coincide con lo obtenido con el teorema de Gauss.

y para el otro campo $\vec{E}_4$ en $x > (b+d)$ se tiene:

$$\vec{E}_4 = \frac{\vec{\imath}}{2\epsilon_0}\left[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_0 + \sigma_3 + \sigma_4\right]$$

El paréntesis es ahora:

$$\frac{\sigma_0}{2} + \left(\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}\right) + \sigma_0 + \left(-\frac{q}{S} - \frac{\sigma_0}{2}\right) + \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\cancel{\frac{\sigma_0}{2}} + \cancel{\frac{q}{S}} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}} + \sigma_0 - \cancel{\frac{q}{S}} - \cancel{\frac{\sigma_0}{2}} + \cancel{\frac{\sigma_0}{2}}$$

$$\sigma_4 = \frac{\sigma_0}{2}$$

$$\vec{E}_4 = \frac{\vec{\imath}}{2\epsilon_0}\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma_4}{\epsilon_0}\vec{\imath}$$

que también coincide con lo anterior.