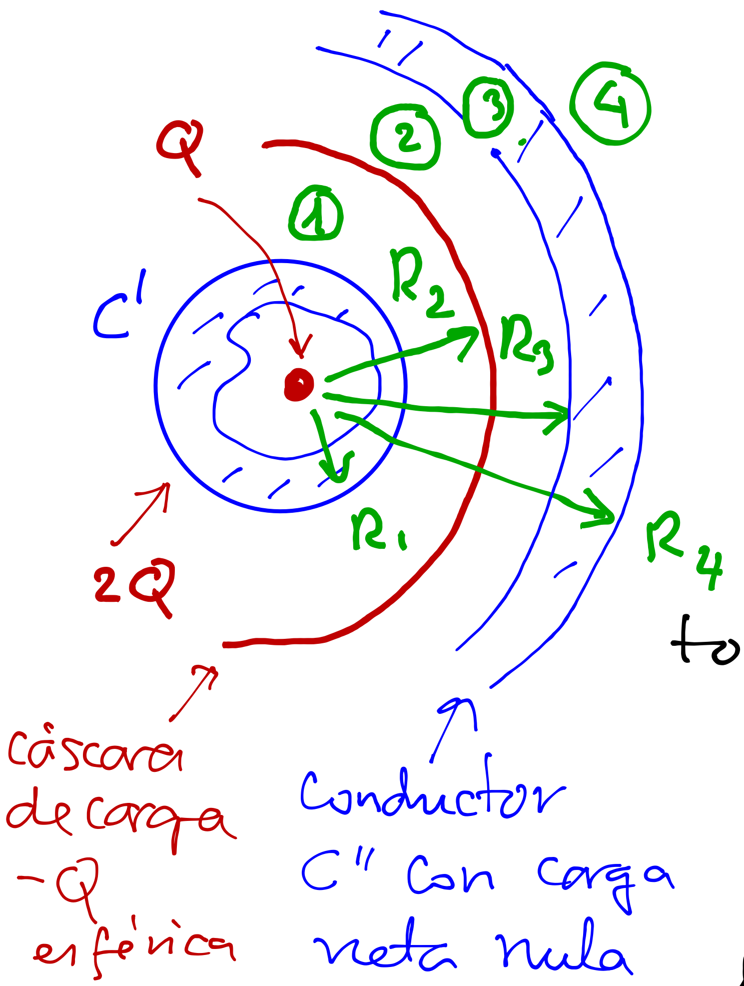
Prob: 4.4



El problema tiene simetría esférica y el campo eléctrico es siempre $\vec{E} = E_r \frac{\bar{r}}{r}$. Podemos emplear el teorema de Gauss y dividimos el espacio en cuatro partes. Excepto en el hueco todas las superficies de Gauss son esferas centradas en el origen cuya normal exterior es $\bar{n} = \bar{r}/r$ luego $d\vec{S} = \bar{n}\, dS$

NOTA: Como en otros problemas anteriores con simetría esférica el campo fuera de la superficie de Gauss será el de una carga puntual cuya magnitud es la de la carga encerrada dentro. Lo mismo sucede con el potencial eléctrico que ha de ser nulo $\phi(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$

(1) En primer lugar examinamos la cavidad que contiene la carga Q en su interior. Allí hay un campo eléctrico formado por la carga Q y la densidad $\sigma_{imp.}$ de carga sobre la superficie interior de la cavidad. Como no sabemos qué forma tiene no podemos determinar el campo dentro.

Fuera de la cavidad

Fuera de la cavidad dividimos el espacio en las cuatro partes (1-4) del dibujo y aplicamos el t^ma de Gauss utilizando esferas de radio r>0 centradas en el origen.

(1) Para $R_1 < r < R_2$

$$\int_{S_1} \bar{E}_1 \cdot d\bar{S}_1 = E_1 (4\pi r^2) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{3Q}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E}_1 = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Nótese que la distribución esférica tiene un espesor despreciable

(2) En $R_2 < r < R_3$

$$\int_{S_2} \bar{E}_2 \cdot d\bar{S}_2 = E_2 (4\pi r^2) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{3Q - Q}{\varepsilon_0}$$

$$\bar{E}_2 = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\bar{r}}{r}$$

(3) $R_3 < r < R_4$ Dentro del conductor C'' el campo es nulo $\bar{E}_3 = 0$

(4) Para $r > R_4$ el sistema se ve como una carga puntual

$$\int_{S_4} \bar{E}_4 \cdot d\bar{S}_4 = E_4 (4\pi r^2) = \frac{Q_{TOT}}{\varepsilon_0} = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$$

Para calcular el potencial del conductor más externo C'' partimos del potencial en el infinito (nulo) y vamos desde el exterior al interior.

$$\cancel{\phi(\infty)}^{\,0} - \phi(R_4) = -\int_{R_4}^{\infty} \bar{E}_4 \cdot d\bar{r} = -\int_{R_4}^{\infty} \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2} = -\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R_4}$$

luego

$$\phi(R_4) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R_4}$$

como vemos es el valor para una carga puntual de magnitud $2Q$

y $\phi(R_3) = \phi(R_4)$ por ser C'' un conductor.

Aplicamos de nuevo la misma formula

$$\phi(R_3) - \phi(R_2) = -\int_{R_2}^{R_3} \bar{E}_2 \cdot dr = -\int_{R_2}^{R_3} \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\phi(R_2) = \phi(R_3) - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 R_4} - \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi(R_2) = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right]$$

Para el conductor C' de radio R_1 tendremos,

$$\phi(R_2) - \phi(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \bar{E}_1 \cdot dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$\phi(R_1) = \phi(R_2) + \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$ y sustituyendo

$$\phi(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{R_4} - \frac{2}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{3}{R_1}\right]$$

(2) Vamos a calcular el trabajo como la diferencia entre la energía electrostática U_e^{con} y U_e^{sin} el

conductor C''. Como conocemos los campos eléctricos en cada zona podemos emplear la ecuación $U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |E|^2 dv$

y al tener simetría esférica $dv = (4\pi r^2)\, dr$

La energía electrostática "con" el conductor es entonces

$$U_e^{con} = \underbrace{U_e^{hueco}}_{①} + \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\underbrace{\int_{R_1}^{R_2} |\bar{E}_1|^2 dv}_{②} + \underbrace{\int_{R_2}^{R_3} |\bar{E}_2|^2 dv}_{③} + \int_{R_3}^{R_4} \cancel{|\bar{E}_3|^2}\, dv + \int_{R_4}^{\infty} |\bar{E}_4|^2 dv \right]$$

energía del hueco que no hemos calculado

$\cancel{|\bar{E}_3|^2} \to 0$: por ser un conductor este campo es nulo

comparamos esta expresión con la energía electrostática si el conductor C'' no está. En este caso el campo eléctrico entre R_3 y el infinito es el de una carga puntual de magnitud $2Q$ (ver la zona 2 anterior)

$$\bar{E}_2' = \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\bar{r}}{r}$$

luego,

He dividido esta integral en dos para calcular la diferencia

$$U_e^{sin} = \underbrace{U_e^{hueco}}_{①} + \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\underbrace{\int_{R_1} |\bar{E}_1|^2 dv}_{②} + \underbrace{\int_{R_2}^{R_3} |\bar{E}_2'|^2 dv}_{③} + \int_{R_3}^{\infty} |\bar{E}_2'|\, dv \right]$$

Si calculamos la diferencia $U_e^{con} - U_e^{sin}$ las integrales que he señalado como ①, ② y ③ se cancelan porque son iguales y sólo nos queda

$$\Delta U_e = U_e^{con} - U_e^{sin} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_4}^{\infty} |\vec{E}_4|^2 dv - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_3}^{\infty} |\vec{E}_2'|^2 dv$$

$$\Delta U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_4}^{\infty}\left(\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{dv}{r^4} - \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{R_3}^{\infty}\left(\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{dv}{r^4}$$

y sólo queda operar con $dv = 4\pi r^2 dr$

$$\Delta U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \times (4\pi) \times \left[\int_{R_4}^{\infty}\frac{dr}{r^2} - \int_{R_3}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\right]$$

$$\Delta U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 (4\pi) \times \left[\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right]$$

$$\Delta U_e = \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2} \times \frac{4Q^2}{(4\pi)^{\cancel{2}} \times \varepsilon_0^{\cancel{2}}} \times (\cancel{4\pi}) \times \left[\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right]$$

$$\Delta U_e = \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right] = \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right]$$