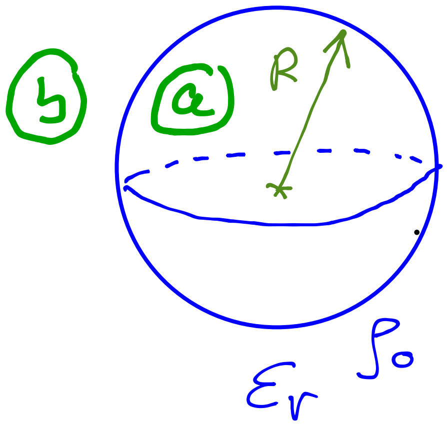
**Prob: 5.2**




Para calcular los campos comenzamos con el vector $\vec{D}$ y aplicamos el t$^{ma}$ de Gauss a esferas concéntricas de radio r centradas en el origen en las regiones (a) y (b) que se indican en el dibujo. El problema tiene simetría radial $\vec{D} \parallel \vec{E} \parallel \vec{P} \parallel \vec{r}/r$ y tendremos,

(a) Para $0 < r \leq R$ tendremos

$$\int_{S(r\leq R)} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_e \longrightarrow |\vec{D}|(4\pi r^2) = \underbrace{\int_0^r \rho_0 (4\pi r^2)\, dr}_{\text{Es la carga libre encerrada dentro de la superficie.}}$$

$$|\vec{D}|(\cancel{4\pi} r^2) = \rho_0 \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^3$$

$$|\vec{D}| = \frac{\rho_0}{3} r \quad \text{y tendremos} \quad \vec{D} = \frac{\rho_0 r}{3}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

Como $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \rightarrow \frac{\rho_0 r}{3} = \epsilon_0 \epsilon_r |\vec{E}| \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0\epsilon_r}\frac{\vec{r}}{r}$

y el vector de polarización es.

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} \qquad \vec{P} = \cancel{\epsilon_0}(\epsilon_r - 1)\frac{\rho_0 r}{3\cancel{\epsilon_0}\epsilon_r}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\left(\frac{\rho_0 r}{3}\right)\frac{\vec{r}}{r}$$

b) Para $r>R$ la esfera es vista como una carga puntual de magnitud $Q_p = \rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$. Si

Si aplicamos el teorema de Gauss se tiene,

$$\int_{S(r>R)} \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_e = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho_0 \rightarrow |\bar{D}|(\cancel{4\pi} r^2) = \rho_0 \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^3$$

$$|\bar{D}| = \frac{\rho_0 R^3}{3r^2} \longrightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0 R^3}{3r^2}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)$$ y el campo

El campo eléctrico es $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ pero en esta zona (fuera de la esfera) $\epsilon_r = 1$ y entonces,

$$|\bar{E}| = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2} \quad \text{y se tiene} \quad \bar{E} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right) \rightarrow$$

multiplico y divido por $(4\pi)$ y queda y se recupera

$$E = \frac{\rho_0 (4\pi) R^3}{3(4\pi)\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El vector de polarización $\vec{P} = \epsilon_0(\cancel{\epsilon_r} - 1)\bar{E} = 0$ puesto que en el vacío $\epsilon_r = 1$

Para calcular el potencial electrostático se parte de un punto donde sea conocido. En este caso $\phi \rightarrow 0$ en el infinito.

El campo eléctrico para $R<r<\infty$ es equivalente al de una carga puntual de magnitud $Q = \rho_0\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ podríamos escribir directamente

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 \cancel{(4\pi)} R^3}{3\cancel{(4\pi)}\epsilon_0 r} = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} \quad (r>R)$$

y se obtendría el mismo resultado calculado

$$\cancel{\phi(\infty)} - \phi(r) = -\int_r^{\infty} \bar{E} \cdot d\bar{r} = -\int_r^{\infty} \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}\, dr$$

$0$

El potencial en la superficie de la esfera es

$$\phi(R) = \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 R} = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} \qquad r = R$$

y el potencial eléctrico para $r \leq R$ se calcula como siempre.

$$\phi(R) - \phi(r) = -\int_r^{R} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0 \epsilon_r}\, dr = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0\epsilon_r}\int_r^{R} r\, dr$$

$$\phi(r) = \phi(R) + \frac{\rho_0}{3\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{R^2 - r^2}{2}\right)$$

$$\phi(r) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho_0}{3\epsilon_0\epsilon_r}\,\frac{R^2 - r^2}{2}$$ o bien

$$\phi(r) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{6\epsilon_0\epsilon_r}(r^2 - R^2)$$