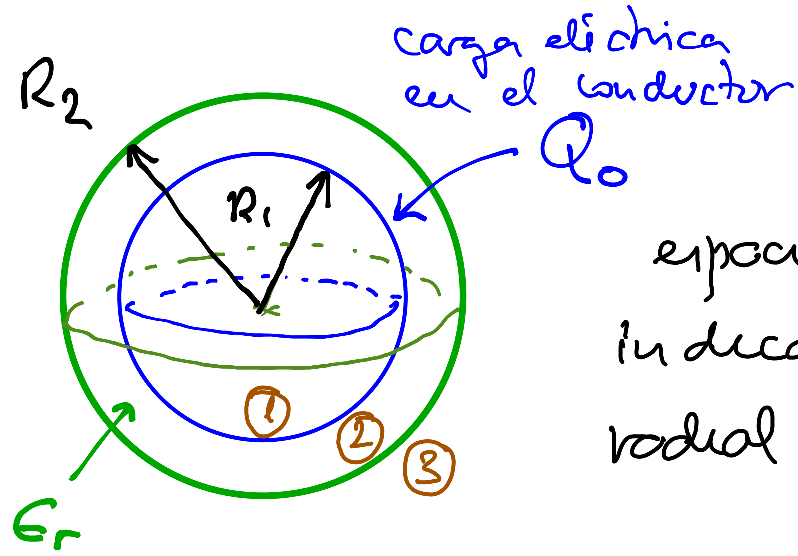

Prob: 5.4

Dividimos primero el espacio en tres zonas como indica el dibujo. Como hay simetría radial $\vec{D} \parallel \vec{E} \parallel \vec{P} \parallel \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$

ya que el campo está creado por la carga Q_0 situada en el origen.

(a) En 1 $r \geq R_1$ la carga Q_0 libre del conductor es la que crea el campo eléctrico de modo que

$r < R_1$ $\quad E_1 = 0 \quad$ para $\quad R_1 > r > 0$

también $\vec{D}_1 = 0$ y $\vec{P}_1 = 0$ en esta zona por ser un metal.

Para 2 $R_1 \leq r \leq R_2$ está el material dieléctrico y para determinar $\vec{E}$ calculamos primero el vector desplazamiento empleando el teorema de Gauss

$$\int_{S(r)} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S} = Q_0 \longrightarrow |\vec{D}_2| (4\pi r^2) = Q_0 \rightarrow \vec{D}_2 = \frac{Q_0}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

y el campo eléctrico en el dieléctrico donde $\epsilon_r > 1$ es

$$\vec{D}_2 = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_2 \qquad \vec{E}_2 = \frac{Q_0}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \vec{e}_r \quad \text{en } R_1 \leq r \leq R_2$$

El vector de polarización es $\vec{P}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$

luego $\vec{P}_2 = \cancel{\epsilon_0}(\epsilon_r - 1)\dfrac{Q_0}{4\pi\cancel{\epsilon_0}\epsilon_r r^2}\vec{e}_r$

$$\vec{P}_2 = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\frac{Q}{4\pi r^2}\vec{e}_r$$

En la zona 3 de el medio es el vacío y $\epsilon_r = 1$ y podemos utilizar el t^ma de Gauss para una esfera de radio $r > R_2$ y entonces

$$\int_S \bar{D}_3 \cdot d\bar{S} = Q_e = Q_0 \rightarrow |\bar{D}_3|(4\pi r^2) = Q_0 \text{ luego}$$

$$\vec{D}_3 = \frac{Q_0}{4\pi r^2}\frac{\bar{r}}{r} \quad y \quad \vec{E}_3 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\bar{r}}{r} \quad \text{para } r \geq R_2$$

y como $\epsilon_r = 1$ $\vec{P}_3 = 0$

(b) En la càscara de dieléctrico entre $R_2 > r > R$ se producen cargas de polarización por el campo eléctrico radial. Para determinarlas hemos de utilizar el vector de polarización $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\bar{E}$ ya que;

$$\sigma_{p_1} = \vec{P}(R_1) \cdot \left(-\frac{\bar{R}_1}{R_1}\right) \quad y \quad \sigma_{p_2} = \vec{P}(R_2) \cdot \frac{\bar{R}_2}{R_2}$$

siendo $-\bar{R}_1/R_1$ y $\bar{R}_2/R_2$ los vectores unitarios de las superficies exteriores de dieléctrico en $r = R_1$ y $r = R_2$

La densidad volumétrica de carga de polarización es:

$$\rho_{pol} = -\nabla\cdot\vec{P}$$

Las densidades superficiales de carga sobre las caras exteriores del dieléctrico son:

$$\sigma_{p1} = \vec{P}(R_1)\cdot\left(-\frac{\vec{R}_1}{R_1}\right) = \frac{Q_0}{4\pi R^2}\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{\vec{R}_1}{R_1}\cdot\left(-\frac{\vec{R}_1}{R_1}\right)$$

$$\sigma_{p1} = -\frac{Q_0}{4\pi R_1^2}\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}$$

$$\sigma_{p2} = \vec{P}(R_2)\cdot\left(\frac{\vec{R}_2}{R_2}\right) = \frac{Q_0}{4\pi R_2^2}\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}\frac{\vec{R}_2}{R_2}\cdot\frac{\vec{R}_2}{R_2}$$

$$\sigma_{p2} = \frac{Q_0}{4\pi R_2^2}\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r}$$

Para evaluar la densidad volumétrica de carga $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P}$ tenemos que expresar la divergencia en coordenadas esféricas. La expresión general es:

$$\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\varphi}\frac{\partial P_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(P_\varphi\,\mathrm{sen}\varphi)$$

donde $\vec{P} = P_r\vec{e}_r + P_\theta\vec{e}_\theta + P_\varphi\vec{e}_\varphi$ son las componentes del campo vectorial. Al tener simetría radial, en nuestro caso $P_\theta = P_\varphi = 0$ y sólo

queda
$$\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 P_r) \quad \text{luego}$$

$$\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\cancel{r^2}\frac{Q_0}{4\pi \cancel{r^2}}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\right] = 0$$

La densidad de carga de polarización volumétrica es $\rho_p = -\nabla\cdot\vec{P} = 0$ nula.

Vamos a comprobar que no hay carga neta inducida en el dieléctrico

superficies interior y exterior de la cáscara de dieléctrico

$$Q_{TOT} = \sigma_{1p}\times(4\pi R_1^2) + \sigma_{2p}\times(4\pi R_2^2)$$

$$Q_{TOT} = \frac{-Q_0}{(\cancel{4\pi R_1^2})}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\times(\cancel{4\pi R_1^2}) + \frac{Q_0}{(\cancel{4\pi R_2^2})}\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\times(\cancel{4\pi R_2^2}) = 0$$

(c) Para calcular el potencial eléctrico necesitamos partir de un punto conocido, $\phi \to 0$ en distancias radiales $r\to\infty$. Como el campo eléctrico para $r \geq R_2$ es el de una carga puntual podemos simplemente escribir

$$\phi_3(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{para } r\geq R_2 \qquad (3)$$

que es lo mismo que tendríamos si empleamos,

$$\phi_3(\infty) - \phi_3(r) = -\int_r^{\infty} \bar{E}_2 \cdot d\bar{r} = -\int_r^{\infty} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\, dr$$

para que el potencial sea continuo

y en $r = R_2$ $\quad \phi_3(R_2) = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \phi_2(R_2)$

Para $R_2 > r > R_1$ dentro del dieléctrico (zona 2) podemos hacer,

$$\overset{\phi_3(R_2)}{\overset{\shortparallel}{\phi_2(R_2)}} - \phi_2(r) = -\int_r^{R_2} \bar{E}\cdot d\bar{r} = -\int_r^{R_2} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{dr}{r^2}$$

$$\phi_2(R_2) - \phi_2(r) = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\int_r^{R_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi_2(r) = \phi_2(R_2) + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi_2(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\phi_2(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{\epsilon_r}{R_2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{1}{r} + \frac{(\epsilon_r - 1)}{R_2}\right]$$

y para $0 < r \leq R_1$ tendremos $\phi_1(R_1)$ constante

$$\phi_1(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2}\right] \qquad \text{Zona } 1$$

y para $0 < r \leq R_1$ tendremos $\phi(R_1)$ constante

$$\phi(R_1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}\left[\frac{1}{R_1} + \frac{\epsilon_r - 1}{R_2}\right]$$