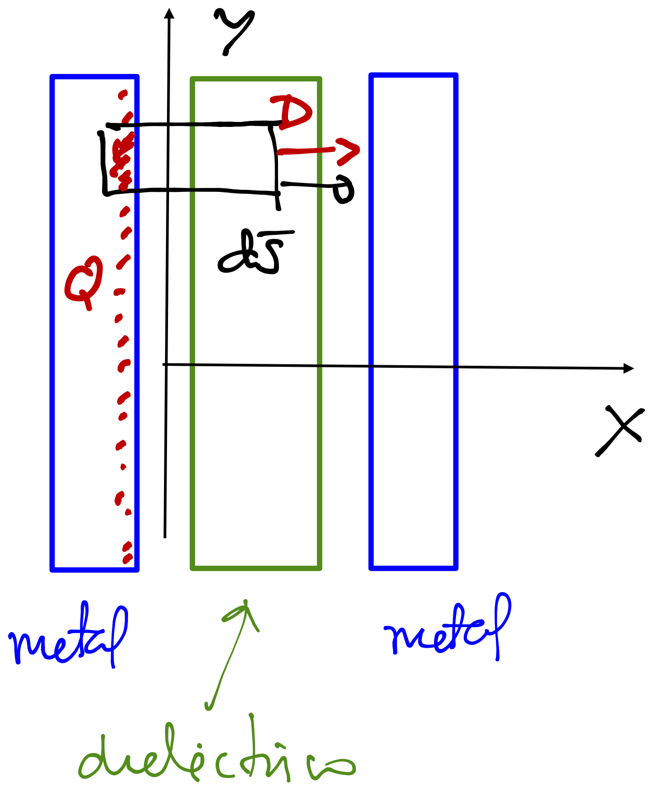

Prob: 5.8

El problema es semejante al anterior pero ahora no conocemos la forma explícita de la función $\epsilon_r(x)$ sólo sus valores en $x=0$ $\epsilon_r(0)=\epsilon_{r1}$, $x=d$ $\epsilon_r(d)=\epsilon_{r2}$ y se toma como un dato $d\epsilon_r/dx$

Procedemos del mismo modo que en el problema anterior. aplicando el teorema de Gauss al cilindro del dibujo.

$\bar{D}=0$ en el metal $\qquad \sigma_\ell = Q/S$

$$\int_S \bar{D}\cdot d\bar{S} = \underbrace{\int \bar{D}\cdot d\bar{S}}_{\text{lados}\ =0} + \underbrace{\int \bar{D}\cdot d\bar{S}}_{\text{tapa izq}\ =0} + \underbrace{\int \bar{D}\cdot d\bar{S}}_{\text{tapa dcr}} = Q_\ell = \sigma_\ell \times S$$

$d\bar{S}\perp\vec{D}$ por simetría

Tenemos $|\bar{D}|\times S = \sigma_\ell \times S \longrightarrow \bar{D} = \sigma_\ell\,\vec{i}$

[1] $\vec{E} = \dfrac{\sigma_\ell}{\epsilon_0\,\epsilon_r(x)}\,\vec{i}$ y $\bar{P} = \epsilon_0(\epsilon_r(x)-1)\vec{E} = \sigma_\ell\,\dfrac{\epsilon_r(x)-1}{\epsilon_r(x)}\,\vec{i}$

desconocida

Con este valor de $\vec{P}$ podemos calcular las densidades de carga de polarización en el dieléctrico.

$$\sigma_p(d) = \vec{P}(d)\cdot\vec{n} = \left[\sigma_\ell\,\frac{\epsilon_2-1}{\epsilon_2}\,\vec{i}\right]\cdot\left[\vec{i}\right] = \frac{Q}{S}\left(\frac{\epsilon_2-1}{\epsilon_2}\right)$$

$$\sigma_p(0) = \vec{P}(0)\cdot\vec{n} = \left[\sigma_\ell \frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1}\vec{i}\right]\cdot\left[-\vec{i}\right]$$

$$\sigma_p(0) = -\frac{Q}{S}\,\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1}$$

La densidad de carga de polarización volúmica es

$$\rho_{p} = -\nabla\cdot\vec{P} \longrightarrow \rho_p = -\frac{d}{dx}\left[\sigma_\ell\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r(x)}\right)\right]$$

en una dimensión, luego

$$\rho_p = \sigma_\ell \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\epsilon_r(x)}\right) = -\sigma_\ell \frac{1}{\epsilon^2(x)}\frac{d\epsilon_r}{dx}$$

$$\rho_p = -\frac{Q}{S}\frac{1}{\epsilon_r^2(x)}\frac{d\epsilon_r}{dx}$$

y con esta expresión podemos calcular la carga de polarización en el interior del dieléctrico

$$Q_V = \int_V \rho_{pol}\, dv \rightarrow \begin{cases} dv = S\,dx \\ Q_{pol} = \int_0^d \rho_{pol}\,(S\,dx) \end{cases}$$

$$Q_V = \int_0^d -\frac{Q}{\cancel{S}}\frac{\cancel{S}}{\epsilon^2(x)}\frac{d\epsilon}{dx}\,dx = \int_0^d -Q\,\frac{d\epsilon}{\epsilon^2}$$

Son los valores de la función $\epsilon(x)$ en $x=0$ y $x=d$

$$Q_V = -Q\left[\frac{\epsilon^{-2+1}}{(-2+1)}\right]_0^d = Q\left[\frac{1}{\epsilon}\right]_0^d = Q\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)$$

y sumando la contribución de la carga superficial

$$Q_p = Q_v + \sigma(0) \times S + \sigma(d) \times S$$

$$Q_p = Q\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right) + \cancel{S}\left(-\frac{Q}{\cancel{S}}\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1}\right) + \cancel{S}\left(\frac{Q}{\cancel{S}}\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2}\right)$$

$$Q_p = \cancel{\frac{Q}{\epsilon_2}} - \cancel{\frac{Q}{\epsilon_1}} - \cancel{Q} + \cancel{\frac{Q}{\epsilon_1}} + \cancel{Q} - \cancel{\frac{Q}{\epsilon_2}} = 0$$

$$Q_p = 0$$