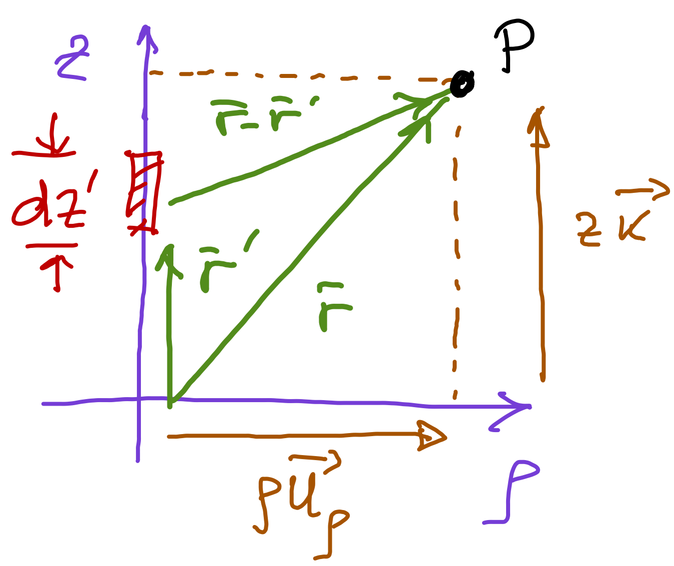
Prob: 7.3

El problema tiene simetría cilíndrica alrededor del eje z como muestra el esquema del dibujo

La coordenada $\rho^2 = x^2 + y^2$ es la distancia radial del eje z al punto P.




Calculamos la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ empleando la ley de Biot - Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_c}{4\pi} \oint \frac{d\bar{\ell}' \wedge (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

en donde $d\bar{\ell}' = dz'\vec{k}$ es el elemento del circuito y $(\bar{r} - \bar{r}')$ el vector que va desde este al punto P y el vector $\bar{r}' = z'\vec{k}$ va desde el origen al elemento $d\ell'$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \\ \bar{r}' = z'\vec{k} \end{array}\right\} (\bar{r} - \bar{r}') = \rho\vec{u}_\rho + (z - z')\vec{k}$$

$$|\bar{r} - \bar{r}'|^2 = \rho^2 + (z - z')^2$$

$$d\bar{\ell}' \wedge (r - \bar{r}') = (dz'\bar{k}) \wedge [\rho\bar{u}_\rho + (z - z')\vec{k}]$$

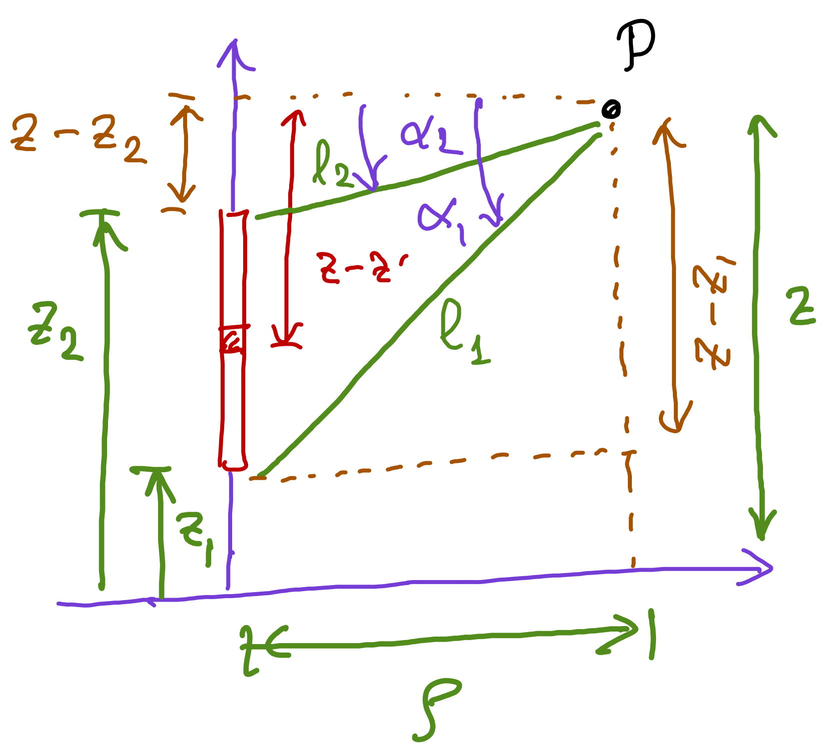
$$d\ell' \wedge (\bar{r} - \bar{r}') = \rho\, dz' \underbrace{(\bar{k} \wedge \bar{u}_\rho)}_{\vec{u}_\varphi} = \rho\, \vec{u}_\varphi\, dz'$$

Hay que evaluar la integral

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_c}{4\pi} \oint \frac{\rho\, \vec{u}_\varphi\, dz'}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$ entre las coordenadas $z_1$ y $z_2$ del dibujo

Podemos sacar $\vec{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$ de la integral pues no depende de $z'$ queda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_c}{4\pi}\, \vec{u}_\varphi \left[ \underbrace{\int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho\, dz'}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}}}_{I} \right] \quad [1]$$




como vemos en la figura

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{(z-z_1)}{\rho} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{z-z_2}{\rho}$$

y para una altura $z'$ entre las coordenadas $z_1$ y $z_2$ se tiene

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z-z'}{\rho}$$ donde

La coordenada $z$ del punto P es una constante y en la integral del paréntesis podemos hacer,

$$I = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho\, dz'}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = \rho^2 \int_{z_1}^{z_2} \frac{d(z'/\rho)}{\rho^3 \left[1 + \frac{(z-z')^2}{\rho^2}\right]^{3/2}}$$

$$d\left(\frac{z'}{\rho}\right) = -d\left(\frac{z-z'}{\rho}\right) = -d(\operatorname{tg}\alpha) = -\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\left[1+\frac{(z-z')^2}{\rho^2}\right]=1+tg^2\alpha=1+\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}=\frac{1}{cos^2\alpha}$$

Sustituyendo en la integral

$$I=\left(-\frac{1}{\rho}\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{(-1)\,d\alpha/cos^2\alpha}{\left[1/cos^2\alpha\right]^{3/2}}=\left(-\frac{1}{\rho}\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{d\alpha}{cos^2\alpha}\left[cos^2\alpha\right]^{3/2}$$

$$I=\left(-\frac{1}{\rho}\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}cos\alpha\,d\alpha=(-\rho)\left[sen\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}=\frac{1}{\rho}\left[sen\alpha_1-sen\alpha_2\right]$$

[2]

En la figura se observa que:

$$sen\,\alpha_1=\frac{z-z_1}{l_1}=\frac{z-z_1}{\left[\rho^2+(z-z_1)^2\right]^{1/2}}$$

$$sen\,\alpha_2=\frac{z-z_2}{l_2}=\frac{z-z_2}{\left[\rho^2+(z-z_2)^2\right]^{1/2}}$$

Sustituyendo en la ley de Biot Savart [1] anterior.

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_c}{4\pi}\vec{u}_\varphi\frac{1}{\rho}\left[\frac{z-z_1}{\left[\rho^2+(z-z_1)^2\right]^{1/2}}-\frac{z-z_2}{\left[\rho^2+(z-z_2)^2\right]^{1/2}}\right]$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I_c}{4\pi\rho}\left[\frac{z-z_1}{\left[\rho^2+(z-z_1)^2\right]^{3/2}}-\frac{z-z_2}{\left[\rho^2+(z-z_2)^2\right]^{3/2}}\right]$$

Recuperamos la expresión para un hilo infinito si tomamos $z_1 \to -\infty$ y $z_2 \to \infty$. Esto equivale a hacer en la ecuación [2] los ángulos $\alpha_1 \to \pi/2$ y $\alpha_2 \to -\pi/2$ con lo que resulta

$$\operatorname{sen}\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

y entonces
$$B = \frac{\mu_0 I_c}{4\pi\rho} \times 2 = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi\rho}$$