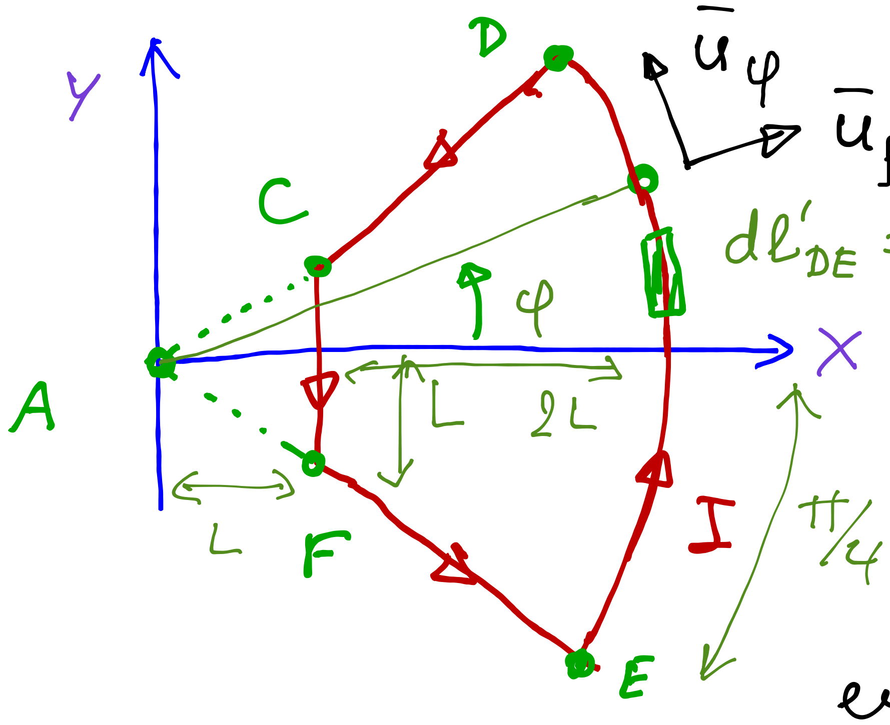
Prob: 7.6



$d\ell'_{DE} = R\,d\varphi = (3L)\,d\varphi$

Como el sistema no tiene una simetría fácil para calcular el campo hemos de emplear la ley de Biot-Savart

$$\vec B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\bar\ell' \wedge (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3}$$

donde la integral está extendida sobre el circito en rojo en el dibujo. Tenemos.

$d\bar\ell'_{FE} \parallel (\bar r - \bar r')$ en este tramo

$$\vec B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_C^F \frac{d\bar\ell'_{CF} \wedge (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3} + \underbrace{\cancel{\int_F^E \frac{d\bar\ell'_{FE} \wedge (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3}}}_{0} + \int_E^D \frac{d\bar\ell'_{ED} \wedge (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3} + \underbrace{\cancel{\int_D^C \frac{d\bar\ell'_{DC} \wedge (\bar r - \bar r')}{|\bar r - \bar r'|^3}}}_{0}\right]$$

$d\bar\ell'_{DC} \parallel (\bar r - \bar r')$ en este tramo.

El vector $(\bar r - \bar r')$ va desde el elemento de circuito $d\bar\ell'$ hasta el punto A y en los tramos FE y DC los dos vectores $d\ell'$ y $(\bar r - \bar r')$ son paralelos por lo que su producto vectorial es nulo y no contribuyen a la integral. Queda

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\int_C^F \frac{d\bar{l}'_{CD} \wedge (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} + \int_E^D \frac{d\bar{l}'_{FE} \wedge (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} \right.$$

En el tramo circular ED $(\bar{r}-\bar{r}') = -3L\,\vec{u}_\rho$

$d\bar{l}'_{ED} = (3L\,d\varphi)\,\vec{u}_\varphi$ luego

$$\int_E^D \frac{d\bar{l}'_{ED} \wedge (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} = \int_E^D \frac{(3L\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi) \wedge (-3L\,\bar{u}_\rho)}{(3L)^3} =$$

← ver el dibujo

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{(-3L)(3L)}{(3L)^3}\,d\varphi\,\overset{=\,-\vec{k}}{(\vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_\rho)} = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} -\frac{d\varphi}{3L}(-\bar{k}) = \frac{\pi}{6L}$$

Para la otra integral $d\bar{l}'_{CF} = -dy\,\vec{j}$ y el vector

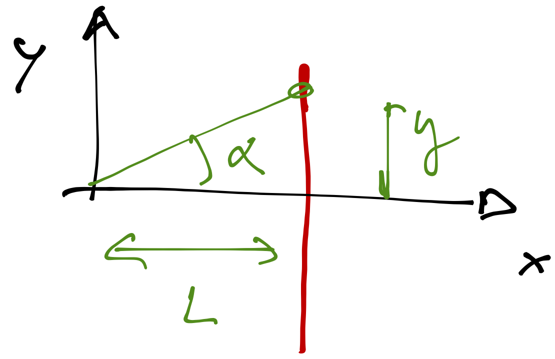
$(\bar{r}-\bar{r}') = L\vec{i} + y\vec{j}$ luego

apunta en el sentido $-\vec{j}$

$$\int_C^F \frac{d\bar{l}'_{CF} \wedge (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3} = \int_{-L}^{+L} \frac{(-dy\,\bar{j}) \wedge (L\vec{i} + y\bar{j})}{[y^2+L^2]^{3/2}}$$

$$= \int_{-L}^{+L} \frac{-L\,dy}{[L^2+y^2]^{3/2}}\,\overset{=\,-\vec{k}}{(\bar{j} \wedge \bar{i})} = \int_{-L}^{+L} \frac{L\,dy}{[L^2+y^2]}\,\vec{k}$$

La integral se calcula con el cambio de variable $tg\alpha = \frac{y}{L}$



luego $y = L\, tg\alpha$

$$dy = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$[L^2+y^2] = L^2 + L^2 tg^2\alpha = L^2(1+tg^2\alpha)$$

$$1+tg^2\alpha = 1 + \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

de modo que

$$-\int_{-L}^{+L} \frac{L\,dy}{[L^2+y^2]^{3/2}} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\pi/4} \frac{(-L)\,d\alpha/\cos^2\alpha}{L^3[1/\cos^2\alpha]^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{L}$$

y sumando las dos contribuciones

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L}\left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\right)\vec{k}$$