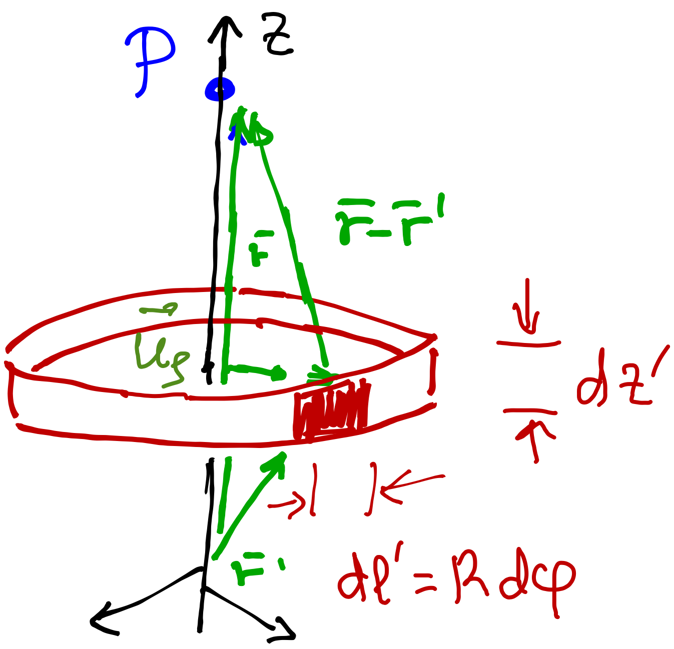
Prob. 7.7

Calculamos el campo del solenoide a lo largo del eje z del mismo por integración directa. Tenemos que calcular la expresión

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\bar{\ell}' \wedge (\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}$$ en coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z)

Consideramos como en el esquema un anillo de espesor dz' que puede verse como una espira elemental recorrida por la corriente



$$dI' = \underbrace{(n\,dz')}_{\text{número de hilos}} \underbrace{I_c}_{\text{corriente que circula por un hilo}}$$

Los vectores que aparecen en la ley de Biot-Savart son en este caso:

$$\vec{r} = z\vec{k} \qquad \vec{r}' = z\vec{k} + R\vec{u}_\rho$$

$$\vec{r}-\vec{r}' = (z-z')\vec{k} - R\vec{u}_\rho \qquad |\bar{r}-\bar{r}'|^3 = [R^2 + (z-z')^2]^{3/2}$$

$$I \rightarrow dI' = (n\,dz')\,I_c \qquad d\bar{\ell}' = (R\,d\varphi)\,\vec{u}_\varphi$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\, dI'}{4\pi} \frac{(R\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi) \wedge [(z-z')\vec{k} - R\vec{u}_\rho]}{[R^2 + (z-z')^2]^{3/2}}$$

$$(R\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi)\wedge\left[(z-z')\vec{k}-R\vec{u}_\rho\right] = R(z-z')\,d\varphi\,\underbrace{(\vec{u}_\varphi\wedge\vec{k})}_{\vec{u}_\rho} - (R^2 d\varphi)\,\underbrace{(\vec{u}_\varphi\wedge\vec{u}_\rho)}_{-\vec{k}}$$

$$= R^2 d\varphi\,\vec{k} + R(z-z')\,d\varphi\,\vec{u}_\rho$$

y la integral que tenemos que calcular es entonces:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\,dI'}{4\pi}\,\frac{R\,d\varphi\,(z-z')\,\vec{u}_\rho + R^2 d\varphi\,\vec{k}}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}$$

Todavía en diferencial $d\vec{B}$ porque falta la integral en dI'

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0\,dI'}{4\pi}\left[\underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{R(z-z')\,\vec{u}_\rho}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,d\varphi}_{\text{Esta integral será nula por la simetría del problema.}} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{R^2 d\varphi}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,\vec{k}}_{\text{Esta integral en } d\varphi \text{ es inmediata}}\right]$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{R(z-z')\,\vec{u}_\rho}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\,d\varphi = \frac{R(z-z')}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\int_0^{2\pi}\vec{u}_\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{R(z-z')}{\left[R^2+(z-z')^2\right]^{3/2}}\left[\vec{i}\left(\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\right)+\vec{j}\left(\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right)\right] = 0$$

ambas integrales son nulas.

Nos queda entonces:

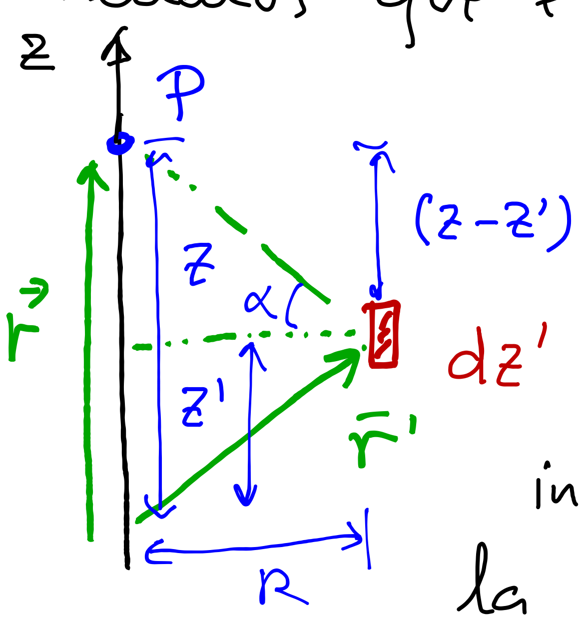
$$dB_z = \frac{\mu_0\, dI'}{4\pi}\left[\int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\varphi}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}}\right] = \frac{\mu_0\, dI'}{4\pi}\,\frac{2\pi R^2}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

Falta integrar sobre $dI' = (n\,dz')\,I_c$ donde dz' es el espesor del anillo diferencial del dibujo.

$$B_z = \frac{\mu_0 n I_c R^2}{2}\int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{dz'}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

donde z_{min} y z_{max} son las coordenadas de la primera y última espira del solenoide de altura L

Tenemos que evaluar la integral



$$I_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dz'}{[R^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

Para los puntos P del eje z como indica el dibujo. La misma integral I_1 la hemos calculado en otros problemas

$$I_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{1}{R^3}\left[\frac{dz'}{\left[1+\frac{(z-z')^2}{R^2}\right]^{3/2}}\right] = \frac{1}{R^2}\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{-d(z-z')}{\left[1+\frac{(z-z')^2}{R^2}\right]^{3/2}}$$

z es cte integramos en z'

empleando el cambio de variable (ver esquema)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z - z'}{R} = \frac{s}{R} \qquad s = R\operatorname{tg}\alpha$$

$$d(z - z') = d(R\operatorname{tg}\alpha) = ds \rightarrow \quad ds = \frac{R}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$

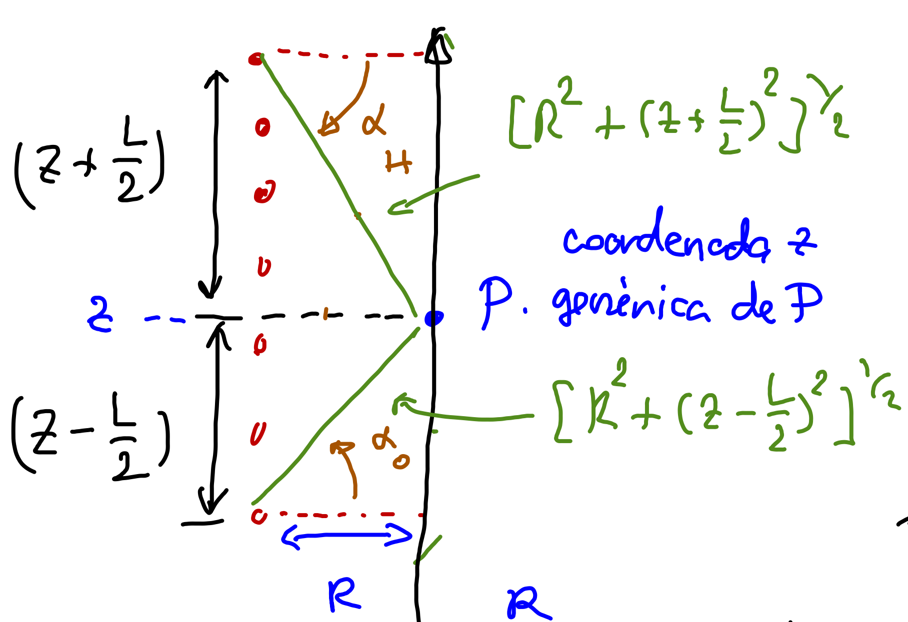
$\leftarrow$ z es cte.

y entonces $\quad \left[1 + \frac{s^2}{R^2}\right] = \left[1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right] = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

La integral I_1 se convierte en:

$$I_1 = \frac{1}{R^3}\int_{-L/2}^{+L/2} \frac{-ds}{[1 + s^2]^{3/2}} = \frac{(-1)}{R^3}\int_{\alpha_0}^{\alpha_H} [\cos^2\alpha]^{3/2} \frac{R}{\cos^2\alpha}\,d\alpha$$

$$I_1 = \left(\frac{-1}{R^2}\right)\int_{\alpha_0}^{\alpha_H} \cos\alpha\,d\alpha = \left(-\frac{1}{R^2}\right)\left[\operatorname{sen}\alpha_H - \operatorname{sen}\alpha_0\right] \quad [1]$$



Los ángulos α_0 y α_H son los del esquema del dibujo, y corresponden a los de la primera y última espira.

Para un solenoide infinito se tiene $\alpha_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ y $\alpha_H \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

y la integral [1] anterior vale:

$$I_1 = -\frac{1}{R^2}\left[\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{R^2}(-2) = \frac{2}{R^2}$$

sustituyendo recuperamos el valor de B_z para el

Solenoide infinito:

$$B_z = \frac{\mu_0 n I_c R^2}{2} \times \frac{2}{R^2} = \mu_0 n I_c R^2$$

Para el solenoide de altura H finita podemos sustituir:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha_H &= \frac{z + L/2}{\left[R^2 + (z + \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} \\[2ex] \operatorname{sen} \alpha_0 &= \frac{z - L/2}{\left[R^2 + (z - \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} \end{aligned}\right\}$$

Se obtienen del esquema anterior y resulta

y queda finalmente al sustituir en [1] que:

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{z - L/2}{\left[R^2 + (z + \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} - \frac{z + L/2}{\left[R^2 + (z - \frac{L}{2})^2\right]^{1/2}} \right]$$