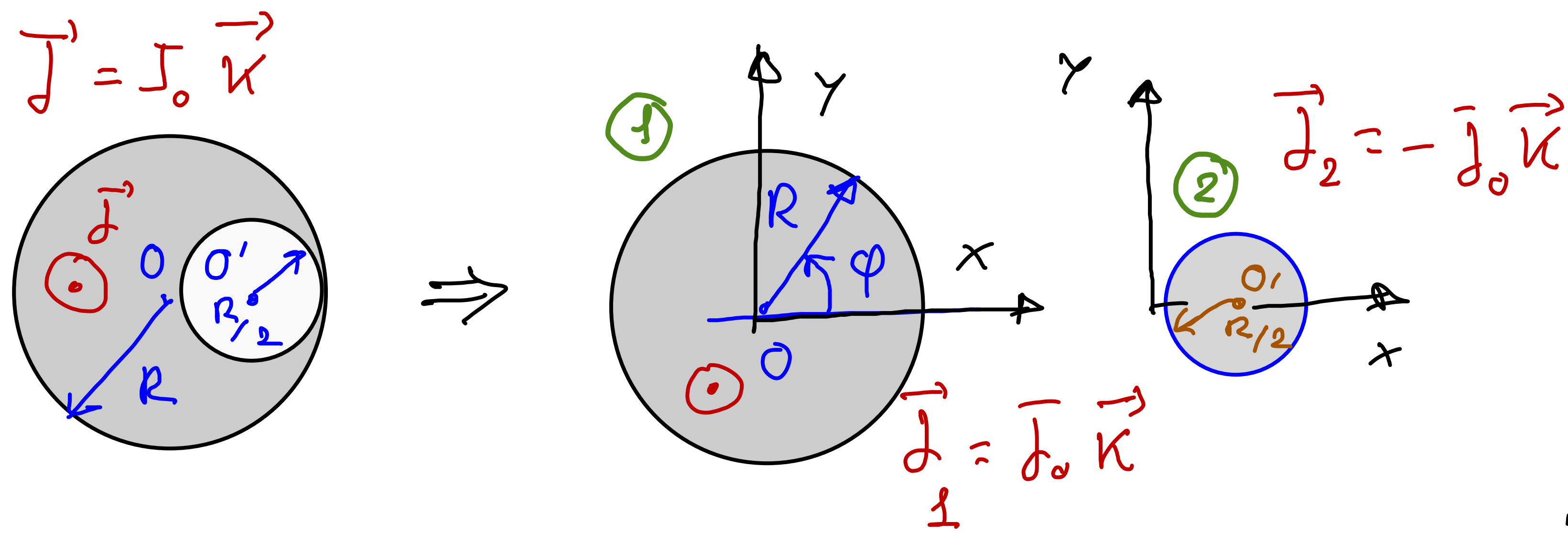
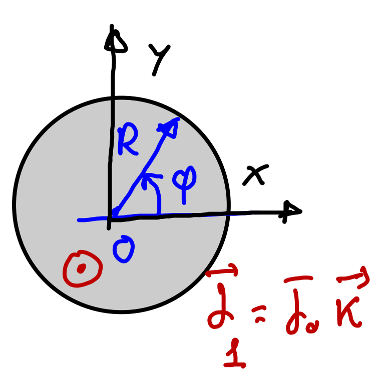
Prob. 7.9

Calculamos los campos que nos piden como superposición de los creados por dos cilindros. Uno corresponde al hueco y otro será el cilindro completo como muestra el dibujo.



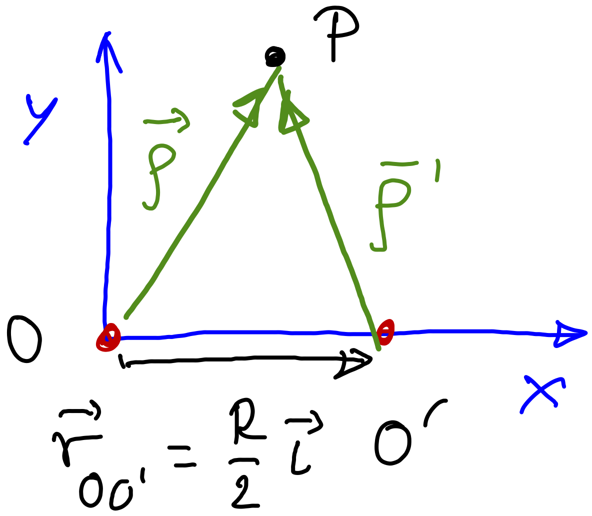
Empleamos coordenadas cilíndricas con origen en dos puntos diferentes. El punto O y el O' con $\vec{r}_{OO'} = \frac{R}{2}\vec{i}$

Para el cilindro 1 recorrido por una densidad de corriente uniforme $\vec{J}_1$ se tendrá (ver problema 7.8) en las dos zonas del espacio



$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \vec{B}_{1i} = \dfrac{\mu_0 J_0}{2}\rho\, \vec{u}_\varphi & \text{si } 0 < \rho \leq R \\[2ex] \vec{B}_{1e} = \dfrac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho}\vec{u}_\varphi & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

Para el segundo cilindro podemos escribir la misma expresión respecto del origen O' sustituyendo $R \rightarrow R/2$ el unitario $\vec{u}'_\varphi$ y la distancia radial ρ' respecto de O'.



Tenemos que expresar todos los vectores respecto de O y como muestra el dibujo se tiene

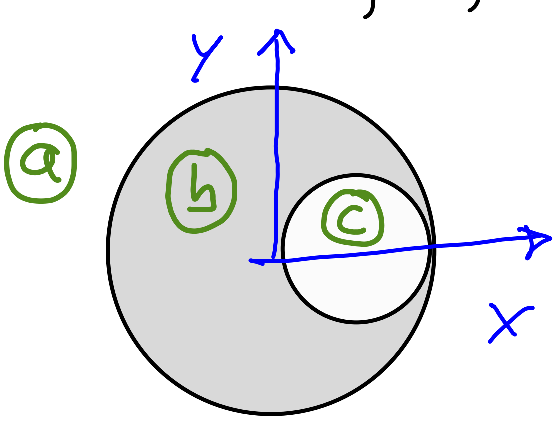
$$\vec{\rho}\,' = \vec{\rho} - \vec{r}_{OO'} = (x - \frac{R}{2})\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

y el vector $\bar{u}_\varphi' = \vec{k} \wedge \bar{u}_\rho'$ con $\bar{u}_\rho' = \frac{\vec{\rho}\,'}{\rho}$

Para el cilindro de radio $R/2$ con la densidad de corriente igual y negativa para reproducir el hueco resulta.

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} \vec{B}_{2i} = -\dfrac{\mu_0 j_0}{2}\rho'\vec{u}_\varphi' & \text{si } 0 < \rho' \leq \frac{R}{2} \\[2ex] \vec{B}_{2e} = -\dfrac{\mu_0 j_0 R^2}{8\rho'} & \text{si } \rho' > R/2 \end{cases}$$

Para superponer los campos de ambos cilindros consideramos las zonas indicadas en la figura y sumamos los campos correspondientes.



$\vec{B}_a = \vec{B}_{1e} + \vec{B}_{2e}$ → fuera del cilindro

$\vec{B}_b = \vec{B}_{1i} + \vec{B}_{2e}$ → dentro del cilindro de radio R

$\vec{B}_c = \vec{B}_{1i} + \vec{B}_{2i}$ → en el hueco de radio $R/2$

Los campos $\vec{B}_a$ y $\vec{B}_b$ se obtienen superponiendo los vectores anteriores y para el campo $\vec{B}_c$ en el hueco se tiene que:

$$\vec{B}_c = \vec{B}_{1i} + \vec{B}_{2i} = \frac{\mu_0 j_0}{2}\left[\rho \vec{u}_\varphi - \rho' \vec{u}'_\varphi\right]$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 j_0}{2}\left[\rho(\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho) - \rho'(\vec{k} \wedge \vec{u}_{\rho'})\right]$$

$\vec{r}_{oo'}$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 j_0}{2}\left[(\vec{k} \wedge \vec{\rho}) - (\vec{k} \wedge \vec{\rho}')\right] = \frac{\mu_0 j_0}{2} \vec{k} \wedge \underbrace{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')}_{= \vec{r}_{oo'}}$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 j_0}{2}(\vec{k} \wedge \vec{r}_{oo'}) = \frac{\mu_0 j_0}{4} R\,[\vec{k} \wedge \vec{i}\,]$$

$$\vec{B}_c = \frac{\mu_0 j_0 R}{4} \vec{j}$$