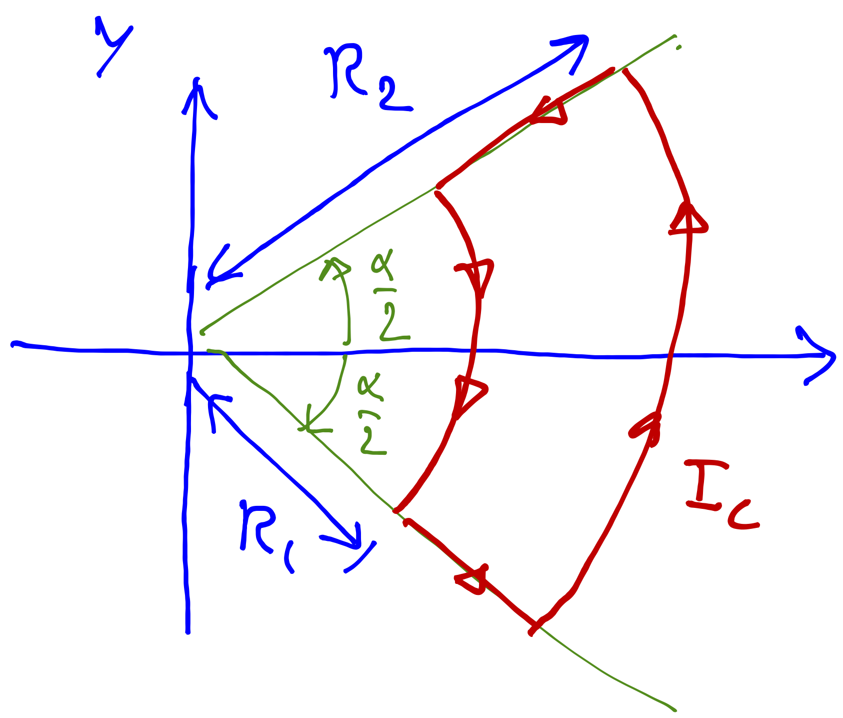
Nos dan el valor del momento magnético $\vec{m} = m_0 \vec{k}$ y la espira en el plano (x, y) es como muestra el dibujo.

Prob. 8.2



El campo $\vec{B}$ del dipolo está dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{n})\vec{n} - \vec{m}}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}\right]$$

donde $\vec{n} = \frac{(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$ es un vector unitario que apunta desde el punto $\bar{r}'$ donde se encuentra el dipolo hasta el punto $\bar{r}'$ donde calculamos el campo.

Como el dipolo magnético está en el origen en este caso $\bar{r}' = 0$ y $\vec{n} = \bar{r}/|\bar{r}|$ y la formula anterior se simplifica

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3\,\bar{m}_0 \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\bar{m}_0}{r^3}\right]$$

Ahora $\bar{m} = m_0 \vec{k}$ y si vemos la figura todos los puntos de la espira están sobre el plano (x, y) y se pueden describir por un vector

$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$ (ver dibujo) luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\cancel{\frac{3\,(m_0\vec{k})\cdot(r\vec{u}_r)}{r^5}}^{\,0}\,(r\vec{u}_r) - \frac{m_0\vec{k}}{r^3}\right]$$

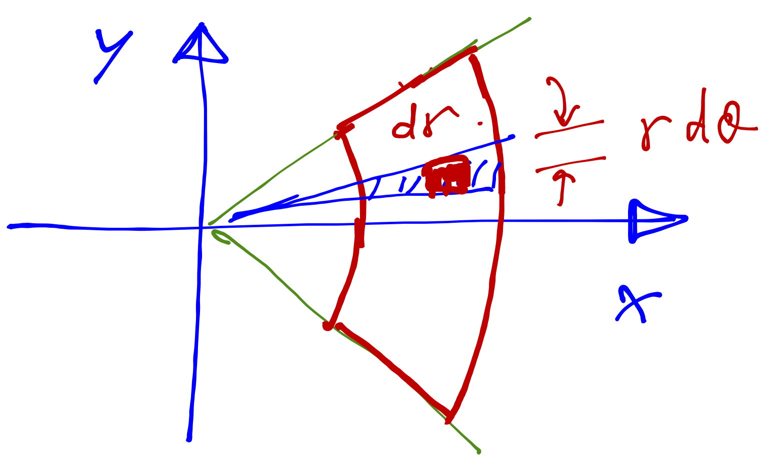
$$(m_0\vec{k})\cdot(r\,\vec{u}_r) = m_0\, r\,[\vec{k}\cdot\vec{u}_r] = 0$$

luego en la espira el campo $\overline{B}$ se simplifica

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}\,\vec{k} \qquad y \quad r^3 = [x^2+y^2]^{3/2}$$

podemos calcular el flujo de $\overline{B}$ a través del área de la espira considerando el elemento de superficie del dibujo

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$



$$d\vec{S} = [\underbrace{(r\,d\theta)}_{\text{largo}} \times \underbrace{dr}_{\text{ancho}}\,]\,\vec{k}$$

largo x ancho
del sector circular del dibujo

$$\phi = \int_S \left[-\frac{\mu_0 m_0}{4\pi r^3}\,\vec{k}\right]\cdot\left[r\,d\theta\, dr\,\vec{k}\right]$$

$$\phi = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\int_S \frac{dr\,d\theta}{r^2} = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\int_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} d\theta \int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\phi = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\left[\frac{\alpha}{2} - \left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[\frac{r^{-1}}{(-1)}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$\phi = + \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \alpha \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

finalmente

$$\phi = \frac{\mu_0 m_0 \alpha}{4\pi} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]$$

La fuerza sobre el tramo que nos piden es

$$d\vec{F}_m = I\, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I \left[(R_1 d\theta)\, \vec{u}_\theta \right] \wedge \left[- \frac{\mu_0 m_0}{4\pi R_1^3} \vec{r} \right]$$

$$d\vec{F}_m = - \frac{I \mu_0 m_0}{4\pi R_1^3} R_1\, d\theta\, \underbrace{(\vec{u}_\theta \wedge \vec{r})}_{= \vec{u}_r}$$

$$d\vec{F}_m = - \frac{I \mu_0 m_0}{4\pi R_1^2} \left[\cos\theta\, \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{j} \right] d\theta$$

$$\vec{F}_m = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I m_0}{R_1^2} \left[\vec{i} \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \cos\theta\, d\theta + \vec{j} \int_{\alpha/2}^{-\alpha/2} \cancel{\operatorname{sen}\theta\, d\theta} \right] \to 0$$

Atención al sentido de recorrido de la espira (ver dibujo)

$$\vec{F}_m = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I m_0}{R_1^2} \left[\operatorname{sen}\theta \right]_{\alpha/2}^{-\alpha/2} (\vec{i})$$

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I m_0}{R_1^2} \left[\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \right] \vec{i}$$

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I m_0}{R_1^2} 2 \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\, \vec{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I m_0}{R_1^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{i}$$