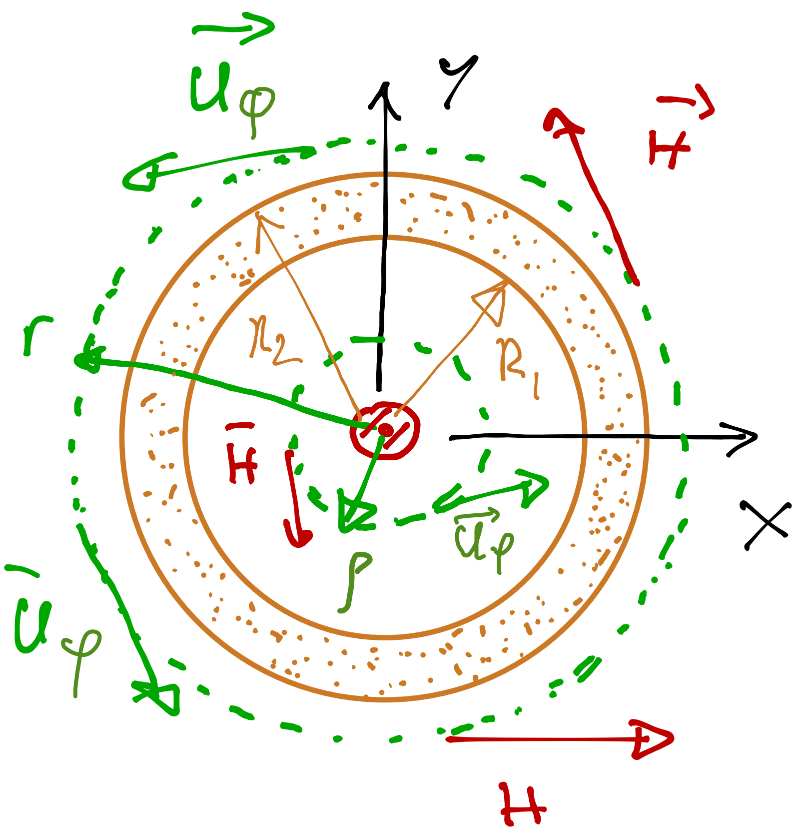
Prob. 8.3

El sistema tiene geometría cilíndrica y lo resolvemos empleando la ley de Ampère. El medio es un material magnético lineal por lo que los vectores $\vec{H}$ y $\vec{B}$ son paralelos y por simetría tangentes a círculos de radio ρ en planos perpendiculares al eje Z. como se indica en el esquema del enunciado.



En el dibujo el espacio está dividido en tres zonas con el hilo conductor de sección despreciable.

Aplicamos en cada una de ellas la ley de Ampère.

(1) Para $\rho > R_2$ fijo si I_c es la corriente de conducción ("libre") que circula por el hilo

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_c \rightarrow d\vec{l} = dl\,\vec{u}_\varphi \quad y \quad \vec{H} = H\,\vec{u}_\varphi$$

$dl = R\,d\varphi$

a lo largo del círculo $|\vec{H}|$ es cte.

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_C |\vec{H}|\,dl = H(2\pi\rho) = I_c \rightarrow \vec{H} = \frac{I_c}{2\pi\rho}\vec{u}_\varphi$$

Al ser un material lineal $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ y como $\mu_r = 1$ en el vacío

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi$$

recuperamos la expresión de $\vec{B}$ para un hilo recto infinito.

En esta zona $\vec{M} = 0$ puesto que

$$\vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \quad \text{y} \quad \mu_r = 1 \text{ para } \rho > R_2$$

(2) Dentro del material $R_2 \geq \rho \geq R_1$ y de nuevo por simetría $\vec{H} = H \vec{u}_\varphi$ y

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_c H \, dl = H(2\pi\rho) = I_c \rightarrow \vec{H} = \frac{I_c}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi$$

Ahora $\mu_r \neq 1$ luego $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \dfrac{\mu_0 \mu_r I_c}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi$

El vector magnetización es

$$\vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} = (\mu_r - 1) \frac{I_c}{2\pi\rho} \vec{u}_\varphi$$

Podemos calcular las densidades superficiales de corriente $\vec{J}_m^s$ en los radios R_1 y R_2 y la densidad volumétrica de carga $\vec{j}_m^v = \nabla \wedge \vec{M}$.

Para la superficies en $r = R_1$ y $r = R_2$

$$\vec{J}^{s}_{m}(R_1) = \vec{M}(R_1) \wedge (-\vec{u}_\rho)$$

$$\vec{J}^{s}_{m}(R_1) = (\mu_r - 1)\frac{I_c}{2\pi R_1}\left[\vec{u}_\varphi \wedge (-\vec{u}_\rho)\right]$$

$$\vec{J}^{s}_{m}(R_1) = (\mu_r - 1)\frac{I_c}{2\pi R_1}[\underbrace{\vec{u}_\rho \wedge \vec{u}_\varphi}_{=\vec{k}}]$$

$$\vec{J}^{s}_{m}(R_1) = (\mu_r - 1)\frac{I_c}{2\pi R_1}\vec{k}$$

y en la otra superficie.

$$\vec{J}^{s}_{m}(R_2) = \vec{M}(R_2) \wedge \vec{u}_\rho = (\mu_r - 1)\frac{I_c}{2\pi R_2}(\vec{u}_\varphi \wedge \vec{u}_\rho)$$

$$\vec{J}^{s}_{m}(R_2) = -(\mu_r - 1)\frac{I_c}{2\pi R_2}\vec{k}$$

Aunque no lo piden en el problema calculamos la corriente volumétrica $\vec{J}^{v}_{m} = \nabla \wedge \vec{M}$

$$\vec{J}^{v}_{m} = \nabla \wedge \vec{M} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho\vec{u}_\varphi & \vec{k} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ M_\rho & \rho M_\varphi & M_z \end{vmatrix}$$

Son las componentes de $\vec{M} = M_\rho \vec{u}_\rho + M_\varphi \vec{u}_\varphi + M_z \vec{k}$

$$\vec{J}_m^v = (\mu_r - 1)\frac{I_c}{2\pi}\left(\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho\,\vec{u}_\varphi & \vec{u}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & \rho \times \frac{1}{\rho} & 0 \end{vmatrix}\right) = 0$$

[illegible]

$$\boxed{\vec{J}_m^v = 0}$$