Prob. 8.4

Vamos a ver que este problema es parecido al del campo creado por un solenoide donde las corrientes superficiales de magnetización juegan un papel semejante a la que circula por las espiras

Como $\vec{M} = M_0 \vec{k}$ $\quad \vec{J}_m^{\,v} = \nabla \wedge \vec{M} = 0$ ($\vec{M}$ es uniforme)

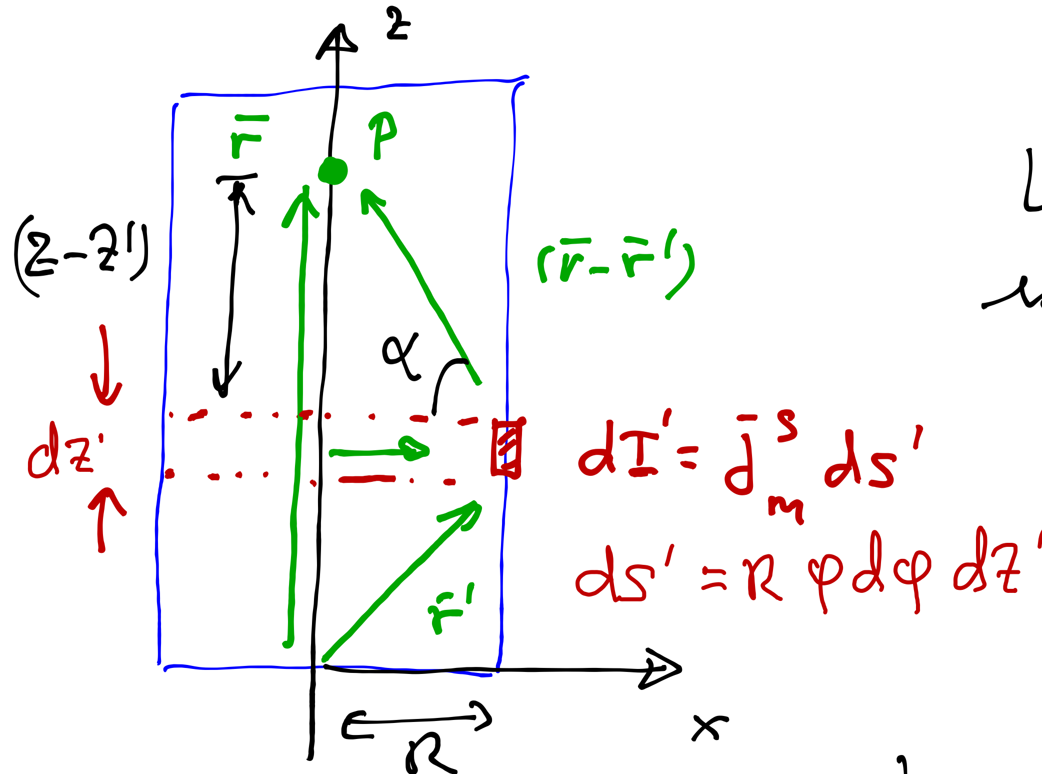
y $\vec{J}_m^{\,s} = \vec{M} \wedge \vec{n}$ siendo $\vec{M} = M_0 \vec{k}$ y $\vec{n} = \vec{u}_\rho$

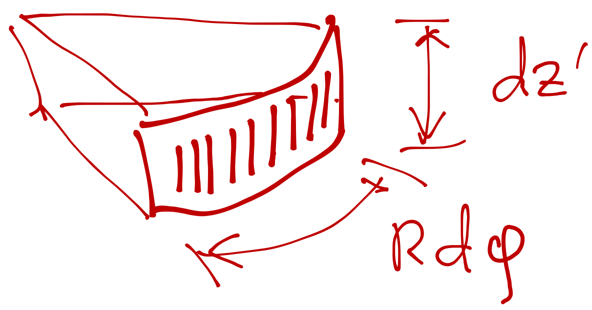
$$\vec{J}_m^{\,s} = (M_0 \vec{k}) \wedge \vec{u}_\rho = M_0 (\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho) = M_0 \vec{u}_\varphi$$

El campo magnético es creado por la densidad de corriente superficial, como si fuese un solenoide pues $J_m^v = 0$ en el interior. Para calcular el vector $\vec{B}$ podemos emplear la ley de Biot-Savart general,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}_m^{\,s} \wedge (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, ds'$$

donde $\vec{J}_m^{\,s} = M_0 \vec{u}_\varphi$. El esquema del dibujo el cilindro de material está visto de lado y es muy semejante al que empleamos para calcular el campo $\vec{B}$ para el solenoide en los problemas de magnetostática del vacío.





La densidad de corriente superficial $\vec{J}^s_m$ circula por el elemento ds' que tiene altura dz' y anchura $Rd\varphi$

Los vectores son;

$\vec r = z\vec k \qquad \vec r' = z'\vec k + R\vec u_r$

y $\vec J^s_m \times ds' = (M_0 \vec u_\varphi)\times(R\,d\varphi\,dz')$

sustituimos en la ley de Biot-Savart.

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{(ds'\vec J^s_m)\wedge(\bar r-\bar r')}{|\bar r-\bar r'|^3} \qquad |\bar r-\bar r'|^3 = \left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}$$

$$(ds'\vec J^s_m)\wedge(\bar r-\bar r') = (M_0 R\,d\varphi\, dz')\,\bar u_\varphi\wedge\left[(z-z')\vec k + R\vec u_r\right]$$

$$= \left[M_0 R\, d\varphi\,(z-z')\,dz'\right](\underbrace{\bar u_\varphi\wedge\vec k}_{=\bar u_\rho}) + M_0 R^2 dz'\, d\varphi\,(\underbrace{\bar u_\varphi\wedge\bar u_\rho}_{=\vec k})$$

Tenemos dos integrales

$$\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi} M_0 R\left[\int_S \frac{(z-z')\,d\varphi\, dz'\,\vec u_r}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}} + \vec k R\int_S \frac{d\varphi\, dz'}{\left[(z-z')^2+R^2\right]^{3/2}}\right]$$

La primera integral será nula

$$\int_0^L \frac{(z-z')\,dz}{[(z-z')^2+R^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}]\,d\varphi = 0$$

esta integral sobre el ángulo φ es nula

y queda entonces,

también por simetría a lo largo del eje z $\vec{B}$ no puede tener una componente fuera del eje z.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi}(\vec{k})\int_0^L \frac{dz'}{[(z-z')^2+R^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi}(2\pi)\int_0^L \frac{dz'}{[(z-z')^2+R^2]^{3/2}}(\vec{k})$$

La integral se calcula como en los problemas anteriores y como se ve en el dibujo

$$s = \operatorname{tg}\alpha = \frac{(z-z')}{R} \qquad R\,ds = -dz'$$

$$[(z-z')^2+R^2]^{3/2} = R^3\Big[1+\underbrace{\frac{(z-z')^2}{R^2}}_{=s^2}\Big]^{3/2}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0 R^2}{4\pi}\left(\frac{2\pi}{R^3}\right)\int_{s_{min}}^{s_{max}} \frac{-ds\,R}{[1+s^2]^{3/2}}(\vec{k})$$

y con el cambio $s = \operatorname{tg}\alpha$ $\qquad ds = \dfrac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$[1+s^2] = [1+\operatorname{tg}^2\alpha] = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0 R^3}{4\pi}\left(-\frac{2\pi}{R^3}\right)\int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \cos\alpha \, d\alpha \; (\vec{k})$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0 \cancel{R^3}}{4\cancel{\pi}}\left(-\frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{R^3}}\right)\Big[-\operatorname{sen}\alpha\Big]_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \vec{k}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2}\left[\operatorname{sen}\alpha_{max} - \operatorname{sen}\alpha_{min}\right]\vec{k}$$

En la figura se tiene que
$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha_{max} = \dfrac{z}{[R^2+z^2]^{1/2}} \\[2ex] \operatorname{sen}\alpha_{min} = \dfrac{(z-L)}{[R^2+(z-L)^2]^{1/2}} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M_0}{2}\left[\frac{z}{[R^2+z^2]^{1/2}} - \frac{(z-L)}{[R^2+(z-L)^2]^{1/2}}\right]\vec{k}$$

Es la misma expresión que obtuvimos para el solenoide dando $M_0 \to n I_c$

El campo magnetizante es $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$

$$\vec{H} = \frac{M_0}{2}\left[\frac{z}{[R^2+z^2]^{1/2}} - \frac{(z-L)}{[R^2+(z-L)^2]^{1/2}}\right]\vec{k} - M_0\vec{k}$$