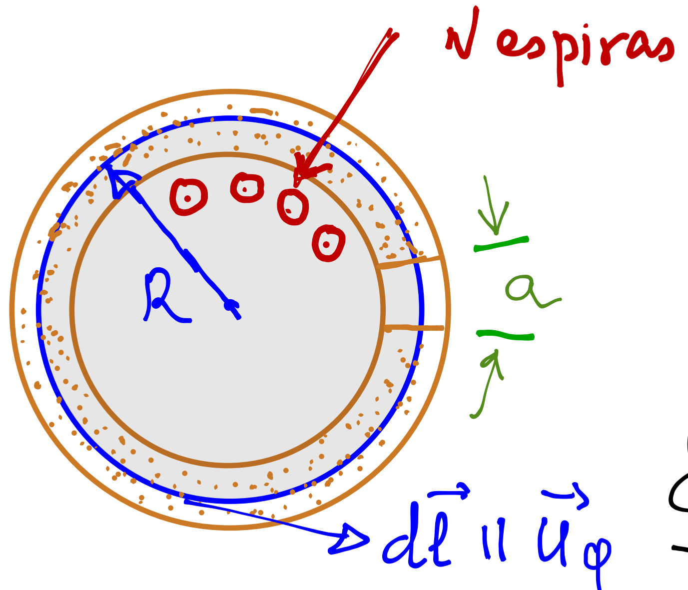
El material del toroide es un ferromagnético que tiene una imanación permanente.

Prob. 8.5



Se tiene que $\vec{M} = M_0 \vec{u}_\varphi$ y para el círculo de radio R sombreado del dibujo

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c'$ donde I_c' son las corrientes de conducción ("libres") que atraviesan la superficie que define el círculo de radio R.

Por simetría tenemos $\vec{H} = H \vec{u}_\varphi$ y hay dos campos diferentes H_a en el hueco y H_m en el material por tanto

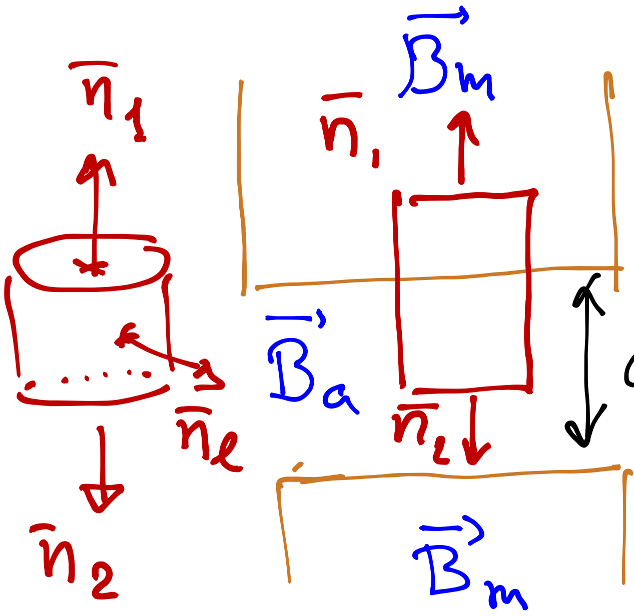
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_m \vec{H}_m d\vec{l}_m + \int_a H_a d\vec{l}_a = H_m (2\pi R - a) + H_a a$$

y esto es igual a $I_c' = N \times I_c$ donde N es el número de bulas de corriente que intersecta el círculo. Igualando

$$H_m (2\pi R - a) + H_a a = N I_c$$

Tenemos dos campos H_a y H_m y necesitamos otra ecuación adicional

En la magnetostática de materiales $\nabla\cdot\vec{B}=0$ siempre y si consideramos el entrehierro como muestra el dibujo podemos aplicar el T^{ma} de Gauss al cilindro de la figura.



$$\int_V \nabla\cdot\vec{B}\,dv = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

que es la suma de tres integrales

despreciamos los efectos de los bordes

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int \vec{B}_m\cdot d\vec{S}_1}_{\text{tapa sup.}} + \cancel{\underbrace{\int \vec{B}_e\cdot d\vec{S}_e}_{\text{lados}}} + \underbrace{\int \vec{B}_a\cdot d\vec{S}_2}_{\text{tapa inferior}}$$

Entonces,

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int \vec{B}_m\cdot d\vec{S}_1}_{\text{tapa superior}} + \underbrace{\int \vec{B}_a\cdot d\vec{S}_2}_{\text{tapa inferior}} = 0$$

y como las dos tapas son iguales $d\vec{S}_1 = -d\vec{S}_2$

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{tapa}} \vec{B}_m\cdot d\vec{S}_1 - \vec{B}_a\cdot d\vec{S}_1 = \int_{\text{tapa}} (\vec{B}_m - \vec{B}_a)\cdot d\vec{S}_1 = 0$$

El $|\vec{B}|$ es cte sobre la superficie de las tapas,

$$\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = (B_m - B_a)\cdot S_1 = 0 \Rightarrow B_m = B_a$$

Las componentes $B_a = B_m$ a lo largo de la dirección $\bar{u}_\varphi$. Tenemos entonces

$$\left.\begin{aligned} B_a &= \mu_0 H_a \quad \text{(vacío)} \\ B_m &= \mu_0 (H_m + M_0) \quad \text{(material)} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} B_a &= B_m \\ H_a &= H_m + M_0 \end{aligned}$$

y tenemos dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} H_a &= H_m + M_0 \\ H_m (2\pi R - a) + H_a a &= N I_c \end{aligned}\right\} \quad \text{resolvemos para } H_a \text{ y } H_m$$

$$H_m (2\pi R - a) + (H_m + M_0) a = N I_c$$

$$H_m [2\pi R - \cancel{a} + \cancel{a}] + M_0 a = N I_c$$

$$\vec{H}_m = \frac{N I_c - M_0 a}{2\pi R} \vec{u}_\varphi$$

y para el hueco,

$$H_a = \frac{N I_c - M_0 a}{2\pi R} + M_0 = \frac{N I_c - M_0 a + 2\pi R M_0}{2\pi R}$$

$$\vec{H}_a = \frac{N I_c + (2\pi R - a) M_0}{2\pi R} \vec{u}_\varphi$$