Prob: 9.1

Nos piden la corriente inducida y para calcularla empleamos la ley de Faraday que nos da $\mathcal{E}_m$. Luego como $\mathcal{E}_m = IR$ podemos obtener el valor de la corriente si calculamos la resistencia R de la espira.

$$R = \frac{L}{\sigma_c A}$$ para cada tramo recto, luego

$$R = \frac{L + 2L + L + 2L}{A\,\sigma_c} = \frac{6L}{A\sigma_c}$$ es la resistencia de la espira

El campo magnético es $\bar{B}(x,t)$ varía en el espacio y la ley de Faraday es;

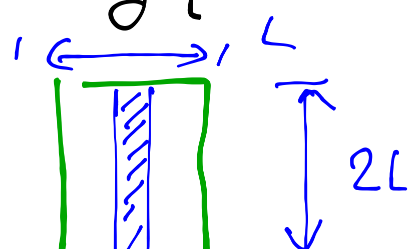
$$\mathcal{E}_m = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot d\bar{s} + \cancelto{0}{\oint_C (\bar{v}\wedge\bar{B})\cdot d\bar{l}} \quad [1]$$

Como la espira está no se mueve respecto del observador la segunda integral es nula.

(a) $\bar{B}(x,t) = c\,t^n$ con $n \neq 0$ entero

$$\frac{\partial B}{\partial t} = c\,n\,t^{(n-1)}$$

y como la espira es cuadrada $d\bar{s}' = (2L)\,dx\,\vec{u}$ en todos los casos del problema



$$\mathcal{E}_m = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = -\int_{-L/2}^{+L/2} (cnt^{n-1} \vec{k}) \cdot (2L dx \vec{k})$$

$$\mathcal{E}_m = -(2LCn)\, t^{n-1} \int_{-L/2}^{+L/2} dx = -2cnt^{n-1} L^2$$

$$\mathcal{E}_m = IR \rightarrow \quad -2cnt^{n-1} L^{\cancel{2}} = I \times \left(\frac{6L}{A\sigma_c} \right) \rightarrow I = -\frac{cnLt^{n-1}\sigma_c A}{3}$$

<u>otro modo</u> equiva<u>lente</u>: La ley de Faraday [1] es equivalente a

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{donde} \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\bar{s} \quad \text{es el flujo}$$

de $\vec{B}$ sobre la espira y entonces;

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (ct^n \vec{k}) \cdot (2L dx \bar{k}) = 2cL^2 t^n$$

y derivando $\mathcal{E}_m = -\frac{d}{dt}(2cL^2 t^n) = -2cnL^2 t^{n-1}$

y recuperamos el cálculo anterior.

(b) Para $\bar{B}(x,t) = cxt\vec{k}$ repetimos el procedimiento

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = (cx)\vec{k} \qquad \mathcal{E}_m = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} = -\int_{-L/2}^{L/2} (cx)\, 2L dx$$

$$\mathcal{E}_m = -2CL \int_{-L/2}^{+L/2} x\,dx = -2KL \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L/2}^{+L/2} = 0$$

Se obtiene lo mismo calculando el flujo de $\overline{B}$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{-L/2}^{+L/2} (Cxt\vec{k}) \cdot (2L\,dx\,\overline{k})$$

$$\Phi = (2CL)t \int_{-L/2}^{+L/2} x\,dx = (2CL)t \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L/2}^{+L/2} = 0$$

El flujo de este campo para el recinto de la espira es nulo. La mitad de las lineas de campo en el recinto de la espira apuntan en la dirección negativa y la otra mitad en la positiva.

(c) Al tomar el valor absoluto $|x|$ en el siguiente caso $\overline{B}(x,t) = C|x|t$ la situación cambia pues ahora todos los vectores $\overline{B}$ dentro de la espira apuntan en la misma dirección.

$$\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = C|x| \qquad \mathcal{E}_m = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{S} = -\int_{-L/2}^{+L/2} C|x|\,(2L\,dx)$$

$$\mathcal{E}_m = (-2LC) \int_{-L/2}^{+L/2} |x|\,dx = (-2LC) \left[\int_{-L/2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{L/2} x\,dx \right]$$

$$\mathcal{E}_m = (-2LC)\left(\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-L/2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{L/2}\right)$$

$$\mathcal{E}_m = (-2LC)\left[-\left(-\frac{L^2/4}{2}\right) + \frac{L^2/4}{2}\right] = (-2LC)\times\frac{L^2}{4}$$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{CL^3}{2}$$ y entonces $$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = -\frac{CL^{\cancel{3}\,2}}{2}\times\frac{\sigma_c A}{6\cancel{L}}$$

$$I = -\frac{CL^2\sigma_c A}{12}$$

Se obtiene el mismo resultado calculando el flujo

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{-L/2}^{+L/2} (C|x|t\,\vec{n})\cdot(2L\,dx\,\vec{n}) =$$

la integral es la misma de antes

$$\Phi = (2LCt)\int_{-L/2}^{+L/2}|x|\,dx = (2LCt)\left[\frac{L^2}{4}\right]$$

$$\Phi = \frac{CtL^3}{2}$$ y $$\mathcal{E}_m = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\kappa L^3}{2}$$

que es el mismo valor que obtuvimos antes.