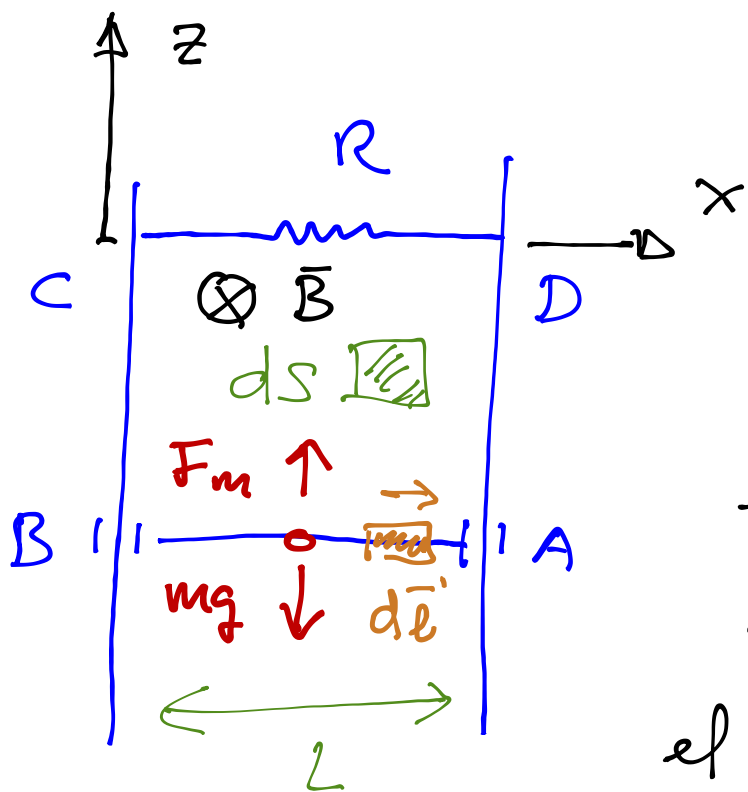


Todas las barras metálicas tienen una resistencia eléctrica despreciable menos el tramo AB con resistencia R .

Prob: 9.4



El circuito ABCD forma una espira cuya área aumenta a medida que AB cae.

El campo $\vec{B} = B_0 \vec{j}$ es cte en el tiempo pero el flujo Φ a través del área ABCD cambia con el movimiento de la varilla AB.

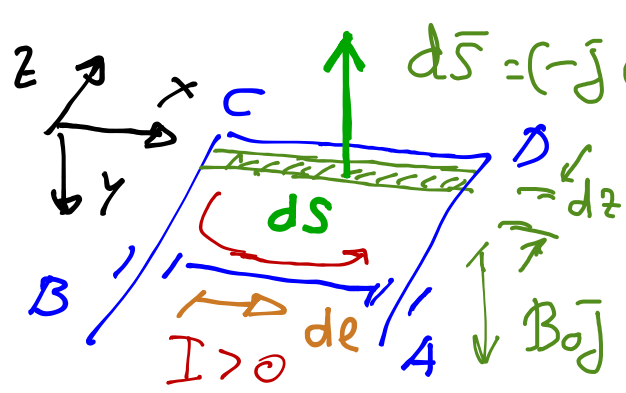
Según la ley de Faraday ha de aparecer en la espira una fuerza electromotriz \mathcal{E}_m que induce una corriente $I = \mathcal{E}_m/R$ que ha de oponerse al movimiento de la barra. Para ello la fuerza $d\vec{F}_m = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ ha de oponerse a $-mg \vec{k}$ y si la calculamos

$$\left. \begin{array}{l} d\vec{l} = dx \vec{i} \\ \vec{B} = B_0 \vec{j} \end{array} \right\} \begin{array}{l} d\vec{F}_m = I (dx \vec{i}) \wedge (B_0 \vec{j}) \\ d\vec{F}_m = I dx B_0 (\vec{i} \wedge \vec{j}) = I dx B_0 \vec{k} \end{array}$$

$$\vec{F}_m = I B_0 \int_0^L dx \vec{i} = I B_0 L \vec{i} \quad I < 0 \text{ para que la fuerza } F_m \text{ se oponga a la gravedad}$$

[1]

En el dibujo se muestra como tomar $d\vec{S}' = -\vec{j} ds$ viendo $ds = L dz$ para que sea coherente con el sentido



de $d\vec{l} = dx \vec{i}$. Es importante para determinar el sentido de la corriente. Como la superficie tiene dos posibles vectores normales también

podríamos tomar $d\vec{l} = dx \vec{i}$ y $d\vec{S}' = -\vec{j} ds = (-L dz) \vec{j}$

Calculamos la fuerza electromotriz empleando la ley de Faraday

$$\mathcal{E}_m = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}' + \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

\vec{B} es de

Tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= U_2 \vec{k} \\ \vec{B} &= B_0 \vec{j} \\ d\vec{l} &= dx \vec{i} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \int_A^B [(U_2 \vec{k}) \wedge (B_0 \vec{j})] \cdot (dx \vec{i}) \\ \mathcal{E}_m &= \int_A^B [U_2 B_0 (\vec{k} \wedge \vec{j})] \cdot (dx \vec{i}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_m = - \int_A^B U_2 B_0 dx = -U_2 B_0 L > 0 \quad [2]$$

$$\mathcal{E}_m = IR \rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = - \frac{v B_0 L}{R}$$

y si introducimos esta corriente en F_m tendremos

$$\vec{F}_m = IB_0 L = - \frac{v B_0^2 L^2}{R} \vec{u} \text{ y la ecuación de}$$

movimiento para el centro de masas de la barra es

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{v B_0^2 L^2}{R} - mg \quad \frac{dv}{dt} = - \left[\frac{v B_0^2 L^2}{mR} + g \right]$$

Si hacemos el cambio de variable $s = \frac{B_0^2 L^2}{mR} v + g$

entonces $\frac{ds}{dt} = \frac{B_0^2 L^2}{mR} \frac{dv}{dt}$ y sustituyendo

$$\left(\frac{mR}{B_0^2 L^2} \right) \frac{ds}{dt} = -s \quad \frac{ds}{dt} = - \left(\frac{B_0^2 L^2}{mR} \right) s = - \frac{s}{\tau_0}$$

pues $\left(\frac{mR}{B_0^2 L^2} \right) = \tau_0$ tiene que tener unidades de

tiempo y la solución es $s = s_0 e^{-t/\tau_0}$ $s_0 = s(0)$

y si deshacemos el cambio de variable

$$s(t) = \frac{B_0^2 L^2}{mR} v + g = \left[\frac{B_0^2 L^2}{mR} v(0) + g \right] e^{-t/\tau_0}$$

↓
En el instante inicial
la velocidad de la barra es nula

$$\frac{B_0^2 L^2}{mR} v(t) + g = g e^{-t/\tau_0} \rightarrow \frac{B_0^2 L^2}{mR} v(t) = g (e^{-t/\tau_0} - 1)$$

$$v(t) = \left(\frac{mRg}{B_0^2 L^2} \right) [e^{-t/\tau_0} - 1] = \left(\frac{g}{\tau_0} \right) [e^{-t/\tau_0} - 1]$$

Esta solución cumple las condiciones impuestas pues

$$\text{en } t=0 \quad v(0) = \frac{g}{\tau_0} [1-1] = 0$$

y cuando $t \rightarrow \infty$ $e^{-t/\tau_0} \rightarrow 0$ y se tiene

$$v(\infty) = \frac{g}{\tau_0} (0-1) = -\frac{g}{\tau_0}$$

Luego al cabo del tiempo la barra cae con una velocidad constante

$$\vec{v} = -\frac{g}{\tau_0} \vec{k} = -\frac{mgR}{B_0^2 L^2} \vec{k}$$

con esta velocidad podemos determinar el sentido de la corriente inducida en el estado estacionario

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = -\frac{v B_0 L}{R} = -\left[-\frac{mgR}{B_0^2 L^2} \right] \times \frac{B_0 L}{R}$$

$$I = -\frac{mg}{B_0 L}$$

Esta corriente representa (por convenio) el movimiento de las cargas positivas que se mueven desde $B \rightarrow A$ con el vector $d\vec{l}$ y $d\vec{s}$ que hemos escogido en el último dibujo.

Si nos preguntan por el movimiento de las cargas negativas (electrones) va en el opuesto $A \rightarrow B$

Podríamos también calcular la fuerza electromotriz empleando la ley de Faraday o la fuerza

$$\mathcal{E}_m = - \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{donde} \quad \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

y siendo coherente con el ultimo dibujo

$$\vec{B} = B_0 \vec{j} \quad d\vec{S} = -\vec{j} ds = (-\vec{j}) L dz \quad \text{y la}$$

integración la hacemos entre $z=0$ y una altura $z(t)$ en un instante genérico.

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{z=0}^{z(t)} (B_0 \vec{j}) \cdot \underbrace{(-L dz \vec{j})}_{(-ds \vec{j})} = -LB_0 \int_0^{z(t)} dz$$

$0 \leftarrow$ Posición inicial $z=0$
 $z \leftarrow$ posición en un instante genérico

$$\text{luego} \quad \Phi = -LB_0 [0 - z] = LB_0 z$$

Tendremos;

$$\mathcal{E}_m = - \frac{d\Phi}{dt} = -LB_0 \frac{dz}{dt} = -LB_0 u_z$$

Es lo mismo que tenemos en la ec. [2]

que es lo que encontramos antes. El resto de los cálculos del problema al sustituirlo en la ec. [1]

NOTA: El sentido de la corriente $I(t)$ depende del triedro que hemos tomado, pues los signos de las magnitudes han de ser coherentes con el convenio de signos que hemos tomado. Es decir, que $I(t) > 0$ significa miremos las espiras de uno u otro lado.