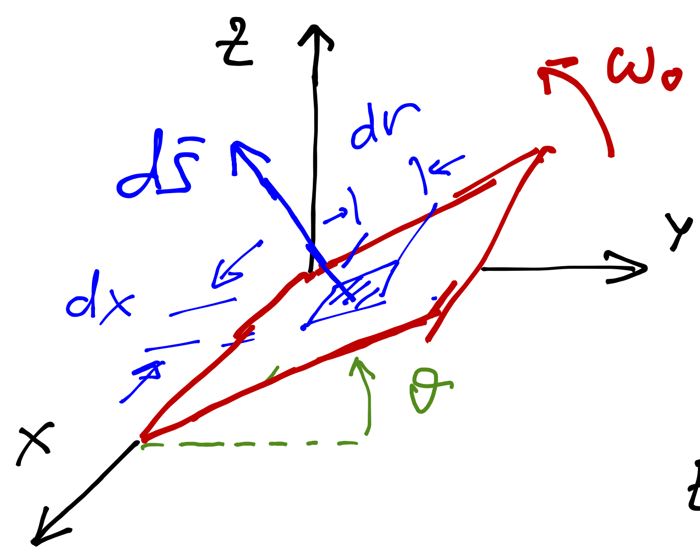
El momento mecánico externo hace girar la espira con la velocidad angular $\vec{\omega} = \omega_0 \vec{k}$ constante.

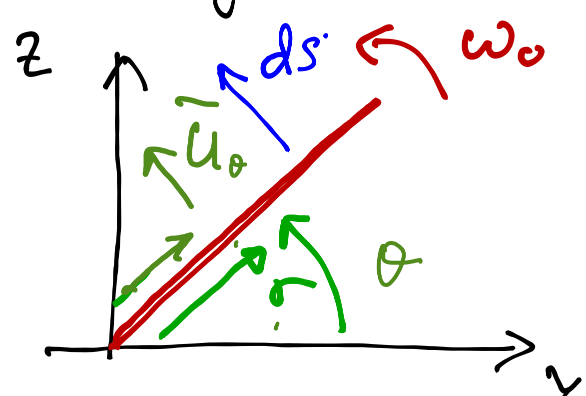
Prob: 9.6



La espira cuadrada tiene lado L y su resistencia por unidad de longitud es R_L luego

$$R = 4 R_L L$$

En el instante inicial $\theta = 0$ y para calcular la corriente inducida empleamos la ley de Faraday



$$\mathcal{E}_m = -\frac{d\phi}{dt} \qquad \phi = \int_{esp.} \bar{B}\cdot d\vec{S}'$$

en donde $d\bar{S}' = ds\,\vec{u}_\theta$ y

$$\vec{B} = \frac{B_0}{L}\left(z\vec{j} + y\vec{k}\right)$$

← Su valor es distinto en cada punto (z,y) del plano de la espira

y para un punto genérico tendremos

$$z = r\,\text{sen}\,\varphi \qquad y = r\cos\varphi \qquad r = [y^2 + z^2]^{1/2}$$

$$\vec{B} = \frac{B_0}{L}\left[r\,\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + r\cos\theta\,\vec{k}\right] = \frac{B_0 r}{L}\left(\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$

El vector $d\vec{s} = ds\,\vec{u}_\theta = dx\,dr\left[-\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right]$

$$\vec{B}\cdot d\bar{S} = \frac{B_0 r}{L}(dx\,dr)\left[\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right]\cdot\left[-\text{sen}\,\theta\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}\right]$$

$$\bar{B}\cdot d\vec{s} = \left(\frac{rB_0}{L}dx\,dr\right)\left[-\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta\right]$$

Empleando ahora la igualdad trigonométrica

$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos(2\theta)$ resulta

$$\phi = \int_{esp.} \bar{B}\cdot d\bar{s} = \int_{x=0}^{L}\int_{r=0}^{L} \frac{B_0 r}{L}\cos(2\theta)\,dx\,dr$$

$$\phi = \frac{B_0}{L}\cos(2\theta)\left(\int_0^L dx\right)\times\left(\int_0^L r\,dr\right) = \frac{B_0}{L}\cos(2\theta)\times L\times\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^L$$

$$\phi = \frac{B_0}{\cancel{L}}\cos(2\theta)\,\cancel{L}\times\frac{L^2}{2} = \frac{B_0 L^2}{2}\cos(2\theta)$$

La fuerza electromotriz es $\mathcal{E}_m = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

$$\mathcal{E}_m = -\frac{d}{dt}\left[\frac{B_0 L^2}{2}\cos(2\theta)\right] = -\frac{B_0 L^2}{\cancel{2}}\left(-\operatorname{sen}(2\theta)\right)\left(\cancel{2}\frac{d\theta}{dt}\right)$$

y como $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0$ la velocidad angular de la espira

$$\mathcal{E}_m = B_0\omega_0 L^2 \operatorname{sen}(2\theta) \quad \text{como} \quad I = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$$

$$I = \frac{1}{4R_\ell L} B_0\omega_0 L^2 \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{B_0\omega_0 L}{4R_\ell}\operatorname{sen}(2\theta)$$

La corriente inducida es máxima cuando

$\operatorname{sen}(2\theta_m) = 1$ luego $\theta_m = \frac{\pi}{4}$ y entonces

$$I_{max} = \frac{B_0 \omega_0 L}{4 R_\ell}$$

La diferencia de potencial entre A y B es

$$V_B - V_A = \mathcal{E}_m - I R_{AB}$$ donde $R_{AB} = R_\ell L$ es la resistencia

del segmento AB y para I_{max} se tiene

$$V_B - V_A = B_0 \omega_0^2 L^2 \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} - \frac{B_0 \omega_0 L}{4 \cancel{R_\ell}} \times (L \cancel{R_\ell})$$

$$V_B - V_A = B_0 \omega_0^2 L^2 - \frac{B_0 \omega_0 L^2}{4} = \frac{3}{4} B_0 \omega_0^2 L^2$$

La potencia eléctrica que se disipa en el circuito

es $$P = \frac{dE}{dt} = I^2(t) R \rightarrow dE = I^2(t) R \, dt$$

y sustituyendo lo anterior.

$$dE = (4 R_\ell L) \times \left[\frac{B_0 \omega_0 L}{4 R_\ell} \operatorname{sen}(2\theta)\right]^2 dt$$

$$dE = (4 R_\ell L) \frac{B_0^2 \omega_0^2 L^2}{16 R_\ell^2} \operatorname{sen}^2(2\theta) \, dt$$

$$dE = \frac{B_0^2 \omega_0^2 L^3}{4R_e} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, dt \quad \text{y como} \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0$$

$$dE = \frac{B_0^2 \omega_0 L^3}{4R_e} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, \overbrace{[\omega_0\, dt]}^{\text{,, } d\theta}$$

$$dE = \frac{\omega_0 B_0^2 L^3}{4R_e} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta \rightarrow \Delta E = \frac{\omega_0 B_0^2 L^3}{4R_e} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta$$

y como $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta = \pi$ resulta

$$\Delta E = \frac{\omega_0^2 B_0^2 L^3}{4R_e} \pi$$