Ecuaciones de Maxwell en el vacío: Describen los fenómenos físicos del electromagnetismo

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_o} \qquad \nabla \wedge \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{J}_c + \mu_o \;\; {}_o \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ Campo eléctrico $\rho_c(\boldsymbol{r}, t)$

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ Densidad de flujo magnético o inducción magnética $\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}, t)$

Permitividad del vacío $\epsilon \;\; = 8.85 \times 10^{-12}\, \mathrm{C^2/(N\, m^2)}$

Permeabilidad del vacío $\mu \;\; = 4\pi \times 10^{7}\, \mathrm{H/m}$

$$\epsilon_o \, \mu_o = 1/c^2$$

Si los fenómenos son estacionarios las derivadas parciales respecto del tiempo son nulas.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_o} \qquad \nabla \wedge \boldsymbol{E} = 0 \longrightarrow$$

Ecuaciones de la electrostática $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ $\rho_c(\boldsymbol{r})$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \boldsymbol{B} = \mu_o \boldsymbol{J}_c \longrightarrow$$

Ecuaciones de la magnetostática $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ $\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r})$

Fuerza de Lorentz: En un campo electromagnético una carga Q que se mueve con velocidad $\mathbf{u}$ experimenta una fuerza

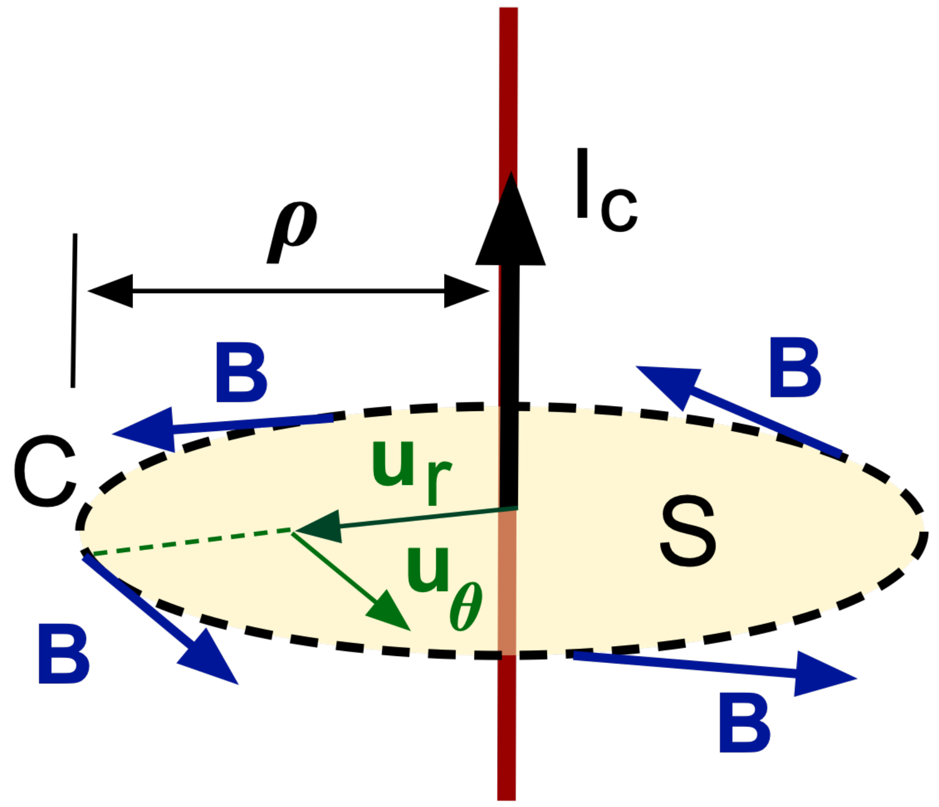
$$\boldsymbol{F} = Q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{B})$$

Ley de Ampère: Cálculo de la densidad de flujo magnético en sistemas con simetría

Densidad de corriente $$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_c = \mu_o \int_S \boldsymbol{J}_c \cdot d\boldsymbol{s}$$

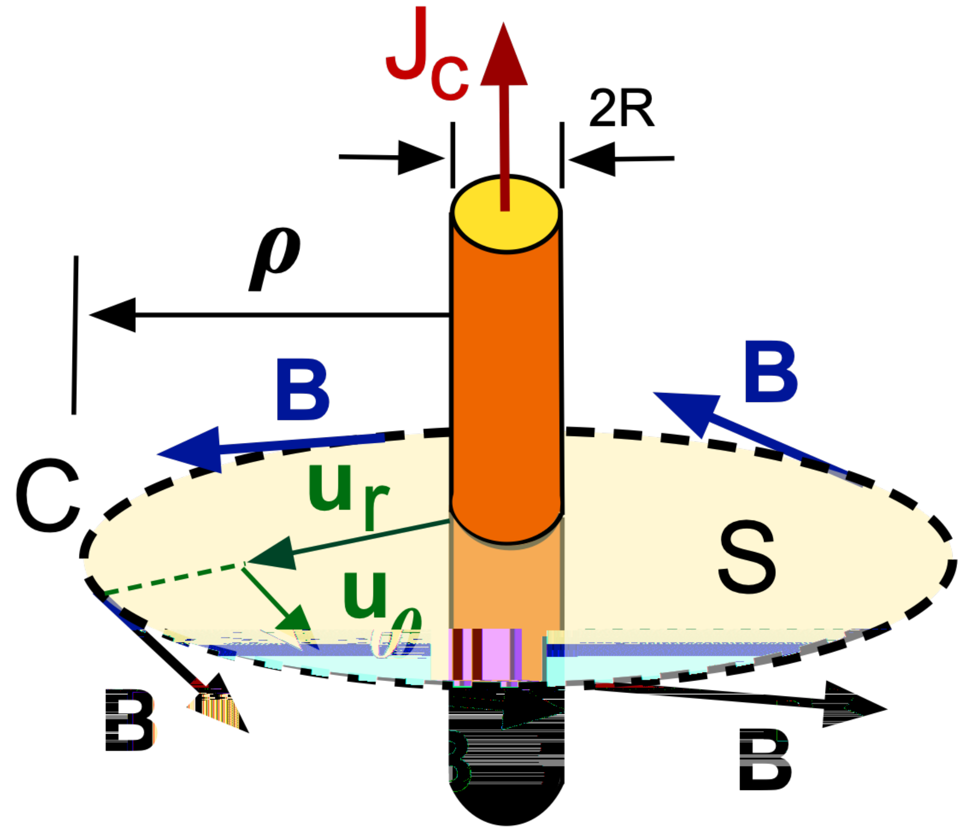
Conductor de sección constante $$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_c = \mu_o I_c$$

Ejemplos: Un conductor rectilíneo infinito recorrido por una corriente o por una densidad de corriente $\mathbf{J_c}$



$$\int_{C(\rho)} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_c = B(\rho)\int_{C(\rho)} dl_c = B(\rho)\times(2\pi\,\rho) = \mu_o\, I_c$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_o\, I_c}{2\,\pi\,\rho} \quad \text{y,} \quad \boldsymbol{B}(\rho) = \frac{\mu_o\, I_c}{2\,\pi\,\rho}\,\boldsymbol{u}_\theta$$

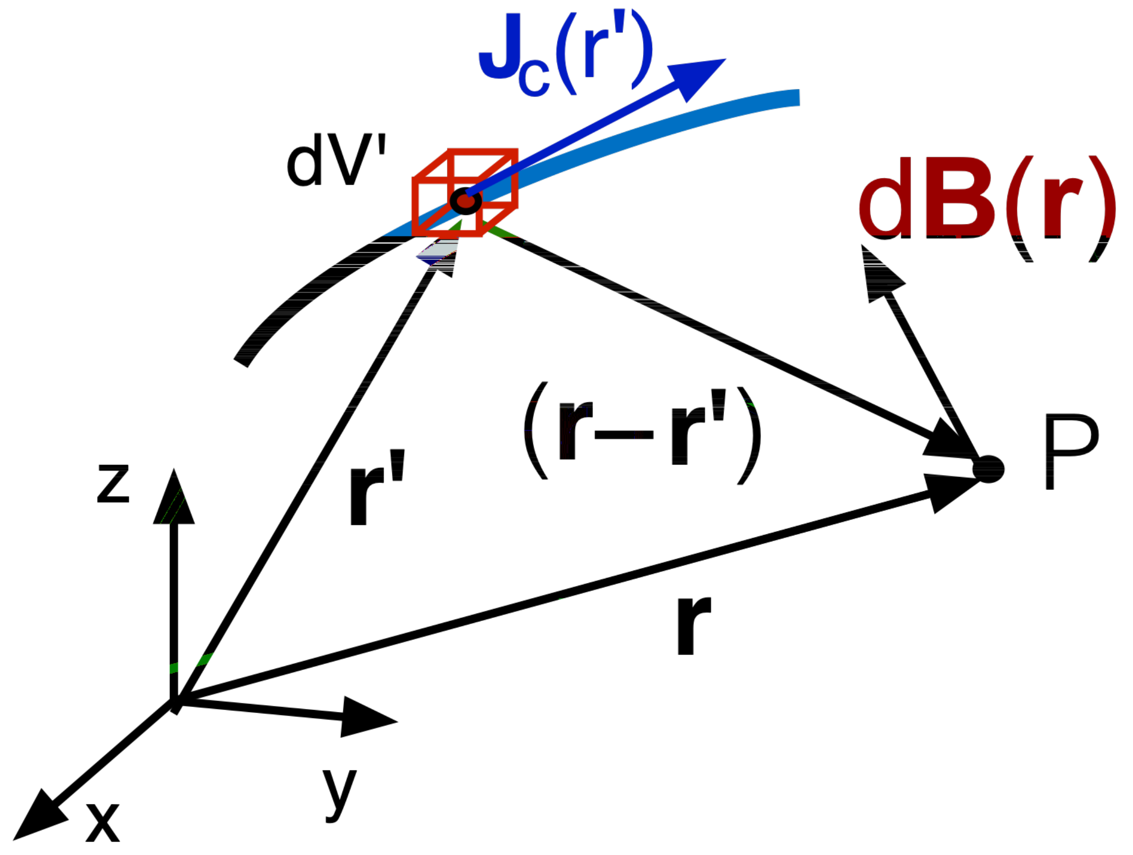


Para $\rho \leq$ $$\int_{\rho\leq R} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l}_c = B(\rho)\times(2\pi\,\rho) = \mu_o \int_{\rho\leq R} \boldsymbol{J}_c\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_o\, J_c \times (\pi\,\rho^2)$$

$$B(\rho) = \frac{\mu_o\,(\pi\,\rho^2)\,J_c}{2\,\pi\,\rho} \qquad \boldsymbol{B}(\rho) = \frac{\mu_o\,\rho\,J_c}{2}\,\boldsymbol{u}_\theta$$

Para $\rho >$ se recupera el resultado anterior

Ley de Biot-Savart: Cálculo de la densidad de flujo magnético mediante integración directa.

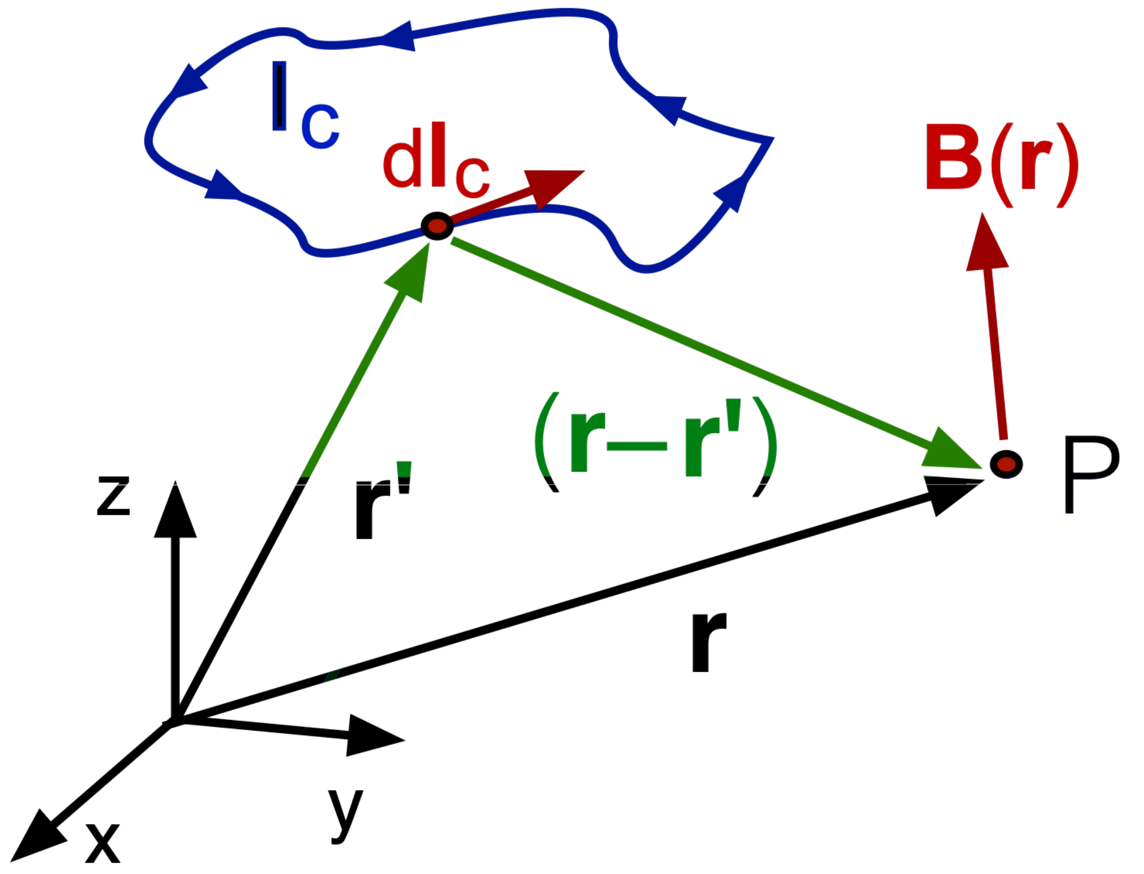


Densidad de corriente

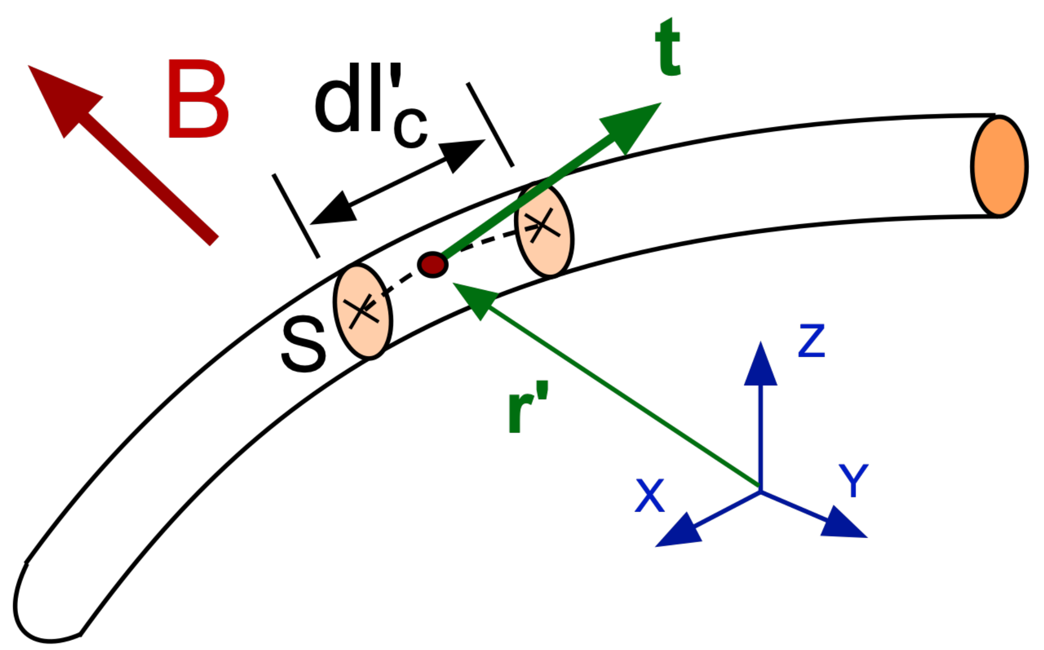
$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}') \wedge (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\, dv'}$$

Conductor de sección constante

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}') \wedge (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\, dv'}$$



Fuerza y momento sobre un conductor: Generalizando la fuerza de Lorentz para una densidad de corriente, la fuerza por unidad de volumen es,



$$\boldsymbol{f} = \rho_c \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_c \wedge \boldsymbol{B} \longrightarrow d\boldsymbol{F}_m = \boldsymbol{f}\, dv' = (\boldsymbol{J}_c \wedge \boldsymbol{B})\, dv' \qquad (\boldsymbol{E} = 0)$$

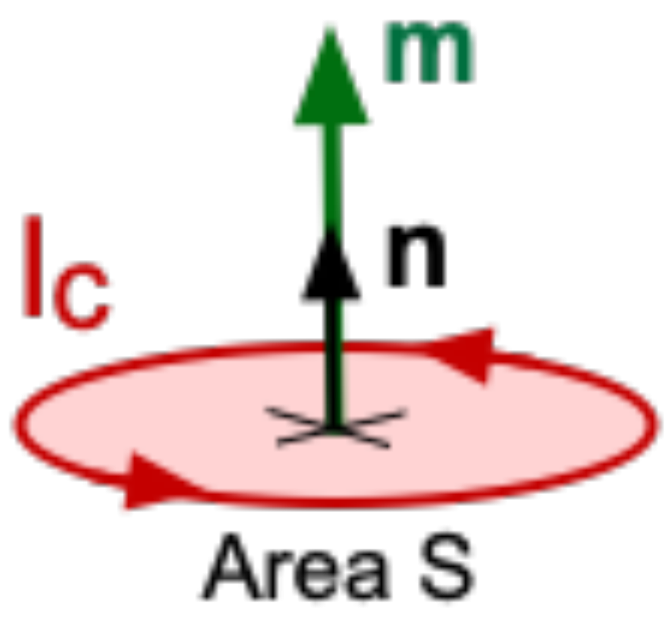
Para un conductor de sección constante la fuerza $\mathbf{F_m}$ y el momento $\mathbf{L_m}$ son las integrales sobre el circuito C recorrido por la corriente constante en el tiempo son,

$$\boxed{\boldsymbol{F}_m = I_c \oint_C (d\boldsymbol{l}'_c \wedge \boldsymbol{B})}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L}_m = I_c \oint_C \boldsymbol{r}' \wedge [\, d\boldsymbol{l}'_c \wedge \boldsymbol{B}\,]}$$

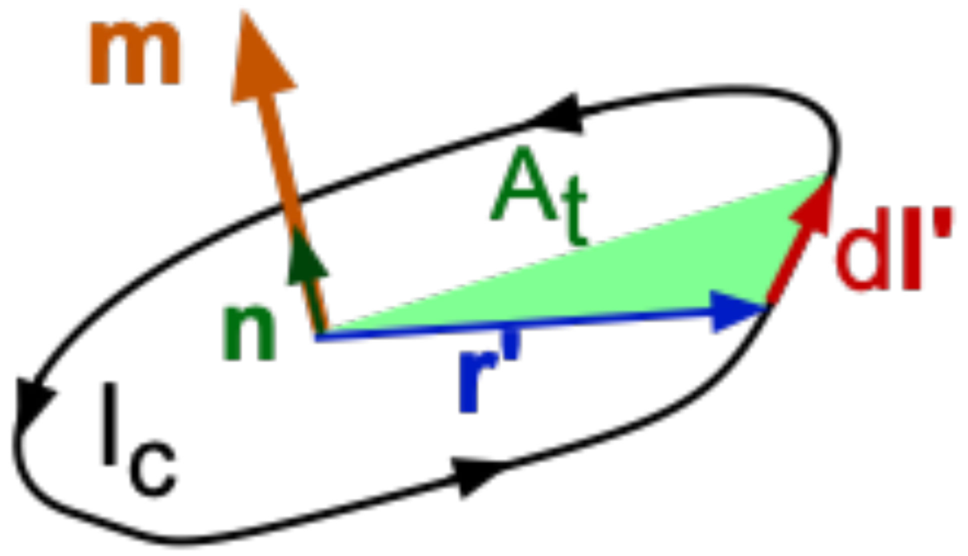
Momento magnético

Para una espira plana simple. $\boxed{\boldsymbol{m} = (S\, I_c)\, \boldsymbol{n}}$



$$\boldsymbol{m} = (\pi\, R^2\, I_c)\, \boldsymbol{n}$$

Generalización para espira plana.

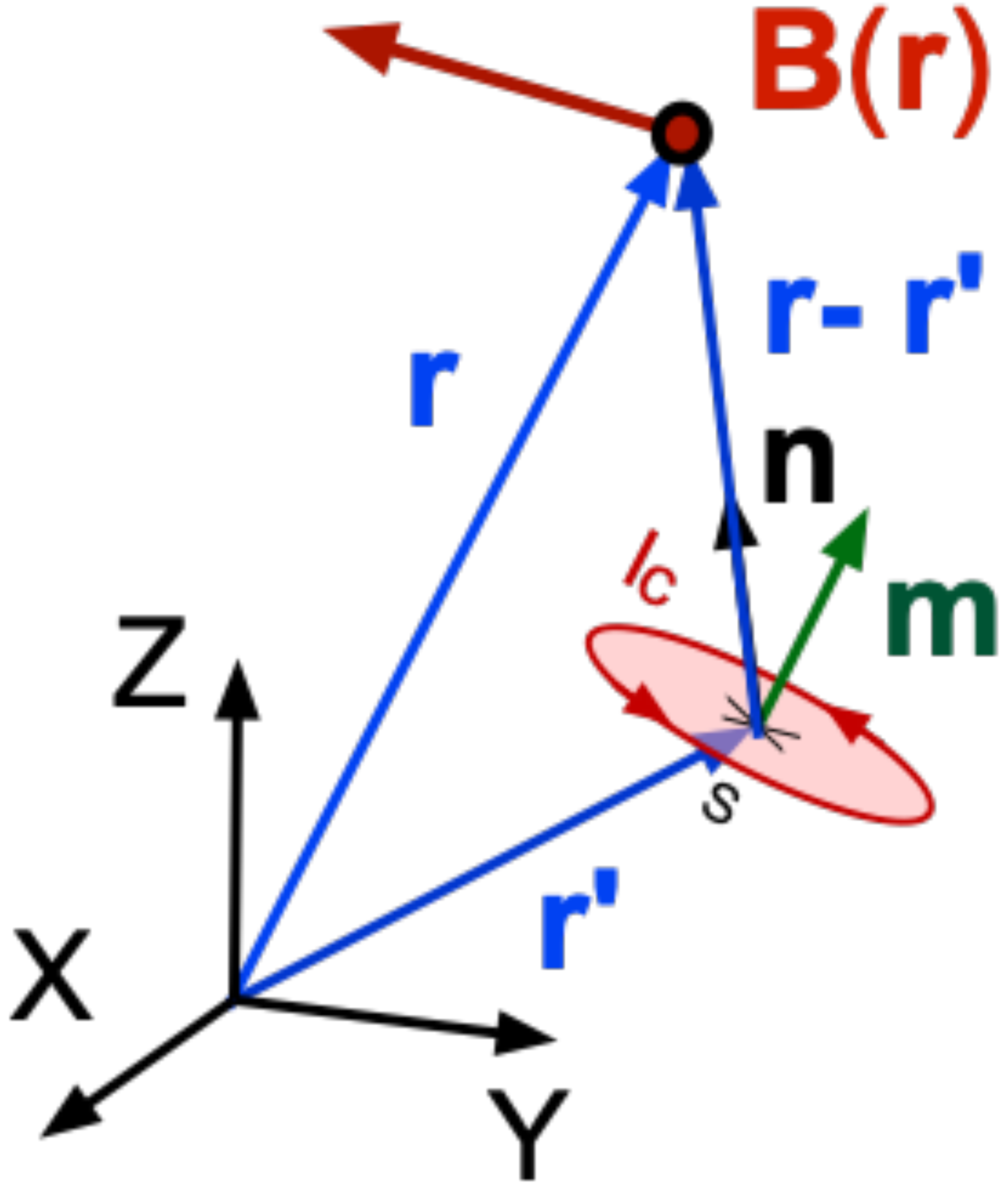


$$\left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{m} &= \frac{1}{2} \int_{V'} \boldsymbol{r}' \wedge \boldsymbol{j}_c(\boldsymbol{r}')\, dv' \\ \boldsymbol{m} &= \frac{I_c}{2} \oint_C \boldsymbol{r}' \wedge d\boldsymbol{l}' \end{aligned} \right.$$

El par de fuerzas es, $\boxed{\boldsymbol{L}_m = \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{B}}$

La densidad de flujo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ creada en un punto lejano $\mathbf{r}$ por un momento dipolar magnético genérico $\mathbf{m}$ situado en $\mathbf{r}'$ se obtiene a partir de su potencial vector $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ y es,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\frac{3\,(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \right) \qquad \boldsymbol{n} = \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$



Donde $\mathbf{n}$ un vector unitario que apunta del centro geométrico de $\mathbf{m}$ hacia el punto $\mathbf{r}$ donde calculamos el valor de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$