Teoría Simplificada de ERRORES

Suscriben este documento los coordinadores de Laboratorio de Química, Física I y Física II.

Definiciones Básicas:

-Error absoluto (o error): Intervalo Δx en donde con máxima probabilidad se encuentra el valor exacto de una magnitud de mejor valor medido x_{mejor}.

$$\left| x_{mejor} - x_{exacto} \right| < \Delta x$$

-Error relativo: Cociente entre el error absoluto y el mejor valor de la medida. Se da en porcentaje.

$$100 \frac{\Delta x}{\left| x_{mejor} \right|} (\%)$$

-Forma de expresar la medida[1]:

$$X = x_{mejor} \pm \Delta x$$

Es recomendable el uso de la notación científica:

-Se usa una potencia de 10 de manera que la medida tiene una sola cifra entera y el resto son decimales[2].

$(2.34 \pm 0.01)10^3$

[1] Cada vez es más frecuente escribir el error entre paréntesis: valor medido (cifras significativas del error absoluto). Por ejemplo: $(2.34\pm0.01)10^3$ ó $2.34\ (1)\ 10^3$.

[2] En la notación ingenieril el exponente de la potencia de 10 debe ser un múltiplo de 3 positivo o negativo y la medida debe estar comprendida entre 1 y 999.

Cifras Significativas:

-Medida y error se redondean al valor más cercano con el número adecuado de cifras significativas[3].

-El error se da con una sola cifra significativa. Excepción: si la primera cifra significativa del error es un 1 se ponen 2 cifras significativas[4].

-La última cifra significativa de la medida debe ser del mismo orden de magnitud que la última cifra significativa del error.

Proceso de redondeo:
Dígitos no significativos: 0, 1, 2, 3, 4 se redondean por defecto.
Dígitos no significativos: 5, 6, 7, 8, 9 se redondean por exceso[5].

-Se recomienda dar el error relativo con dos cifras significativas.

[3] Muy pocas o ninguna referencia hablan de redondear el error siempre por exceso. Aún en el supuesto de que prefiramos ese método es más simple adoptar el mismo convenio para error y medida.

[4] En algunos textos se admite sólo una cifra sin excepciones; en otros se admite aplicar la regla también para el 2; y en otros para cifras significativas de error menores que 25. En nuestro caso, admitiremos esta excepción, que es un supuesto intermedio de los anteriores, dado que es bueno saber manejar medidas con errores de dos cifras significativas.

[5] Siendo muy precisos, cuando la cifra no significativa del error es un 5 sin ninguna otra detrás, se suele aproximar por exceso o defecto dependiendo de que la cifra significativa sea par o impar. No obstante, al ser una teoría simple no la aplicaremos, usando el redondeo por exceso en ese caso.

Medidas Directas:

-Medidas sin dispersión:
Mejor valor de la Medida = Valor proporcionado por el aparato
Error absoluto= Error de escala (= mínima división del aparato[6]).
Si existe algún error sistemático indicado por el fabricante se añadiría.

-Medidas con dispersión:
Mejor valor de la Medida = Media aritmética =>

$$x_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Error absoluto = Error de escala + Error estadístico
Si existe algún error sistemático indicado por el fabricante se añadiría.

Error estadístico (error típico en el promedio) = desviación standard/sqrt(N-1) =>

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_m)^2}{N(N-1)}}$$

Aproximaciones:
-En el laboratorio este error, se puede aproximar por la media de desviaciones[7], esto es:

$$\Delta x \approx \frac{\sum_{i=1}^{N} \left|(x_i - x_m)\right|}{N}$$

-En último extremo, se aproxima por la cota máxima:

$$\Delta x \approx (Max(x_i) - Min(x_i))/2$$

---

[6] Parte de la bibliografía considera que en aparatos analógicos es la mitad y en digitales la unidad. En nuestro caso nos pondremos siempre en el caso más desfavorable.
[7] Una aproximación mejor la da la fórmula de Peters:

$$\Delta x \approx \frac{5}{4} \frac{\sum_{i=1}^{N} \left|(x_i - x_m)\right|}{(N-1)^{1/2} N}$$

Medidas Indirectas: Dadas las medidas $X_i = x_i + \Delta x_i$, para obtener el error en una función de éstas se aplica[8]:

$$y = f(x_1,..,x_i,..,x_n)$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_1,..,x_n} \Delta x_i$$

Casos Particulares:

-Sumas y Restas:

$$y = x_1 + x_2 - x_3$$

$$\Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

-Producto por una constante:

$$y = ax_1$$

$$\Delta y = a\Delta x_1 \quad o \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1}$$

-Productos y Cocientes:

$$y = x_1 x_2 / x_3$$

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3}$$

-Funciones Potenciales y Exponenciales:

El error relativo se obtiene de forma inmediata a partir de las propiedades de los logaritmos neperianos y su diferenciación:

$$y = x_1^a x_2^{x_3} b^{x_4}$$

$$\ln y = a \ln x_1 + x_3 \ln x_2 + x_4 \ln b$$

$$\frac{\Delta y}{y} = a \frac{\Delta x_1}{x_1} + x_3 \frac{\Delta x_2}{x_2} + \Delta x_3 \ln x_2 + \Delta x_4 \ln b$$

[8] También es posible el cálculo por medio de la fórmula:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2_{x_1,..,x_n} (\Delta x_i)^2}$$

Ajuste por Mínimos Cuadrados[9]:

-Linealización de leyes (funciones):

Recta: $Y = mX + c$

Ejemplos de linealización:

$$y = ax^n \rightarrow \underbrace{\ln y}_{Y} = \underbrace{\ln a}_{c} + \underbrace{n}_{m}\underbrace{\ln x}_{X} \rightarrow (\ln x_i, \ln y_i) = (X_i, Y_i) \text{ -> Recta}$$

$$y = ba^x \rightarrow \underbrace{\ln y}_{Y} = \underbrace{\ln b}_{c} + \underbrace{x}_{X}\underbrace{\ln a}_{m} \rightarrow (x_i, \ln y_i) = (X_i, Y_i) \text{ -> Recta}$$

$$y = ax^2 + b \rightarrow \underbrace{y}_{Y} = \underbrace{b}_{c} + \underbrace{x^2}_{X}\underbrace{a}_{m} \rightarrow (x_i^2, y_i) = (X_i, Y_i) \text{ -> Recta}$$

-Ajuste:
Conjunto de puntos: $(X_i, Y_i) \quad i = 1,...,n \Rightarrow Y(X) = m\,X + c$.
Cálculo de m y c:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \quad S_3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \quad S_4 = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad S_5 = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2}$$

$$m = \frac{n\,S_1 - S_3\,S_4}{n\,S_2 - S_3^{\,2}} \qquad c = \frac{S_2\,S_4 - S_1\,S_3}{n\,S_2 - S_3^{\,2}}$$

Cálculo del error:

$$s_r^{\,2} = \frac{1}{(n-2)}\left[S_5 - \frac{1}{n}S_4^2 - m^2\left(S_2 - \frac{1}{n}S_3^2\right)\right]$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{n\,s_r^2}{n\,S_2 - S_3^2}} \qquad \Delta c = \sqrt{\frac{s_r^2\;S_2}{n\,S_2 - S_3^2}}$$

---

[9] Otro método equivalente y que, por tanto, puede ser utilizado en primera opción para el cálculo del ajuste es:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad m = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})y_i}{D} \qquad c = \overline{y} - m\overline{x}$$

Cálculo del error:

$$d_i = y_i - mx_i - c$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{1}{D}\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{(n-2)}} \qquad \Delta c = \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{D}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{(n-2)}}$$

Tablas:

-Es conveniente identificar la tabla con un número y título que haga referencia a su contenido.
-En la cabecera de cada columna debe figurar el nombre de la magnitud o su símbolo junto con las unidades, normalmente entre paréntesis.
-Si el error es el mismo en todos los valores de una columna, también deberá figurar en la cabecera.
-De indicarse en la cabecera un factor en forma de potencia de 10 que multiplica a la magnitud, éste ha de figurar en las unidades[10]. Por ejemplo: B (10^2 T).

Gráficas:

-Es conveniente identificar la gráfica con un número y título que haga referencia a su contenido.
-Junto a los ejes dibujados debe figurar el nombre de la magnitud o su símbolo junto con las unidades, normalmente entre paréntesis.
-De indicarse en los ejes un factor en forma de potencia de 10 que multiplica a la magnitud, ésta ha de figurar en las unidades.
-Los valores representados deben ser perfectamente visibles. El error en cada valor, si es apreciable, debe ir representado en forma de segmentos horizontales o verticales según corresponda a la magnitud del eje x o y, respectivamente.
-Los intervalos de la escala elegida deben ser regulares, convenientemente marcados a una cierta distancia y de fácil lectura de la magnitud (múltiplos o submúltiplos de 10).
-La escala y el rango de valores de los ejes debe ser tales que todos los valores ocupen la mayor parte de la hoja y no aparezcan sobre los ejes. Además, la escala no necesariamente debe incluir el origen.
-Si la gráfica se hace sobre papel milimetrado, los ejes se pondrán en el interior de la zona milimetrada y no en sus bordes.
-Ajustes a una ley lineal:

- La recta trazada debe aproximarse lo mejor posible a la mayor parte de los valores experimentales.
- Para el cálculo de la ecuación de la recta (pendiente y ordenada en el origen) se tomarán dos puntos de ésta lo más alejados posible. Como es obvio, sólo se podrán elegir los valores experimentales como puntos para calcular las constantes de la recta si se encuentran sobre ésta.

[10] Una cabecera indicando $B\times10^2$ (T) puede significar que en la columna se dan los valores de B o los de $B\times10^2$ lo cual crea una incertidumbre: en el primer caso, los valores de cada celda se deben multiplicar por 10^2 y en el segundo por 10^{-2}.