MOMENTOS DE INERCIA

- **Finalidad del experimento.** Determinar la constante de un muelle de torsión y el momento de inercia de un cuerpo. Comprobar el teorema de Steiner.

- **Material.** Muelle de torsión, varilla o disco de masa M, dos pesas de masa m. Varios objetos (esfera, cilindro macizo y hueco) para medir su momento de inercia y un contador de oscilaciones.

1.- Introducción.

El péndulo de torsión es un sistema con un muelle helicoidal que permite fijar un cuerpo sólido y hacerlo oscilar alrededor de un eje fijo. Dos parejas de alumnos emplearán una varilla como la de la figura 1a y otro el disco de la figura 1b de masa *M*.

El muelle helicoidal de las figuras 1a y 1b proporciona un momento M respecto del eje de rotación $M = -K\,\theta(t)$ que es proporcional al ángulo $\theta(t)$ de giro. Opera de un modo análogo a la ley de Hooke $F = -K\,x(t)$ entre la elongación $x(t)$ y la fuerza F que produce un muelle de constante elástica K.

Despreciando los efectos de fricción (que son muy pequeños) la ecuación del movimiento de rotación alrededor de un eje fijo será,

$$M = I_o \frac{d\omega}{dt} = -K\,\theta(t)$$

donde $\omega(t) = d\theta/dt$ es la velocidad angular e I_o el momento de inercia del sólido respecto del eje de giro. Para este movimiento de rotación obtenemos la ecuación de un oscilador armónico,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K}{I_o}\theta = 0$$

cuya solución es $\theta(t) = \theta_o sen\,(\omega_o\,t + \varphi_o)$ con frecuencia $\omega_o = \sqrt{K/I_o}$ y donde la amplitud θ_o y la fase φ_o se determinan a partir de las condiciones iniciales.

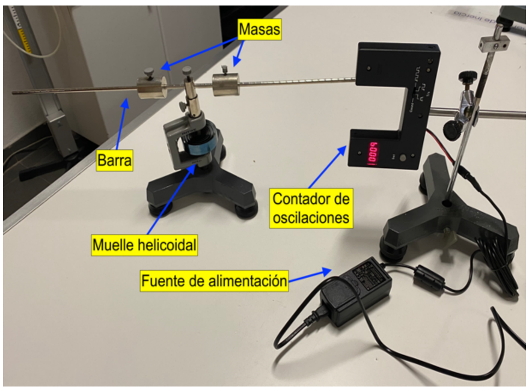

Fig. 1a: El péndulo de torsión con la barra y las dos masas. La cubeta contiene distintos cuerpos para medir en su momento de inercia en la práctica.

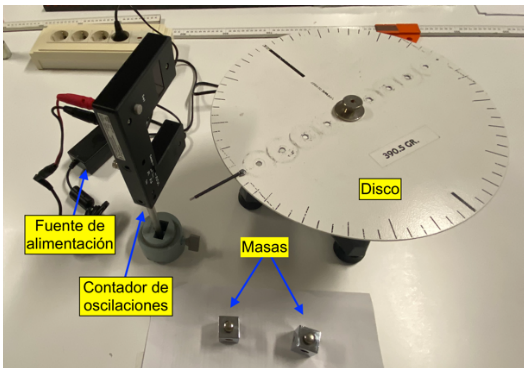

Fig. 1b: El disco con las dos masas, se observan los taladros para disponer simétricamente las masas a lo largo de su diámetro.

El momento de inercia I_o de un cuerpo sólido respecto de un eje fijo de rotación fijo es la suma,

$$I_o = \sum_{j=1}^{N} m_i \, d_i^2 \qquad [1]$$

de las distancias d_i al eje de rotación de sus partículas de masa m_i. Respecto de un eje que pasa por su centro de masas, para la barra de la figura 1a de longitud L y masa M, la suma [1] es,

$$I_B = \frac{1}{12} M L^2$$

y para el disco de radio R,

$$I_D = \frac{1}{12} M L^2$$

Las dos masas m que se fijan con tornillos pueden considerarse como masas puntuales (las aproximamos por su centro de masas) adicionales. Si ambas están separadas una distancia d igual del eje de giro para la barra tendremos,

$$I_o(d) = I_B + 2\, m\, d^2 \qquad \text{y para el disco,} \qquad I_o(d) = I_D + 2\, m\, d^2$$

empleando la ecuación [1]. Cambiando la posición de las dos masas de las figuras 1a (figura 1b) a lo largo de la barra (diámetro del disco) tendremos diferentes momentos de inercia $I_o(d)$ y frecuencias de oscilación del sólido,

$$\omega_o(d) = \sqrt{\frac{K}{I_o(d)}} \quad \text{o bien, el período del movimiento,} \quad T(d) = \frac{2\pi}{\omega_o(d)} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o(d)}{K}} \qquad [2]$$

que también cambia.

El teorema de Steiner relaciona los momentos de inercia de un sólido rígido de masa M respecto de dos ejes paralelos. Si I_{CM} es el momento respecto de un eje que pasa por el centro de masas del sólido, su momento I_A respecto de otro eje paralelo separado una distancia s será,

$$I_A = I_{CM} + M\, s^2 \qquad [3]$$

2- Realización.

Para comenzar, empleando la ecuación [1] primero determinaremos el valor de la constante K del muelle helicoidal utilizando el valor conocido del momento de inercia de la barra I_B (disco I_D) anterior. Conocido su valor, podremos verificar la ecuación [3]

2.1. Determinación de la constante del muelle de torsión.

Para determinar el valor de la constante K del muelle helicoidal se fija la varilla (o disco) en el muelle de torsión sujeta por su centro de masas y con las dos masas más pequeñas en posiciones simétricas respecto del eje de giro. Se desplaza el sistema de su posición de equilibrio y se mide el período de oscilación.

Para ello, cronometramos el tiempo necesario para realizar 10 oscilaciones y dividimos el tiempo medido por diez. Se repite este proceso para cuatro distancias (d_1, d_2, d_3, d_4) y con los datos obtenidos podremos organizarlos como en la tabla 1 siguiente.

Calculamos entonces cuatro períodos promedio (P_{d1}, P_{d2}, P_{d3}, P_{d4}) como,

$$P_{di} = \frac{T_{i1} + T_{i2} + T_{i3} + T_{i4}}{4}$$

y representando el cuadrado del valor promedio P_{di} del período T^2 frente a la distancia d_i^2 de ambas masas al eje de giro, los cuatro valores anteriores deberían alinearse a lo largo de una recta. En la ecuación [2] anterior se tiene, para la barra (disco) que,

$$T^2(d) = \frac{4\pi^2}{K} I_B + \left(\frac{4\pi^2}{K} m\right) d^2 = A + B\, d^2 \qquad [4]$$

y el valor de la constante K del muelle helicoidal puede obtenerse a partir de la pendiente B del ajuste por mínimos cuadrados.

N	Distancia d (cm)	Periodo T (s)	Promedio P_{di} (s)
1	d_1	T_{11}	P_{d1}
2	d_1	T_{12}	
3	d_1	T_{13}	
4	d_1	T_{14}	
1	d_2	T_{21}	P_{d2}
2	d_2	T_{22}	
3	d_2	T_{23}	
4	d_2	T_{24}	
1	d_i	T_{i1}	P_{di}
…	…	…	

Tabla 1: Organización de los datos para determinar la constante del muelle helicoidal.

2.2. Comprobación del teorema de Steiner.

Para comprobar el teorema de Steiner retiramos las masas de la varilla (disco) y mediremos el período de oscilación de la varilla (disco) sujetándola al muelle de torsión en al menos ocho (8) posiciones diferentes, una de ellas su centro de masas.

Fig. 2: La bandeja con distintos sólidos

De nuevo mediremos para cada una de las 8 posiciones a lo largo de la barra 10 períodos de oscilación tres (3) veces y los datos se organizan también como en la tabla 1. Ahora $s_i \equiv d_i$ es la distancia del eje de oscilación al centro de masas de la barra (disco).

Si introducimos la expresión [3] del teorema de Steiner en la ecuación [2] resulta,

$$T^2(s) = \frac{4\pi^2}{K} I_{CM} + \left(\frac{4\pi^2}{K} M\right) s^2 = A + B\, s^2 \qquad [5]$$

y las medidas deberían disponerse a lo largo de una recta si representamos cuadrado del período promedio $T^2(s)$ frente a la distancia s_i^2 del eje de giro al centro de masas de la varilla (disco). Como ahora conocemos el valor de K podemos determinar I_{CM} de la barra (disco) y su masa M a partir de la pendiente B y el punto de corte con el eje A del ajuste de mínimos cuadrados.

2.3 Momento de inercia de un objeto.

Finalmente, se determinará de manera experimental el momento de inercia de un objeto con geometría definida. Tomando un objeto de la bandeja de la figura 2 se medirá el período de oscilación alrededor del centro de masas y comprobará (K es conocido) si su momento de inercia coincide con el valor teórico, que se encuentra en cualquier libro de Física elemental.

3.- Resultados y gráficos.

Con estos datos obtenido en la práctica hemos de efectuar las siguientes cálculos y gráficos.

• Representar el periodo de oscilación T^2 en función de la distancia d^2 de las masas al eje de giro y determinar la constante K del muelle de torsión por el método de los mínimos cuadrados según la ecuación [4]. Representar los datos y el ajuste en un mismo gráfico.
• Comprobar el teorema de Steiner a partir del ajuste de T^2 frente a la distancia s^2 del eje de giro del sólido a centro de masas del sólido según la ecuación [5].
• Comprobar si el valor teórico del momento de inercia teórico coincide con el obtenido para otro cuerpo (esfera, cilindro hueco o macizo) midiendo de nuevo el período de la oscilación.