

Apuntes de Física II

ELECTROSTÁTICA

Dr. Ezequiel del Río

Departamento de Física Aplicada
E.T.S. de Ingeniería Aeronáutica y del espacio
Universidad Politécnica de Madrid

31 de marzo de 2017

1. Operadores diferenciales	5
1.1. Introducción	5
1.2. Gradiente, divergencia y rotacional	5
1.3. Teoremas integrales	6
1.3.1. Teorema de Gauss	6
1.3.2. Teorema de Stokes	7
2. Operadores diferenciales en Coordenadas cilíndricas y esféricas.	9
2.1. Coordenadas cilíndricas	9
2.2. Coordenadas esféricas	10
3. Problemas propuestos	12
4. Campo electrostático	14
4.1. Introducción	14
4.2. Campo electrostático	15
4.3. Energía	17
4.3.1. Energía potencial electrostática	17
4.3.2. Energía de un sistema de partículas cargadas	17
4.4. Similitudes con el campo gravitatorio	18
4.5. Diferencias entre campos electromagnéticos y gravitatorios	19
4.6. Electrostática de Conductores	20
4.7. Electrostática de dieléctricos	22
4.8. Energía almacenada en un condensador	24
5. Problemas propuestos	26
6. Ecuaciones de Maxwell y fuerza de Lorentz	31
6.1. Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo	31
6.1.1. Ley de conservación <i>local</i> de la carga	32
6.2. Fuerza de Lorentz	33
6.2.1. Fuerza y momento de un campo magnético sobre un conductor	33

6.2.2. Tipos de problemas de electromagnetismo	34
6.3. Magnetostática	34
6.3.1. Definición de amperio	36
6.4. Magnetostática de materiales	36
6.4.1. Ferromagnetismo	38
6.5. Magnetostática de materiales	40
6.5.1. Ferromagnetismo	41
7. Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad	43
7.1. Introducción	43
7.2. Cinemática Relativista	44
7.2.1. Tiempo propio	44
7.2.2. Transformaciones de Lorentz	45
7.3. Dinámica Relativista.	46
7.3.1. Nota sobre la segunda ley de Newton	47
7.3.2. Campo electromagnético	48
8. Conducción eléctrica y fuerza electromotriz inducida	49
8.1. Conducción eléctrica	49
8.2. Efecto termoelectrónico	52
8.3. Fuerza electromotriz inducida	52
8.4. Corrientes variables	55
9. Ondas Electromagnéticas	57
9.1. Ondas Electromagnéticas en el vacío	57
9.2. Ondas electromagnéticas en medios dieléctricos	61
9.3. Energía del campo electromagnético	62
9.4. Polarización	65
10. Problemas propuestos	68
A. SI	73
A.1. Unidades fundamentales	73
A.2. Unidades suplementarias	74
A.3. Unidades derivadas con nombre propio y normas de notación	75
B. Constantes físicas fundamentales	77

1.1. Introducción

En el estudio de cualquier parte de la Física es esencial familiarizarse desde el principio con los métodos matemáticos relativos a la materia de estudio, es decir, la parte de la matemática utilizada comunmente para *expresar y razonar* la materia a estudiar. Este es el objeto de esta sección. El material aquí espuesto puede encontrarse en los complementos de los resúmenes de Física General I o naturalmente, de modo mas riguroso en libros de análisis matemático.

Cantidades como la presión o la velocidad en un fluido, que dependen del tiempo t y de la posición $\vec{r}(x, y, z)$, se llaman campos. Nótese que son funciones, escalares o vectoriales, de varias variables, pero con la particularidad de que tres variables (x, y, z) son las componentes de un vector \vec{r} , y otra, t , es un escalar. Para un campo vectorial $\vec{w}(\vec{r}, t)$, y en un instante dado t_0 , se llaman líneas de campo a las curvas tangentes en cada punto \vec{r} al vector $\vec{w}(\vec{r}, t_0)$. Para un campo escalar $p(\vec{r}, t)$, se llaman superficies de campo constante, en un instante t_0 , a las superficies $p(\vec{r}, t_0) = \text{cte}$. Unas y otras son útiles para representar gráficamente campos dados.

1.2. Gradiente, divergencia y rotacional

Muchas leyes de la Física relacionan derivadas de campos; si esas leyes han de ser válidas en triedros de cualquier orientación tales derivadas han de ser a su vez campos escalares o vectoriales. Las derivadas temporales, $(\partial p/\partial t, \partial \vec{w}/\partial t)$, tienen, evidentemente, ese carácter. Por el contrario, una derivada espacial, tal como $\partial p/\partial x$, no es ni un escalar ni un vector. Combinaciones de derivadas espaciales que sí son escalares o vectores, son:

$$\text{Gradiente : } \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.1)$$

$$\text{Divergencia : } \nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (1.2)$$

$$\text{Rotacional : } \nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (1.3)$$

En las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3) hemos utilizado el operador Nabla

$$\nabla \equiv \vec{i}\partial/\partial x + \vec{j}\partial/\partial y + \vec{k}\partial/\partial z \quad (1.4)$$

que permite una notación vectorial. La expresiones de los operadores anteriores en coordenadas curvilíneas pueden verse en el capítulo 2.

Es fácil comprobar que ∇p es un vector: tratándolo como a tal resulta

$$\nabla p \cdot \Delta \vec{r} = \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \Delta z \simeq p(\vec{r} + \Delta \vec{r}) - p(\vec{r}) \equiv \Delta p, \quad (1.5)$$

que es un escalar para cualquier $\Delta \vec{r}$. El vector ∇p en el punto arbitrario \vec{r}_0 es perpendicular al plano tangente en \vec{r}_0 a la superficie $p(\vec{r}) = \text{cte} = p(\vec{r}_0)$ y su sentido es el de p creciente. El carácter escalar de $\nabla \cdot \vec{w}$ y vectorial de $\nabla \wedge \vec{w}$ se seguirá de los teoremas de Gauss y Stokes.

La determinación de aquellas derivadas espaciales segundas que a su vez sean campos escalares o vectoriales es inmediata. Del campo escalar $\nabla \cdot \vec{w}$ se obtiene su gradiente, $\nabla \cdot \vec{w} \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{w})$, y de los campos vectoriales ∇p y $\nabla \wedge \vec{w}$ se obtiene

$$\nabla p \rightarrow \nabla \cdot (\nabla p), \quad \nabla \wedge (\nabla p) \quad , \quad \nabla \wedge \vec{w} \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}), \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{w}). \quad (1.6)$$

Para los campos escalar y vectorial tenemos las siguientes igualdades

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}) = \nabla \wedge (\nabla p) = 0 \quad (1.7)$$

que el alumno puede comprobar fácilmente.

¿Pueden existir campos \vec{w} y p para los que las ecuaciones (1.7) no se cumplan?

Por otra parte, si en la expresión $\nabla \cdot (\nabla p)$ se trata al operador nabla como si fuese un vector, $\nabla \cdot (\nabla p) = (\nabla \cdot \nabla)p$ (se escribe $\nabla^2 p$, “Laplaciana de p ”), se obtiene el mismo resultado:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

Finalmente, se comprueba la identidad

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{w}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{w}) - \nabla^2 \vec{w}. \quad (1.9)$$

Se puede decir, por tanto, que las derivadas espaciales segundas de campos se presentarán en Física en la forma $\nabla(\nabla \cdot \vec{w})$, $\nabla^2 p$, ó $\nabla^2 \vec{w}$. El operador ∇^2 se llama laplaciano¹.

1.3. Teoremas integrales

1.3.1. Teorema de Gauss

Ciertas relaciones entre integrales de campos permiten a veces simplificar el cálculo de los campos mismos, o llevar leyes físicas de una forma diferencial a una forma integral (ver Ley de Ampere, más adelante). Se llama flujo ϕ de un campo vectorial \vec{w} a través de una superficie S a la integral de superficie

$$\phi \equiv \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S} \quad (1.10)$$

¹Pierre-Simon Laplace, astrónomo, físico y matemático francés (1749 - 1827).

donde $d\vec{S}$ es el vector de módulo el elemento diferencial de área dS , y versor el normal \vec{n} a la superficie en dS . Como hay dos sentidos posibles para \vec{n} , para hallar ϕ hay que convenir previamente cual se elige; cuando S es una superficie cerrada se elige siempre la normal exterior. Si se divide un volumen v limitado por una superficie cerrada S en dos volúmenes v_1 y v_2 ($v_1 + v_2 \equiv v$), mediante una superficie de corte abierta S' , se cumple

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} \quad (1.11)$$

donde S_1 y S_2 son las superficies cerradas que limitan a v_1 y a v_2 (nótese que sobre S' las normales a utilizar en S_1 y S_2 son opuestas). Analizando el flujo a través de la superficie que limita un cubo elemental se sigue finalmente, para cualquier superficie cerrada S , el Teorema de Gauss²

$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{w} = \int_v dv \nabla \cdot \vec{w}. \quad (1.12)$$

Hay un segundo teorema de Gauss, $\int_S d\vec{S} \wedge \vec{w} = \int_v dv \nabla \wedge \vec{w}$.

1.3.2. Teorema de Stokes

Se llama circulación C de un campo vectorial \vec{w} a lo largo de una curva cerrada Γ a la integral de línea de \vec{w} sobre Γ

$$C \equiv \oint_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l} \quad (1.13)$$

donde $d\vec{l}$ es el vector de módulo el elemento de arco dl , y versor tangente a Γ en dl en el sentido de recorrido, que es preciso especificar. Una línea interior abierta Γ' que una dos puntos de Γ engendra dos curvas cerradas Γ_1 y Γ_2 ; se encuentra

$$C_{\Gamma} = C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} \quad (1.14)$$

(nótese que los sentidos de $d\vec{l}$ sobre Γ' son opuestos en Γ_1 y Γ_2). Analizando la circulación sobre un rectángulo elemental se sigue finalmente, para cualquier curva cerrada Γ , el Teorema de Stokes³

$$\oint_{\Gamma} \vec{w} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \wedge \vec{w} \cdot d\vec{S}, \quad (1.15)$$

siendo S cualquier superficie abierta que se apoye en Γ ; los sentidos de recorrido en Γ y de la normal en S se asocian como en un triedro a derechas. Si Γ colapsa a un punto, S se hace cerrada, y el teorema de Stokes es una identidad,

$$0 = \int_{S \text{ cerrada}} \nabla \wedge \vec{w} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}) dv, \quad (1.16)$$

donde v es el volumen encerrado por S .

Del teorema de Stokes se deduce que si un campo \vec{w} es irrotacional ($\nabla \wedge \vec{w} = 0$ para cualquier \vec{r}), su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Consecuencia de esto es que la integral de línea de \vec{w} a lo largo de una curva abierta, de un punto P a otro A , no depende de la curva; para un campo irrotacional dado \vec{w} , $\int_P^A \vec{w} \cdot d\vec{l}$ es sólo función de A y P . Si se fija A , y el vector de posición \vec{r} de P es arbitrario, se obtiene de \vec{w} un campo escalar,

²Carl Friedrich Gauss. Matemático, astrónomo y físico alemán (1777-1855). Director del observatorio de Gotinga. En su tesis doctoral proporcionó la primera demostración del teorema fundamental del álgebra.

³George Gabriel Stokes, matemático y físico irlandés (1819-1903). Trabajó en dinámica de fluidos. Ver ecuación de Navier-Stokes en la asignatura de fluidos.

$$\int_P^A \vec{w} \cdot d\vec{l} \equiv V(\vec{r}) ; \quad (1.17)$$

cuando esto no conduce a una integral impropia se toma el punto fijo A a distancia infinita, $V(r \rightarrow \infty) = 0$, como sucede en electrostática. Si P y Q son puntos próximos situados en \vec{r} y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, se tiene

$$\left. \begin{array}{l} V(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = \Delta V \simeq \nabla V \cdot \Delta\vec{r} \\ V(\vec{r}) - V(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \int_P^Q \vec{w} \cdot d\vec{l} \simeq \vec{w} \cdot \Delta\vec{r} \end{array} \right\} \implies \vec{w} = -\nabla V \quad (1.18)$$

CAPÍTULO 2

Operadores diferenciales en Coordenadas cilíndricas y esféricas.

En este capítulo mostramos expresiones de los operadores operaciones utilizados en coordenadas cilíndricas y esféricas. En lo que sigue p es una función escalar mientras que \vec{w} es una función vectorial.

Recordamos las definiciones para coordenadas rectangulares. El vector gradiente de p se define como:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}, \quad (2.1)$$

El escalar divergencia de \vec{w} se define como:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \quad (2.2)$$

El vector rotacional de \vec{w} se define como:

$$\nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.3)$$

Finalmente recordamos la definición de la laplaciana de un campo escalar:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2.4)$$

Introducimos seguidamente las coordenadas curvilíneas de gran utilidad en electromagnetismo.

2.1. Coordenadas cilíndricas

La figura 2.1 muestra las coordenadas cilíndricas de un punto, siendo \vec{k} , $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\phi}_1$ vectores unitarios en direcciones ortogonales entre sí. La distancia del punto al eje z está dada por ρ mientras que ϕ es el ángulo acimutal. El vector de posición es por tanto:

$$\vec{r} = \rho \vec{\rho}_1 + z \vec{k} \quad (2.5)$$

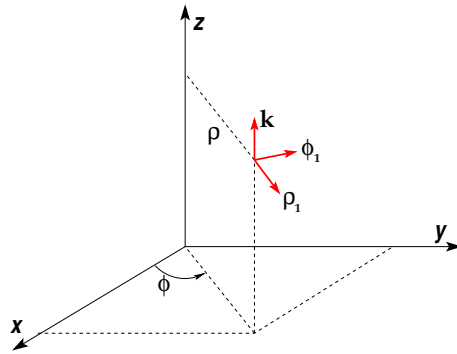


Figura 2.1: Coordenadas cilíndricas

Aplicando ahora la regla de la cadena para campos vectoriales tenemos la siguiente expresión para el operador gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \vec{\rho}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{\phi}_1 + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}. \quad (2.6)$$

La siguiente expresión para el operador divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho w_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}. \quad (2.7)$$

Para el operador rotacional tenemos:

$$\nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w_z}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial z} \right) \vec{\rho}_1 + \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial \rho} \right) \vec{\phi}_1 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho w_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial w_\rho}{\partial \phi} \right) \vec{k} \quad (2.8)$$

Finalmente para la laplaciana de campo escalar p obtenemos:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2.9)$$

2.2. Coordenadas esféricas

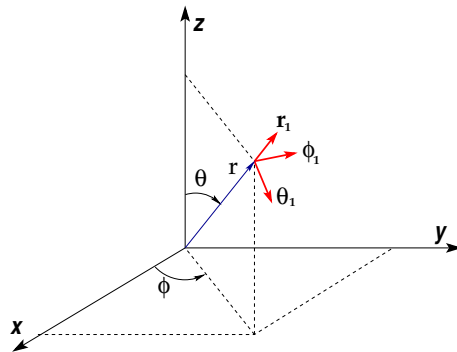


Figura 2.2: Coordenadas esféricas

La figura 2.2 muestra las coordenadas esféricas de un punto donde r es la distancia del punto al origen, θ es el ángulo entre el eje z y el radio vector, y ϕ es el ángulo acimutal. Los vectores unitarios \vec{r}_1 , $\vec{\theta}_1$ y $\vec{\phi}_1$ son ortogonales entre sí siendo en este caso el vector de posición:

$$\vec{r} = r \vec{r}_1 \quad (2.10)$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena para funciones vectoriales tenemos en coordenadas esféricas las correspondientes expresiones para los operadores gradiente,

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{r}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{\theta}_1 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \vec{\phi}_1 \quad (2.11)$$

divergencia

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta w_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} \quad (2.12)$$

rotacional

$$\nabla \wedge \vec{w} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta w_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{r}_1 + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r w_\phi)}{\partial r} \right) \vec{\theta}_1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r w_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \theta} \right) \vec{\phi}_1 \quad (2.13)$$

y laplaciana

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2}. \quad (2.14)$$

CAPÍTULO 3

Problemas propuestos

1. Dado el campo escalar $P = f(r)$ y el vectorial $\mathbf{w} = \mathbf{r} f(r)$, utilizando coordenadas rectangulares, hallar en términos de f y de sus derivadas ordinarias:

- a) ∇P
- b) $\nabla \cdot \mathbf{w}$
- c) $\nabla \wedge \mathbf{w}$
- d) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})$
- e) $\nabla^2 P$
- f) $\nabla^2 \mathbf{w}$

Hacer lo mismo en utilizando coordenadas esféricas.

2. Dado el campo vectorial adimensional $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + (2 - yz)\mathbf{j} + (\frac{z^2}{2} - 1)\mathbf{k}$, hallar:

- a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$
- b) $\nabla \wedge \mathbf{A}$
- c) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ en el punto $C(a, a, a)$.
- d) Flujo de \mathbf{A} a través de la esfera de centro C y radio $3a$.
- e) Flujo de \mathbf{A} a través de la superficie del triángulo de vértices $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$.

3. Dado el campo vectorial adimensional: $\mathbf{A} = 2xz\mathbf{i} + z \sin x\mathbf{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\mathbf{k}$

- a) Circulación de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a lo largo del cuadrado de lado 2, situado en el plano $z = 2$, y con lados paralelos al los ejes x e y .
- b) Circulación de \mathbf{A} a lo largo de la circunferencia situada en el plano XY , con centro en el origen y radio 2.

- c)* Flujo de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a través de la superficie del cuadrado definido en el punto *3a*.
- d)* Flujo de \mathbf{A} a través de la semiesfera de centro el origen y radio 2, que se apoya en la circunferencia definida en *3b* y situada por encima del plano XY .

4.1. Introducción

El electromagnetismo es la disciplina que estudia los campos eléctricos y magnéticos y su interacción con la materia.

Históricamente se estudian los campos eléctricos y posteriormente, con ayuda de la pila de A. Volta se generan corrientes y se producen campos magnéticos. Tras varios siglos de investigaciones experimentales y teóricas, fue James Clerk Maxwell, “El hombre que lo cambió todo para siempre”,¹ quien sintetizó todos estos los conocimientos en cuatro ecuaciones.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}, \quad (4.2)$$

cuyo significado se verá a lo largo de la asignatura.

Las ecuaciones de Maxwell describen los campos eléctricos, \vec{E} , y magnéticos, \vec{B} , en los que se basan los motores eléctricos, por ejemplo. De ellas se deduce la propagación de ondas electromagnéticas posibilitando la comunicación inalámbrica. Estas ecuaciones, no son invariantes bajo las transformaciones de Galileo. La explicación de esto la daría definitivamente A. Einstein en 1905 con la Teoría Especial de la Relatividad.

Es evidente que las ecuaciones de Maxwell cambiarían la historia de la humanidad forma irreversible, tal como lo expresaría Richard Feynman en sus *The Feynman Lectures on Physics*: “. . . no cabe la menor duda de que se considerará que el hecho más significativo del siglo XIX es el descubrimiento realizado por Maxwell de las leyes del electromagnetismo. La Guerra de Secesión americana quedará reducida a algo insignificante comparada con este importante hecho científico que tuvo lugar en la misma década”.

El resto de la asignatura está dedicada a entender las ecuaciones de Maxwell (4.1) y (4.2). Para ello se parte de casos sencillos, donde uno de los campos \vec{E} o \vec{B} es cero o bien son constantes, es decir independientes del tiempo.

¹Expresión que utilizó A. Einstein en 1930 para definir a Maxwell

4.2. Campo electrostático

Los campos electrostáticos se caracterizan por ser \vec{E} independiente del tiempo. En caso de existir un campo \vec{B} , este será igualmente independiente del tiempo.

En esta sección introduciremos la primera de las Ec.(4.2) mediante el estudio de las fuerzas electrostáticas.

La fuerza electrostática de un sistema de partículas con cargas q_j en \vec{r}_j , sobre otra carga q en \vec{r} , viene dada por la ley de **Coulomb**²(ver figura (4.1.a))

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j q (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (4.3)$$

siendo ϵ_0 la *constante eléctrica*, (ver apéndice B). Desde un punto de vista puramente formal podemos decir que las cargas $\{q_j\}$ crean un campo electrostático

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (4.4)$$

de modo que una carga arbitraria q situada en un punto arbitrario \vec{r} sufre una fuerza $\vec{F}_e = q\vec{E}(\vec{r})$. Para una distribución de carga de densidad $\rho_e(\vec{r}')$ en lugar de un sistema de cargas puntuales se tendrá (ver figura (4.1.b))

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \rho_e(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (4.5)$$

donde v es cualquier volumen fuera del cual $\rho_e = 0$.

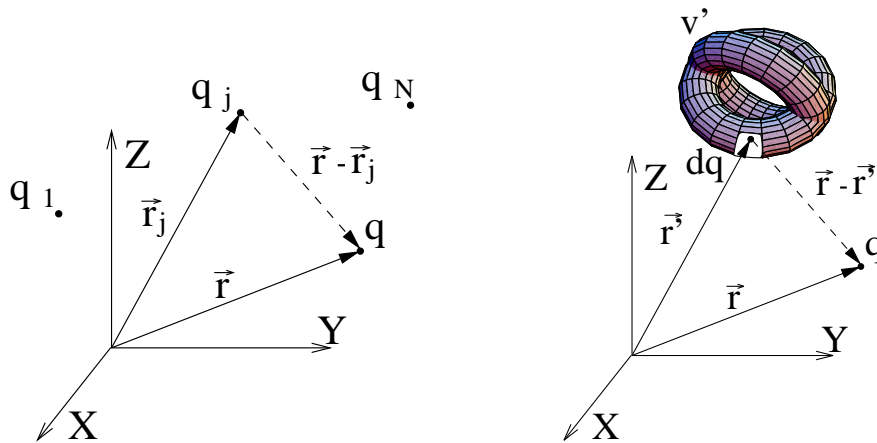


Figura 4.1: a) El sistema de cargas puntuales crea un campo \vec{E} en las proximidades de q según (4.4). b) El volumen v' con densidad de carga ρ_e crea un campo \vec{E} en las proximidades de q según (4.5), siendo $dq = \rho_e dv'$.

²Charles Augustin Coulomb (1736-1806). Ingeniero francés. Publicó su ley en 1785.

El flujo de la parte del campo debida a q_j en (4.4), a través de una superficie esférica S_j con centro \vec{r}_j , es

$$\int_{S_j} \vec{E}_j(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_j \int_{S_j} \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} dA = \frac{1}{\epsilon_0} q_j. \quad (4.6)$$

El teorema de Gauss hace válido este resultado para cualquier otra superficie que encierre a q_j , ya que la divergencia $\nabla \cdot \vec{E}_j$ resulta ser nula (salvo en \vec{r}_j , donde \vec{E}_j no está definida). Se sigue que el flujo del campo total \vec{E} a través de una superficie S es $\frac{1}{\epsilon_0} \sum q_j$, siendo $\sum q_j$ la carga encerrada por S ; en el caso de una distribución continua $\rho(\vec{r})$, que no da lugar a singularidades en \vec{E} y $\nabla \cdot \vec{E}$, se tiene, usando de nuevo el teorema de Gauss,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E} dv = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho dv \quad (4.7)$$

por lo que finalmente

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}. \quad (4.8)$$

La Ec.(4.8) es la primera de las ecuaciones de Maxwell, (4.2). Se tiene similarmente $\nabla \wedge \vec{E}_j = 0$ (salvo en \vec{r}_j , de nuevo), pero como ahora se tiene $\int_{S_j} \vec{E}_j \wedge d\vec{S} = 0$, ya que \vec{E}_j y $d\vec{S}$ son vectores paralelos. Por tanto, en virtud del segundo teorema de Gauss, ver página 7, tenemos $0 = \int_{S_j} \vec{E}_j \wedge d\vec{S}_j = \int_v \nabla \wedge \vec{E}_j dv$, por tanto resulta para una distribución $\rho(\vec{r})$,

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0. \quad (4.9)$$

Finalmente, de la Ec.(4.9) se deduce que el campo electrostático \vec{E} puede expresarse mediante una función potencial

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (4.10)$$

donde V es el potencial electrostático. Utilizando (4.8) tenemos:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0}. \quad (4.11)$$

Las descripciones (4.5), (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11) del campo electrostático \vec{E} son equivalentes. Aún así, la Ec. (4.8) es general, aplicable también a campos eléctricos no electrostáticos.

La ecuación (4.11) se denomina ecuación de Poisson³. En el caso $\rho_e = 0$, se denomina ecuación de Laplace⁴.

Aplicando el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea a la ecuación (4.10) tenemos

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_a^b \nabla V \cdot d\vec{l} = V(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_b) \quad (4.12)$$

Expresión muy útil para evaluar el potencial a partir del campo electrostático y que tiene una relación directa con el trabajo como analizamos en la siguiente sección. Introduciendo en

³ Siméon Denis Poisson, físico y matemático francés (1781-1840). Es importante señalar que la ecuación (4.8) tiene validez general, incluso cuando los campos dependan del tiempo.

Se inició precozmente; a los 18 años publicó una memoria de diferencias finitas. Destacó por sus descubrimientos en electricidad, geometría diferencial y la teoría de probabilidades.

⁴Ver nota 1 en pag. 6.

(4.12) el valor del campo \vec{E} según las expresiones (4.4) y (4.5) obtenemos para el potencial electrostático

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}, \quad \text{o bien} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.13)$$

Las fórmulas que contienen una distribución de carga *suave* $\rho_e(\vec{r})$ en vez de cargas puntuales describen macroscópicamente el campo \vec{E} y el potencial V eléctricos (ρ_e , \vec{E} y V son valores promediados sobre volúmenes *macroscópicamente* pequeños). Hay, sin embargo, gran variedad de problemas en Electroestática en que se trata a las cargas como puntuales. Por otra parte, en una descripción macroscópica se puede hablar, en ciertos problemas, de densidades de carga por unidad de área σ_e , y unidad de longitud λ_e .

La Ec.(4.7) se denomina **Ley de Gauss**

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho_e dv = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \quad (4.14)$$

donde Q_V es la carga contenida en el volumen V , aún cuando \vec{E} es el campo creado por **todas** las cargas tanto interiores como exteriores a S . En problemas con alta simetría, la ley de Gauss conduce a \vec{E} fácilmente si se escoge S apropiadamente.

4.3. Energía

4.3.1. Energía potencial electrostática

El trabajo que realiza la fuerza del campo electrostático para trasladar una carga q de un punto a hasta otro punto b es

$$\int_a^b \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \int_a^b \nabla V \cdot d\vec{l} = q [V(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_b)], \quad (4.15)$$

de lo que resulta que la energía electrostática de dicha partícula es $U_e = qV$,

4.3.2. Energía de un sistema de partículas cargadas

Por otra parte, en la ecuación de la energía potencial de un sistema de partículas, U_e es

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\text{pares}} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (4.16)$$

y la suma se extiende a todas las parejas $\{i, j\}$. Para una distribución continua de cargas, la energía potencial U_e se puede escribir en función del campo \vec{E} , partiendo de la expresión para cargas puntuales,

$$U_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_i \frac{1}{2} q_i \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right] = \sum_i \frac{1}{2} q_i V_{q_i}(\vec{r}_i), \quad (4.17)$$

donde se excluye en $V_{q_i}(\vec{r}_i)$ el campo creado por q_i ; el factor $1/2$ se debe a que la doble suma cuenta dos veces cada pareja (ver problema 4). Para una distribución continua se tiene $V_{q_i} = V$ y

$$U_e = \int_v \frac{1}{2} \rho_e(\vec{r}) V(\vec{r}) dv = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_v V \nabla^2 V dv = \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int_S V \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\rightarrow 0} + \int_v \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dv; \quad (4.18)$$

si V cubre todo el espacio se comprueba que la integral de superficie es nula para cualquier distribución de masas encerrada en un volumen finito. En la tercera igualdad de (4.18) hemos utilizado la relación

$$\nabla \cdot (g\vec{A}) = g\nabla \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \nabla g \quad (4.19)$$

identificando la función escalar con V y la vectorial con ∇V .

4.4. Similitudes con el campo gravitatorio

De la fuerza de Newton de una masa m_j en \vec{r}_j sobre otra masa m en \vec{r} ,

$$\vec{F}_G = -G \sum_j \frac{m_j m (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad (4.20)$$

se deducen fórmulas enteramente similares a las de la electrostática (basta el cambio $q \rightarrow m$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G$ siendo G la *constante de gravitación de Newton* (ver apéndice B) y $\rho_e \rightarrow \rho$, donde $\rho \equiv \delta m / \delta v$ es la densidad; en vez de \vec{E} y V escribimos \vec{f}_G y ψ_G): $\vec{F}_G = m\vec{f}_G$

$$\vec{f}_G(\vec{r}) = -G \sum_j m_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \quad \vec{f}_G(\vec{r}) = -G \int_v \rho(\vec{r}') dv' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (4.21)$$

$$\nabla \wedge \vec{f}_G = 0, \quad \nabla \cdot \vec{f}_G = -4\pi G \rho \quad (4.22)$$

$$\vec{f}_G = -\nabla \psi_G, \quad \nabla^2 \psi_G = 4\pi G \rho \quad (4.23)$$

$$U_G = m\psi_G, \quad \psi_G = -G \sum_j \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}, \quad \psi_G = -G \int_v \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.24)$$

ó bien

$$U_G = -G \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \int_v \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) dv \psi_G(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi G} \int_v f_G^2 dv, \quad (4.25)$$

donde la última integral se extiende a todo el espacio.

4.5. Diferencias entre campos electromagnéticos y gravitatorios

Si bien el concepto de campo se ha introducido formalmente en la Ec.(4.4) como otra manera de expresar la fuerza electrostática, conviene indicar que el campo tiene existencia física propia. Actualmente se descarta la existencia en la naturaleza de acciones a distancia de forma instantánea como parece indicar la ley de Coulomb o la ley de gravitación de Newton. Lo que sucede es que la partícula cargada actúa en su entorno inmediato produciendo un campo y este se propaga con velocidad finita hasta el entorno de la otra partícula cargada que detecta este campo. El campo es por tanto el mediador indispensable para que las partículas lejanas interactúen entre sí. Este efecto desaparece si suponemos que las partículas permanecen en reposo (marco de aplicación de la ley de Coulomb), es decir suponemos que el campo producido por las cargas ha tenido suficiente tiempo para viajar de unas cargas a otras. En este límite el campo aparece meramente como otra forma de expresar la fuerza entre cargas sin sentido físico adicional. Fue **Faraday** el primer científico que supuso realidad física al campo electromagnético.

Más allá de la semejanza matemática entre las ecuaciones (4.4) y (4.20) existen diferencias fundamentales entre los fenómenos electromagnéticos y los gravitatorios:

- Existe un campo magnético asociado al campo eléctrico, que como veremos en la sección 6.1, es consecuencia de la velocidad finita de propagación de los campos.
- Por otra parte, los campos gravitatorios tienen la propiedad fundamental de que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, con independencia de su masa. Esto hace que los campos gravitatorios, más allá de la Ley de Newton, se describan como fenómenos que afectan a la geometría espacio-tiempo dentro del marco de la *teoría de general de la relatividad*, que no se tratará en esta asignatura.
- La masa es positiva mientras que la carga eléctrica puede ser positiva o negativa.
- Existe gran diferencia entre las intensidades de las dos fuerzas. Comparamos los módulos de fuerza gravitatoria F_G y electrostática F_e entre dos protones separados una distancia D

$$\frac{F_G}{F_e} = 4\pi\epsilon_0 G \left(\frac{m_p}{e}\right)^2 \approx 8 \cdot 10^{-47} \quad (4.26)$$

Las constantes que aparecen en la Ec.(4.26) pueden encontrarse en el apéndice B. Nótese que la cantidad adimensional en (4.26), no depende del valor de la constante de gravitación de Newton ni de la constante eléctrica. El valor de dichas constantes está determinado por la definición de las unidades para m_p y e , de forma análoga a como la definición de K determina la constante de Boltzmann.

- Finalmente mencionar que en el marco de la física de partículas (modelo Standard) la carga de las partículas elementales está bien descrita matemáticamente. Todo lo contrario sucede con la masa de las partículas, ya que su descripción produce graves problemas matemáticos. Para solucionar esto se ha propuesto la existencia de una nueva partícula, el bosón de Higgs, que ha sido “detectada” el 4 de julio de 2012 en el *LHC* del **CERN** (ver *www.cern.ch*).

4.6. Electroestática de Conductores

Existen sistemas macroscópicos llamados conductores en los que hay cargas que pueden moverse con libertad en su *interior*; tales son los casos de metales líquidos o sólidos (cristales), que contienen electrones libres, y de sales disueltas en agua, que contienen iones. Un campo macroscópico y estacionario \vec{E} dentro de un conductor provoca un flujo de corriente, como se verá más adelante.

Consideremos conductores metálicos fijados en el espacio y cargados, o en presencia de cargas externas dadas. La energía electrostática *macroscópica*,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_e(\vec{r}) V(\vec{r}) dv, \quad (4.27)$$

depende, naturalmente, de la distribución macroscópica de carga en los conductores. Nótese que un conductor con carga neta nula puede tener una distribución de carga no idénticamente nula. Cualquier rearrreglo de carga en los conductores, por medio de una corriente macroscópica \vec{J} que no modifica las cargas netas, afecta a U_e y por tanto a la energía interna U del sistema, ya que $U + U_e = \text{cte}$ (conservación de la energía). En consecuencia, en el equilibrio termodinámico, que es la situación considerada en *Electroestática* de conductores, U_e debe ser mínima (recuérdese que la entropía es máxima cuando U es máxima: $\partial S / \partial U \equiv 1/T$ es positiva).

En el equilibrio termodinámico no puede haber corriente macroscópica \vec{J} . De la condición $\vec{J} = 0$ se sigue que, en Electroestática y dentro de un conductor, \vec{E} y $\rho_e = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ son nulos. Esto implica así mismo que el potencial electrostático en el interior del conductor es constante. En su superficie (S) puede existir una distribución de carga por unidad de área $\sigma_e(\vec{r})$, ya que los electrones no son libres para dejar el conductor, cuya carga neta es por tanto $\int_S \sigma_e(\vec{r}) dS$. Del uso local de las ecuaciones de la Electroestática se sigue que el campo eléctrico \vec{E} es normal a la superficie en su inmediato exterior y viene dado por $\vec{E} = \vec{n} \sigma_e / \epsilon_0$, siendo \vec{n} la normal exterior. La energía electrostática de un sistema de conductores toma una forma particularmente simple,

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_e(\vec{r}) V(\vec{r}) dv = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} V_{\alpha} \int_{S_{\alpha}} \sigma_e(\vec{r}) dS_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} V_{\alpha} Q_{\alpha}, \quad (4.28)$$

donde V , Q y S son potencial, carga y área, y la suma se extiende a los conductores del sistema.

El problema central de la Electroestática de conductores es determinar V fuera de éstos, conociendo, bien el potencial, bien la carga de cada uno; se puede demostrar que existe una solución única a este problema dada por la expresión explícita

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha} \int_{S_{\alpha}} \frac{\sigma_e(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.29)$$

que sin embargo, no es útil porque antes de resolver el problema no se conoce la función $\sigma_e(\vec{r})$ definida sobre las superficies de los conductores; por el contrario una vez hallado V en el exterior, se obtiene σ_e de la igualdad $\sigma_e = -\epsilon_0 \vec{n} \cdot \nabla V$.

La solución única para V se puede conseguir manteniendo las condiciones de contorno, es decir el potencial en la superficie geométrica de los conductores. De este modo se pueden

sustituir los conductores por distribuciones de cargas que mantengan las mismas condiciones en los lugares geométricos que ocupaban las superficies de los conductores. El resultado para el campo y el potencial coincidirá con el del problema original fuera de los conductores. Este procedimiento se llama *método de las imágenes* (ver problema 8).

Se comprueba que un conductor descargado, alejado de un sistema de conductores cargados, es siempre atraído por estos.

Se demuestra fácilmente que en una cavidad de un conductor (una región enteramente limitada por éste) que no contiene carga, se tiene $\vec{E} = 0$ y $V = \text{cte}$. Si la cavidad está limitada por dos conductores 1 y 2, a potenciales diferentes V_1 y V_2 , se tiene un “condensador”; de la ley de Gauss se sigue la relación $Q_2 = -Q_1$, siendo Q_1 y Q_2 las cargas en las superficies de 1 y 2 que limitan la cavidad interior. La energía del condensador vale por tanto

$$U_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 = \frac{1}{2}Q_1(V_1 - V_2). \quad (4.30)$$

Como la determinación de \vec{E} y V en la cavidad, fijados V_1 y V_2 , tiene solución única, Q_1 es una función de V_1 y V_2 , o más bien de su diferencia, ya que \vec{E} es independiente de la elección de origen de potencial. De la linealidad de las ecuaciones de la electrostática (ver por ejemplo la ec. 4.13) se deduce que Q_1 es una función lineal, $Q_1 = C(V_1 - V_2)$, donde C es la capacidad que sólo depende de la geometría de la cavidad. Se tiene por tanto

$$U_e = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} \quad (4.31)$$

y de la expresión $U_e = \int_{V(\text{cavidad})} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 dV$, se sigue que la capacidad C es positiva.

Los resultados anteriores apenas se modifican si, como es usual, la cavidad no está enteramente limitada por los conductores. Por otra parte conectando varios condensadores en serie, la capacidad del conjunto viene dada por

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_\alpha} \quad (4.32)$$

y en caso de conectarlos en paralelo tenemos

$$C = \sum C_\alpha \quad (4.33)$$

La unidad de capacidad es el faradio⁵ ($F \equiv CV^{-1}$). Para condensadores utilizados comúnmente en dispositivos en electrónicos, se utilizan submúltiplos desde pF hasta μF .

Para la capacidad de un solo conductor, considérese que el segundo conductor se sitúa en el infinito. Ver pregunta 11c en la sección de problemas.

⁵Michael Faraday (1791-1867). Químico y Físico británico. En 1831 descubrió el fenómeno de inducción magnética (ver sec. 8.3 en la página 52).

4.7. Electroestática de dieléctricos

Los medios no conductores llamados dieléctricos no contienen cargas libres por lo que en el interior de un dieléctrico puede existir un campo electrostático macroscópico. Aproximaremos el dieléctrico como un conjunto de cargas puntuales, los electrones y protones que contiene, por lo que como cuestión previa a la determinación del campo creado por un dieléctrico dentro y fuera de él, consideremos el potencial $V(\vec{r})$ de un sistema de cargas puntuales $\{q_j\}$, con carga neta $\sum q_j = 0$, contenidas en una región de un tamaño característico R . Lejos de dicha región, es decir, para puntos C de ella donde $|\vec{r} - \vec{r}_c| \gg R$, se tiene

$$V(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|} \simeq \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} \left[1 + \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_c) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^2} + \dots \right] \quad (4.34)$$

o bien

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} + \sum_j \frac{q_j(\vec{r}_j - \vec{r}_c)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{|\vec{r} - \vec{r}_c|^3} \quad (4.35)$$

es decir

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} + \vec{p} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|^3} \quad (4.36)$$

donde $\vec{p} \equiv \sum q_j(\vec{r}_j - \vec{r}_c)$ es el *momento dipolar eléctrico* respecto del punto \vec{r}_c . Finalmente tenemos

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} - \vec{p} \cdot \nabla \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_c|} \right] + \dots \quad (4.37)$$

Para un sistema de cargas con carga neta nula, $\sum q_j = 0$, el término dominante es el del dipolo, a además, el vector \vec{p} no depende de \vec{r}_c siendo $\vec{p} = \sum q_j \vec{r}_j$. El momento dipolar eléctrico de un par de cargas $q(> 0)$ y $-q$ es simplemente

$$\vec{p} = q(\vec{r}_{+q} - \vec{r}_{-q}) = q\vec{a}, \quad (4.38)$$

siendo \vec{a} el vector que parte de la carga negativa y tiene su extremo en la carga positiva. En la aproximación considerada $|\vec{r}_j - \vec{r}_c| \ll |\vec{r} - \vec{r}_c|$, por tanto \vec{r}_c puede situarse en el punto medio de las dos cargas del dipolo. En este caso el segundo sumando de la Ec.(4.40) proporciona el campo de un dipolo para puntos alejados de este.

Analicemos ahora el potencial creado por un elemento macroscópico de volumen δv_α de un dieléctrico formado por moléculas neutras,

$$V(\vec{r}) = \sum_\alpha \delta V_\alpha(\vec{r}). \quad (4.39)$$

Tenemos pues de (4.37):

$$\delta V_\alpha(\vec{r}) \simeq - \sum_s \vec{p}_s \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_{cs}|} \right) \quad (4.40)$$

donde el subíndice s recorre todas las moléculas (número enorme) del elemento del volumen δv_α . Nótese que el primer término de (4.37) no aparece en por ser neutras la moléculas del dieléctrico. El vector \vec{p}_s es el dipolo de la molécula s . Para puntos del interior del dieléctrico

el uso de la aproximación (4.37) ignora las variaciones rápidas de potencial en las proximidades de cada molécula, lo que es permisible para calcular un campo promediado, campo macroscópico. Por otra parte, como δv_α contiene un gran número de moléculas, se puede esperar que, al igual que ρ_e , o la densidad másica usual, el vector polarización definido como sigue

$$\vec{P}(\vec{r}_\alpha) \equiv \frac{\sum_s \vec{P}_s}{\delta v_\alpha} \quad (4.41)$$

varíe suavemente de un elemento a otro. Se tiene entonces ($\vec{r}_{cs} \simeq \vec{r}_\alpha$)

$$\delta V_\alpha(\vec{r}) \simeq -\delta v_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha) \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_\alpha|}, \quad (4.42)$$

por lo que el potencial debido a todo el dieléctrico será

$$V(\vec{r}) \simeq - \sum_\alpha \delta v_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha) \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_\alpha|} \quad (4.43)$$

o bien en forma integral

$$V(\vec{r}) \simeq - \int_v \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (4.44)$$

donde v es cualquier volumen que encierre al dieléctrico. Utilizando la notación $\nabla' \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z'}$ tenemos $\nabla(1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = -\nabla'(1/|\vec{r} - \vec{r}'|)$. La identidad

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (4.45)$$

nos permite sustituir el integrando en (4.44) y utilizar el teorema de Gauss para obtener

$$V(\vec{r}) = \int_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_v \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad (4.46)$$

Los resultados generales de la Electroestática muestran que el segundo sumando de la Ec.(4.46) es la solución de la ecuación

$$\nabla^2 V = \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}, \quad \text{o bien} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}. \quad (4.47)$$

Existe por tanto una densidad macroscópica de carga *real*, debida a la polarización del dieléctrico, $\rho_{ep} \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$. El mismo argumento indica que en cada punto de la superficie de un dieléctrico hay una densidad de carga $\sigma_{ep} \equiv \vec{P} \cdot \vec{n}$, donde \vec{P} es la polarización en el punto (interior a su superficie) y \vec{n} es la normal exterior en él. Además de la carga de polarización pueden existir cargas libres (por ejemplo en la superficie de conductores) con densidad ρ_e^* ; se tiene entonces

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P} + \rho_e^*}{\epsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0, \quad (4.48)$$

donde $-\nabla \cdot \vec{P} + \rho_e^*$ es la densidad total. Usualmente se define el vector *desplazamiento eléctrico*, designado por \vec{D} como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (4.49)$$

La motivación de la definición se debe a que su divergencia depende tan sólo de las cargas libres como se sigue de (4.48)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e^* \quad (4.50)$$

Usualmente, un campo macroscópico (promediado) \vec{E} es muy pequeño comparado con el campo (microscópico) que actúa sobre una carga en una molécula, debido a las cargas vecinas. Desarrollando $\vec{P}(\vec{E})$ en potencias de \vec{E} , bastará retener el primer término no nulo:

$$\vec{P}(\vec{E}) = (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 \vec{E} + \dots \quad (4.51)$$

La constante de proporcionalidad, se ha escrito $\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) > 0$, donde ε_r es adimensional y se denomina *constante dieléctrica* o *permitividad relativa* del material. Así mismo se define la *susceptibilidad eléctrica* del dieléctrico como la cantidad adimensional $\chi_e = \varepsilon_r - 1$.

La Ec. (4.51) puede ponerse en términos del vector desplazamiento \vec{D}

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} + \dots \quad (4.52)$$

En las Ecs.(4.51, 4.52) no hay término independiente del campo \vec{E} (salvo en los cristales llamados piezoeléctricos), bien porque las moléculas carezcan de dipolo en ausencia de campo, bien porque teniendo cada molécula un dipolo permanente, la agitación térmica conduzca en ausencia de campo a un valor nulo de la suma $\sum \vec{p}_s \equiv \delta V_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha)$ extendida a un número elevado de moléculas. El término dominante es por tanto el proporcional a \vec{E} ; Introduciendo las aproximaciones (4.51) y (4.52) en (4.48) resulta

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho_e^*}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0. \quad (4.53)$$

o bien

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e^*, \quad \nabla \wedge \vec{E} = 0. \quad (4.54)$$

Si hay una σ_e^* en la superficie de un conductor, hay una $\sigma_{ep} = -\sigma_e^*(\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r$ en el dieléctrico adyacente. Aplicando el teorema de Gauss, a la primera ecuación 4.54 tenemos la *Ley de Gauss* para dieléctricos, análoga a la ec. (4.14),

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho_e^* dv. \quad (4.55)$$

Puede que el espacio entre conductores (donde existe campo eléctrico) se encuentre lleno de un único dieléctrico de constante uniforme ε_r . Se tiene entonces $\nabla \wedge (\varepsilon_r \vec{E}) = \varepsilon_r \nabla \wedge \vec{E} = 0$; *para cargas dadas, en conductores de geometría dada*, el campo $\varepsilon_r \vec{E}$ en presencia de dieléctrico resulta igual al campo \vec{E} en su ausencia. Como se tiene $\varepsilon_r > 1$, el dieléctrico disminuye el campo eléctrico. Una consecuencia de esto es que un dieléctrico aumenta la capacidad de un condensador en un factor ε_r .

4.8. Energía almacenada en un condensador

La energía almacenada en un condensador es trabajo necesario para cargar dicho condensador

$$U_c = \int_0^Q V' dQ' = \int_0^Q \frac{Q' dQ'}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} V^2 C; \quad (4.56)$$

Esa energía es mayor que la puramente electrostática U_e dada por la Ec.(4.18), es decir

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \rho_e(\vec{r}) V(\vec{r}) dv \quad (4.57)$$

siendo ρ_e la densidad de carga eléctrica. Para el caso de un material dieléctrico, $\rho_e = \rho + \rho_p$, siendo ρ la densidad de carga libre o de conducción mientras que ρ_p es la densidad de carga de polarización del dieléctrico. Tenemos por tanto:

$$\rho_e = \rho + \rho_p = \nabla \cdot \vec{D} - \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot (\vec{D} - \vec{P}) \quad (4.58)$$

Introduciendo esto en la integral (4.57) tenemos

$$U_e = \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (\vec{D} - \vec{P}) V(\vec{r}) dv \quad (4.59)$$

Por lo que utilizando la relación (4.19), como ya hicimos para la Ec.(4.18), y teniendo en cuenta que

$$U_e = \frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 dv; \quad (4.60)$$

llegamos finalmente la siguiente ecuación para las distintas energías del condensador:

$$\underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \int_v E^2 dv}_{U_e} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_v \vec{D} \cdot \vec{E} dv}_{U_c} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_v \vec{P} \cdot \vec{E} dv}_{U_p} \quad (4.61)$$

es decir, $U_c = U_e + U_p$ donde U_p es una energía debido al vector de polarización del material dieléctrico, que naturalmente está ausente en el vacío. Tenemos por tanto que la energía U_c almacenada en el condensador con dieléctrico es suma de la energía puramente electrostática U_e más la energía U_p , almacenada al crear los dipolos en las moléculas del dieléctrico.

CAPÍTULO 5

Problemas propuestos

1. Siendo \vec{F}_e la fuerza electrostática que N cargas puntuales q_j situadas en \vec{r}_j ejercen sobre una carga unidad situada en \vec{r} , demostrar:

a) $\nabla \wedge \vec{F}_e = 0$ para $\vec{r} \neq \vec{r}_j$.

b) $\nabla \cdot \vec{F}_e = 0$ para $\vec{r} \neq \vec{r}_j$.

c) El flujo de \vec{F}_e a través de una superficie cerrada que contenga a las N cargas, es $\frac{\sum q_j}{\epsilon_0}$

d) Para una distribución continua de carga, $\nabla \cdot \vec{F}_e = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$

2. Se tienen las siguientes distribuciones de carga:

a) Distribución con densidad superficial de carga σ en el plano $z = a$.

b) Distribución con densidad superficial de carga σ en el interior del círculo de radio R , con centro el origen de coordenadas y situado en $z = 0$.

Se pide:

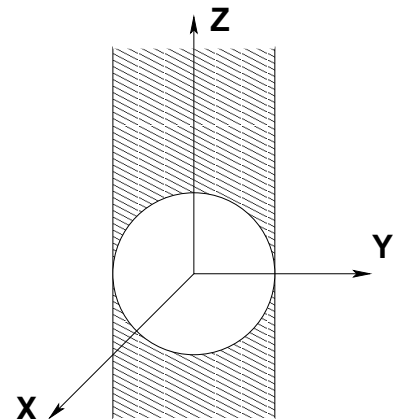
a) Valor del campo eléctrico en los puntos del eje z .

b) Trabajo que hay que realizar para mover la carga q desde el punto $(O, O, -b)$ al punto (O, O, b) , (se sabe que $b > a$).

3. Dada la distribución de carga de densidad ρ_0 constante en los puntos del cilindro infinito de eje Z y radio R , excepto en los puntos de la esfera de radio R y centro O , calcular:

a) Valor del campo eléctrico en las distintas regiones del espacio.

b) Trabajo del campo para trasladar la carga q del punto (O, a, O) a (O, b, O) , sabiendo que $b > a > R$.



4. a) Sean tres cargas q , $2q$ y $3q$ en (O, O, a) , (O, a, O) y (a, O, O) respectivamente. Hallar la energía U_e usando

$$U_e = \sum_{\text{parejas}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \sum_{\text{cargas}} \frac{1}{2} q_i V_{q_i}(\mathbf{r}_i). \quad (1)$$

Comprobar que la expresión

$$\int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv. \quad (2)$$

diverge (no se usa para cargas puntuales); (1) excluye, [(2) incluye] el potencial de q_o en \mathbf{r}_i .

- b) Sea una superficie esférica con centro el origen, radio R y densidad superficial $\sigma = \sigma_o$, uniforme. Hallar la energía U_e usando

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv \quad \text{y} \quad U_e = \int \frac{1}{2} V dq = \int \frac{1}{2} V \sigma dA$$

y comprobar que son iguales.

- c) Sea una esfera con centro el origen, radio R , densidad volumétrica $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ ($O < r < R$). Hallar la energía U_e usando

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv \quad \text{y} \quad U_e = \sum_{\text{pareja}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

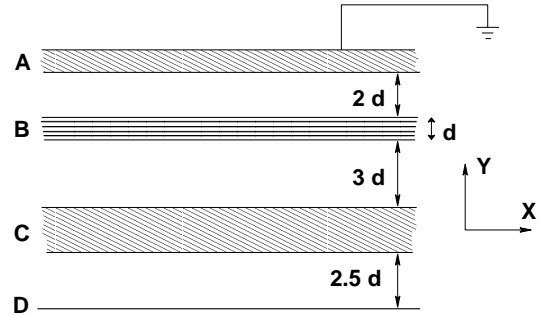
mediante el *montaje* del sistema paso a paso: si $U(Q')$ es la energía cuando se ha alcanzado la carga $Q' < Q$ (Q carga total)

$$U(Q' + \partial Q') = U(Q') + \partial Q' V(Q').$$

Comprobar que el resultado es igual al de (3).

5. Se tiene una distribución de carga de densidad ρ_0 entre las esferas de centro $O(0, 0, 0)$ y radios $R/2$ y R y dos cargas Q_1 y Q_2 situadas respectivamente en $O(0, 0, 0)$ y $O'(0, 0, R)$. Calcular la energía electrostática del sistema de cargas.

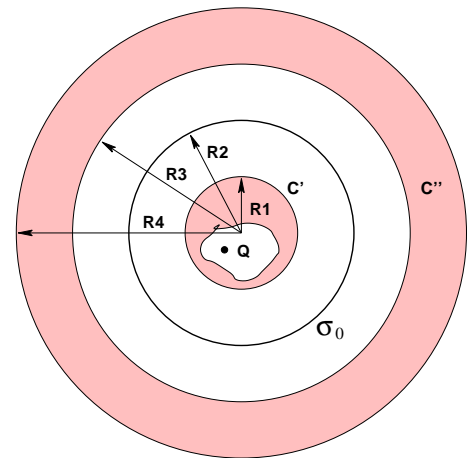
6. Se tienen los conductores y distribuciones de cargas de la figura; A y C son dos conductores planos, infinitos y paralelos estando el A conectado a tierra (potencial nulo); B es una distribución uniforme de densidad volumétrica de carga ρ_0 y espesor d ; D es una distribución uniforme de densidad superficial $\sigma = \rho_0 d$. Se pide:



- a) Potencial de C .
- b) Distribución superficial de carga en las cuatro caras de los conductores A y C .

NOTA: Se sabe que el potencial en $y \rightarrow \pm\infty$ es nulo.

7. Un conductor esférico C' de radio R_1 y carga neta $2Q$, tiene un agujero con una carga puntual Q ; C' está rodeado por una distribución esférica de carga σ_0 concéntrica, de radio R_2 y carga total $-Q$. Otro conductor C'' en forma de cáscara esférica concéntrica, de radios R_3 y R_4 y carga neta nula se trae desde el infinito hasta alcanzar la disposición de la figura. Se pide:

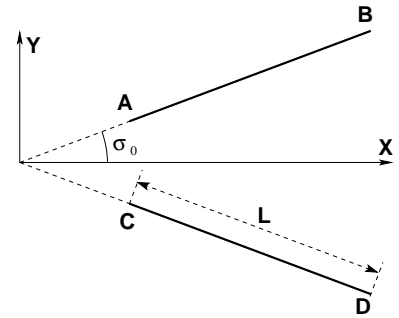


- a) El potencial en C' y C'' .
 - b) El trabajo de las fuerzas que hay que aplicar para que el conductor C'' alcance la disposición indicada.
8. a) Una esfera conductora de radio R , está en presencia de una carga puntual q_0 situada a una distancia a de su centro. Se sabe que en estas circunstancias y supuesta la esfera con potencial nulo, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es igual al producido conjuntamente por la carga q_0 y por otra carga q' situada a la distancia a' del centro (Método de las imágenes). Determinar:
- 1) Valores de a' y q' .
 - 2) Carga total de la esfera.
 - 3) Fuerza entre la carga y la esfera.
- b) Supuesta la esfera aislada con carga neta Q , determinar:
- 1) La carga/s imagen/es.
 - 2) Potencial de la esfera.
 - 3) Fuerza entre la carga y la esfera.
9. En el seno de un campo eléctrico inicialmente uniforme ($\mathbf{E} = E_0\mathbf{k}$) se introduce una esfera conductora descargada de radio R con su centro en el origen de coordenadas, se pide:

- a) Campo eléctrico resultante.
 b) Densidad superficial de carga sobre el conductor.

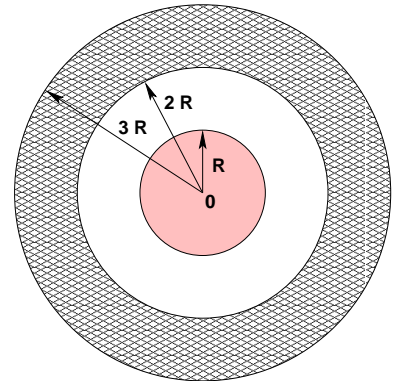
NOTA: Ensáyese un potencial eléctrico de la forma $V = az + b\frac{z}{r^3}$, determinando las constantes a y b para que lejos de la esfera el campo tienda al campo inicial y para que la superficie de la esfera sea equipotencial.

10. Un condensador está formado por dos placas cuadradas de lado L , de modo que los lados contiguos al lado AB y al CD (ver figura) son perpendiculares al papel. Hallar la capacidad si el ángulo entre placas es $2\alpha_0$ (α_0 pequeño) y $AC = 2h$. Comprobar que si A y C están fijos y $\alpha_0 \rightarrow 0$, se recupera la capacidad de un condensador de placas paralelas.
 NOTA: Ensáyese la expresión $V = a + b(\arctan \frac{y}{x})$ (a y b constantes) para el potencial en el espacio entre placas.



11. Se tiene un conductor esférico de radio R , centro O y carga Q , rodeado por una cáscara de dieléctrico de centro O y radios $2R$ y $3R$ cuya constante dieléctrica es $\epsilon_r = 1 + \alpha r$ siendo r la distancia al punto O ; se pide:

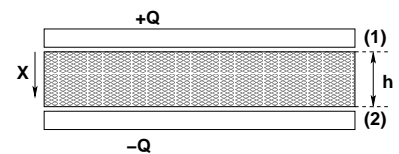
- a) Campo eléctrico en el dieléctrico.
 b) Carga de polarización en el dieléctrico.
 c) Capacidad del sistema. Ver página 21.



12. Se tiene un semiespacio conductor ($y < 0$) conectado a tierra ($V = 0$). El semiespacio $y > 0$ está ocupado por un dieléctrico de constante ϵ_r . En el punto $\mathbf{r} = a\mathbf{j}$ existe una carga puntual de valor q . Determinar, por el método de las imágenes, la densidad de carga en el dieléctrico.

13. Un condensador plano de área S y distancia entre placas h , tiene una carga Q . Entre sus placas existe un dieléctrico de constante $\epsilon_r(x)$ tal que vale ϵ_{r1} en las proximidades de la placa (1) y ϵ_{r2} en las de la placa (2). Se pide:

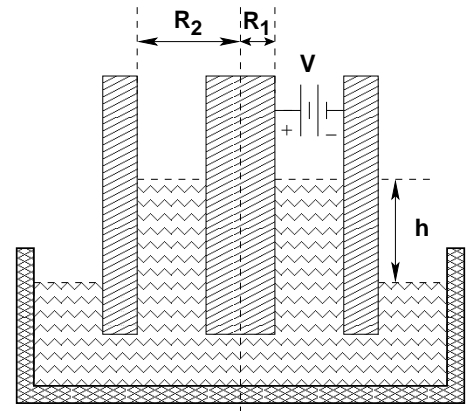
- a) Hallar $\rho_{\text{pol}}(x)$ en función de ϵ_r y $\frac{d\epsilon_r}{dx}$.
 b) Carga de polarización en el interior del dieléctrico.
 c) Carga de polarización en las superficies del dieléctrico.
 d) Supuesto $\epsilon_r(x)$ lineal con x , hallar la capacidad del condensador.



14. Dos superficies cilíndricas conductoras coaxiales de gran longitud y radios R_1 y R_2 se sumergen verticalmente en un líquido dieléctrico. Al establecer una diferencia de potencial, V , entre los conductores, el líquido sube una altura h . Demostrar que la constante dieléctrica del líquido ϵ_r vale:

$$\epsilon_r = 1 + \frac{(R_2^2 - R_1^2)\rho gh}{\epsilon_0 V^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

siendo ρ la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad.



15. Dos émbolos conductores, que forman las armaduras de un condensador plano con carga Q_0 , pueden deslizarse sin rozamiento en un cilindro de radio r . En el cilindro hay n moles de un gas ideal de masa molar μ a la temperatura T_0 , cuya constante dieléctrica varía con la densidad ρ de la forma $\epsilon_r = 1 + \alpha\rho$. Émbolos y cilindro son adiabáticos. Se pide:

- El valor de la separación entre émbolos, h , para que exista equilibrio.
- Densidad de carga de polarización.
- Presión del gas.

Tómese: $Q_0^2 = \frac{8RT_0\epsilon_0\pi^2 r^4}{3\alpha\mu}$, $h \ll r$.

6.1. Ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo

Para el caso de cargas en movimiento hemos de describir la fuerza mediante una ley de interacción carga-campo y no carga-carga como es el caso de la ley de Coulomb o de Newton. Esto es debido a que la acción entre carga y campo en las proximidades de la misma es inmediata, no necesitamos pues, tener en cuenta el tiempo de propagación del campo desde unas cargas a otras, lejos de las primeras. Por otra parte la carga *detecta* el campo en sus proximidades, con independencia de la fuente que lo origina.

La determinación de las ecuaciones para los campos \vec{E} y \vec{B} fue un objetivo permanente durante años. En 1873 **Maxwell**¹ publicó su célebre tratado donde sintetizó de forma magistral, en cuatro ecuaciones todas las leyes anteriores, que hoy se extraen de ellas. Las cuatro ecuaciones de Maxwell en forma diferencial son:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (6.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}, \quad (6.2)$$

donde J está dado por la siguiente definición

Definición 6.1.1 (Densidad de corriente eléctrica)

$$\vec{J} \equiv \sum_{\delta v} \frac{q_j \vec{v}_j}{\delta v} \quad (6.3)$$

y se ha utilizado la siguiente notación

$$\mu_0 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ m kg } C^{-2}. \quad (6.4)$$

¹James Clerk Maxwell. Físico y matemático inglés (1831-1879). Profesor en distintas universidades. Organizó el prestigioso Laboratorio de Cavendish.

La constante μ_0 se denomina *constante magnética*². Las Ec.(9.1) se llaman, en ocasiones *primer par de ecuaciones de Maxwell* y la Ec.(9.2) forman el *segundo par de ecuaciones de Maxwell*. Las Ec.(9.1, 9.2) representan el triunfo de la acción próxima frente a la antigua idea acción a distancia.

El lector debe comprobar que la constante c en (9.2) tienen dimensiones de velocidad. Como se verá en la sección 9.1 c es la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío; velocidad de la luz. Su valor es por definición $c \equiv 299\,792\,458\text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$, que junto con la definición de segundo determinan el valor de metro (ver sección A.1).

Es interesante señalar las consecuencias de una velocidad c infinita. Si hacemos $v/c \rightarrow 0$ en (9.2) tenemos:

- $\nabla \cdot \vec{B} = 0, \nabla \wedge \vec{B} = 0$, por lo que por analogía con la electrostática nos lleva a $\vec{B} = 0$.
- El electromagnetismo se reduciría a la electrostática misma $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e/\epsilon_0, \nabla \wedge \vec{E} = 0$.

Así mismo la fuerza de Lorentz, en el límite sería $\vec{F} = q\vec{E}$ igual que la fuerza de Coulomb. En este límite desaparecería la dependencia en \vec{v} en la fuerza (6.7). En definitiva el campo \vec{B} y la dependencia $F(\vec{v})$ en (6.7) son consecuencia de que c tiene un valor finito.

El término $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ de la cuarta ecuación es introducido por Maxwell motivado por la idea de conservación de la carga eléctrica como seguidamente se explica.

6.1.1. Ley de conservación local de la carga

Definición 6.1.2 (Intensidad de corriente eléctrica I) Se llama intensidad de corriente eléctrica al flujo de \vec{J} a través de una superficie S , $I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$. Su unidad, el Amperio, es una de las siete unidades fundamentales del SI, según la definición de la sección A.1.

Aplicando la divergencia a la segunda ecuación (9.2) y utilizando luego la primera tenemos

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (6.5)$$

o bien en forma integral

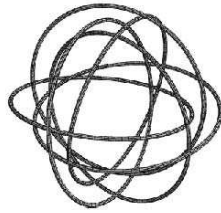
$$\frac{d}{dt} \int_v \rho_e dv = - \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (6.6)$$

que expresa la ley de conservación local de la carga: si la carga contenida en un volumen v cambia de Q a $Q + \Delta Q$ en un intervalo de tiempo Δt , una cantidad ΔQ ha atravesado la superficie S , frontera de v con el exterior, en el tiempo Δt . Como sabemos, la primera ec. (9.2) indica que las líneas de campo electrostático nacen y mueren en las cargas eléctricas. La ecuación análoga para la inducción magnética \vec{B} , es la primera ecuación (9.1); la divergencia de \vec{B} es nula, es decir, \vec{B} es *solenoidal* y las líneas de campo ni nacen y ni mueren. Esto indica que el flujo magnético a través de una superficie cerrada es nulo y las líneas del campo \vec{B} pueden cerradas. La figura 6.1 muestra un caso en el que las líneas cerradas del campo \vec{B} están entrelazadas³. Si bien está muy extendida la idea de que las líneas de \vec{B} han de ser necesariamente cerradas, esto no es cierto en general. Actualmente se han encontrado ejemplos sencillos donde las líneas de campo no son cerradas.⁴

²Antes llamada permeabilidad magnética de vacío.

³ FUENTE: Metastable plasma structures in knotted magnetic fields. José M. Donoso. *Annales de la Fondation Louis de Broglie*, **33** no 1-2, pp. 69-84, (2008)

⁴Para una descripción más detallada puede verse: Campos magnéticos caóticos creados por cables de corriente continua. J. Aguirre y D. Peralta-Salas. *Revista Iberoamericana de Física*. **7** pp. 20-25, (2011)

Figura 6.1: Líneas de inducción magnéticas entrelazadas³

6.2. Fuerza de Lorentz

La interacción de los campos electromagnéticos con la materia es descrita por la fuerza de **Lorentz**.⁵ Es la fuerza ejercida sobre una carga q por los campos electromagnéticos en su proximidad

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}] \quad (6.7)$$

la fuerza depende de la posición y la velocidad de q y queda determinada por los campos, \vec{E} (eléctrico) y \vec{B} (inducción magnética), que pueden variar con el tiempo.

Como hemos visto en la asignatura de Física I, según el Principio de Relatividad de Galileo (PRG) las leyes de la naturaleza son iguales para todo sistemas inercial y en consecuencia las fuerzas no pueden depender de \vec{v} , a lo sumo dependerán de $\vec{v} - \vec{v}_o$, siendo \vec{v}_o la velocidad del sistema de coordenadas inercial, relativa a otro sistema inercial respecto al cuál se determinó \vec{v} (invarianza en tránsito). Claramente la fuerza de Lorentz contradice el PRG. En este sentido la ecuación (6.7) marca el inicio de una nueva física; la Física Relativista.

6.2.1. Fuerza y momento de un campo magnético sobre un conductor

Consideramos el efecto de la fuerza de Lorentz (6.7) sobre un elemento de volumen δv con densidad de corriente \vec{J} , en ausencia de \vec{E}

$$\delta \vec{F} = \sum q_j \vec{v}_j \wedge \vec{B}(\vec{r}_j) \simeq (\sum q_j \vec{v}_j) \wedge \vec{B}(\vec{r}) \simeq \vec{J} \delta v \wedge \vec{B}. \quad (6.8)$$

Si se trata de un hilo conductor, (6.8) puede expresarse así

$$\delta \vec{F} = I \delta \vec{l} \wedge \vec{B}. \quad (6.9)$$

siendo $\delta \vec{l}$ un elemento de longitud del hilo. Para un tramo de hilo desde el punto a hasta el punto b , la fuerza ejercida por el campo magnético será pues

$$\vec{F} = -I \int_a^b \vec{B} \wedge d\vec{l}, \quad (6.10)$$

y el momento mecánico ejercido por dicho campo será

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_a^b \vec{r}' \wedge (I d\vec{r}' \wedge \vec{B}) \quad (6.11)$$

⁵Antoon Hendrik Lorentz, físico holandés (1853-1928). Catedrático de física en la universidad de Leiden.

o bien para un circuito cerrado tenemos

$$\vec{F} = -I \oint \vec{B} \wedge d\vec{l}. \quad (6.12)$$

y

$$\vec{\mathcal{M}} = \oint \vec{r}' \wedge (I d\vec{r}' \wedge \vec{B}) \quad (6.13)$$

6.2.2. Tipos de problemas de electromagnetismo

El estudio de las ecuaciones de Maxwell, que determinan \vec{E} y \vec{B} en términos de ρ_e y \vec{J} , junto con la aplicación de la fuerza de Lorentz (6.7) a cada partícula con carga q_j y masa m_j

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = q_j [\vec{E}(\vec{r}_j, t) + \vec{v}_j \wedge \vec{B}(\vec{r}_j, t)], \quad (6.14)$$

que determinan el movimiento de cada carga q_j (y por tanto ρ_e y \vec{J}) en términos de \vec{E} y \vec{B} , constituyen la electrodinámica clásica. Existen problemas parciales, como seguidamente se explica que admiten algún tipo de aproximación que simplifica el estudio de la cinco ecuaciones (9.1, 9.2, 6.14).

Hay situaciones en que unas cargas, las que contribuyen predominantemente a los valores de ρ_e y \vec{J} , y por tanto a generar los campos \vec{E} y \vec{B} , tienen movimiento conocido. Esto permitiría en principio resolver las Ecs. (9.1) y (9.2) y hallar \vec{E} y \vec{B} a partir de ρ_e y \vec{J} y de las condiciones de contorno, de forma independiente de la (6.14). Posteriormente se trataría la Ec. (6.14) para las cargas que apenas afectan a los valores de \vec{E} y de \vec{B} donde ya se conoce el lado derecho de (6.14).

Conocidos $\rho_e(\vec{r}, t)$ y $\vec{J}(\vec{r}, t)$ hallar \vec{E} y \vec{B} , es particularmente sencillo en ciertos casos:

1. Si las cargas están en reposo se tiene $\vec{J} = 0$, y se crean campos estacionarios, $\partial\vec{E}/\partial t = 0$, $\partial\vec{B}/\partial t = 0$, por lo que se recobran las ecuaciones (4.9) y (4.8) de la electrostática: $\nabla \wedge \vec{E} = 0$, $\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e/\epsilon_0$ y para el campo \vec{B} tenemos $\nabla \wedge \vec{B} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$.
2. En las condiciones $\rho_e = 0$, y $\vec{J} \neq 0$ e independiente del tiempo, se tiene $\partial\vec{B}/\partial t = 0$, $\vec{E} = 0$, y por tanto

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (6.15)$$

y

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (6.16)$$

Las Ecs.(6.15, 6.16) son la ecuaciones de la Magnetostática y definen campos magnéticos independientes del tiempo que serán estudiadas en la siguiente sección.

De (6.16) y de (1.7) se sigue que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$.

6.3. Magnetostática

Las Ecs.(6.15, 6.16) guarda una cierta simetría con la Electroestática. De un modo semejante a la introducción del potencial (escalar) V , se introduce ahora el potencial vector $\vec{\mathcal{A}}$; se busca un campo vectorial $\vec{\mathcal{A}}$ que cumpla la ecuación

$$\nabla \wedge \vec{\mathcal{A}} = \vec{B}. \quad (6.17)$$

De (6.17) resulta, como (6.15) exigía,

$$\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{A}) = 0 \quad (6.18)$$

para todo campo \vec{A} . Aplicando el rotacional a (6.17) y utilizando (6.16) tenemos

$$-\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{A}) \equiv -\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad (6.19)$$

ecuación que determina $\vec{A}(\vec{r})$ dado $\vec{J}(\vec{r})$. Supongamos que se conoce \vec{A} y que se tiene $\nabla \cdot \vec{A} = 0$; resulta entonces

$$\nabla^2 \mathcal{A}_x = -\mu_0 J_x, \quad \nabla^2 \mathcal{A}_y = -\mu_0 J_y, \quad \nabla^2 \mathcal{A}_z = -\mu_0 J_z \quad (6.20)$$

o en forma vectorial

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (6.21)$$

De (6.16) se tiene $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ por lo que $\nabla \cdot \vec{A}$ obedecería la ecuación $\nabla \cdot (\nabla^2 \vec{A}) = \nabla^2(\nabla \cdot \vec{A}) = 0$, cuya solución es $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, como se supuso. Por otra parte, por analogía con la Electroestática, comparando la ecuación (6.21) con le Ec. (4.11) cuya solución está dada por la Ec. (4.13) se obtiene inmediatamente

$$\mathcal{A}_x(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_x(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \mathcal{A}_y(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_y(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \mathcal{A}_z(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{J_z(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.22)$$

o bien en forma vectorial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.23)$$

El campo inducción magnética \vec{B} toma finalmente la forma

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \wedge \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.24)$$

y calculando el rotacional tenemos finalmente la ley de **Biot-Savart**⁶

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \vec{J}(\vec{r}') \wedge \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv', \quad (6.25)$$

que es por tanto la solución de la Magnetostática para corrientes dadas. Para una intensidad de corriente I por un hilo sobre una curva Γ las integrales de volumen (6.23) y (6.25) para los vectores \vec{S} y \vec{B} quedan reducida a las siguientes integrales de línea a lo largo del hilo

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.26)$$

y

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \wedge d\vec{r}'. \quad (6.27)$$

Usualmente las Ecs.(6.23, 6.25, 6.26, 6.27) son difíciles de integrar para obtener los vectores \vec{S} o \vec{B} . Análogamente a ley de Gauss ya vista, existe en magnetostática una ley que, para

⁶Baptiste Jean Biot (1774-1862) y Felix Savart (1791-1841) físicos franceses. Profesores en el Collège de France.

casos de simetría adecuada, permite calcular el campo \vec{B} sin utilizar explícitamente la ley de Biot-Savart. En efecto, integrando la ecuación (6.16) sobre cualquier superficie abierta S , apoyada en una curva cerrada Γ , se obtiene

$$\int_S \nabla \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (6.28)$$

y usando el teorema de Stokes, se obtiene la ley de *Ampere*⁷

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Gamma} \quad (6.29)$$

donde I_{Γ} es la intensidad de corriente encerrada por Γ (los sentidos de circulación y normal a $d\vec{S}$ se asocian como en un triedro a derechas).

6.3.1. Definición de amperio

Utilizando la ley de Ampere se obtiene fácilmente el campo de inducción magnética creado por un hilo recto infinito, y con la ecuación (6.10) tenemos la fuerza por unidad de longitud que se produce entre dos conductores infinitos y paralelos por los que circula una intensidad I :

$$F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi D} \quad (6.30)$$

donde D es la distancia que separa ambos conductores.

La ecuación (6.30) es la que se tiene en cuenta, junto con la definición de amperio (página 73) para fijar de forma exacta el valor numérico de $\mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{NA}^{-2}$. Dado que también c está definida de forma exacta, tenemos la expresión exacta para $\epsilon_0 \equiv 1/(\mu_0 c^2)$.

6.4. Magnetostática de materiales

En un punto alejado de una distribución de corriente estacionaria ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$), *localizada* en torno a \vec{r}_c , el potencial vector vale

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq -\vec{m} \wedge \nabla \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \quad (6.31)$$

siendo \vec{m} el momento dipolar magnético. Para una espira plana se tiene $\vec{m} = I\vec{n} \times (\text{área de la espira})$ donde \vec{n} es aquella normal a la espira que forma un triedro a derechas con la intensidad I .

Para un cuerpo macroscópico se define el vector magnetización, $\vec{M}_{\alpha} \equiv \sum_s \vec{m}_s / \delta V_{\alpha}$, donde \vec{m}_s es el momento dipolar del átomo s en δV_{α} . El potencial vector de todo el cuerpo se sigue de un desarrollo similar al expuesto para dieléctricos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow - \int_v \vec{M}(\vec{r}') \wedge \nabla \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (6.32)$$

⁷En honor a André Marie Ampere (1775-1836). Fue profesor en la Escuela Politécnica de París e inspector general de las universidades francesas. Matemático precoz, (a los trece años escribió un tratado sobre secciones cónicas). Notable experimentador en el campo del electromagnetismo. En 1814 formula la hipótesis de Avogadro (formulada por este tres años antes sin que Ampere lo supiera (ver página ??)). Introduce gran vocabulario relacionado con la electricidad: solenoide, electrodinámica, corriente, tensión, . . . Se dedicó también a estudios de botánica, poesía, música y filosofía. Al final de sus días emprendió la clasificación de todos los conocimientos humanos, proyecto que dejó inacabado.

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_S \frac{d\vec{S}' \wedge \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\rightarrow 0} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\nabla' \wedge \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv', \quad (6.33)$$

donde el volumen de integración encierra al cuerpo, por lo que la integral de superficie es nula. De (6.44) se sigue que hay una corriente *real* de magnetización, $\vec{J}_m = \nabla \wedge \vec{M}$; se demuestra que en un punto de la superficie del cuerpo de normal exterior \vec{n} hay una corriente superficial $\vec{J}_m^s = \vec{M} \wedge \vec{n}$.

En presencia de corrientes de conducción \vec{J}^* , la Magnetostática toma la forma,

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0(\nabla \wedge \vec{M} + \vec{J}^*) \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.34)$$

Para resolver (6.45) dado \vec{J}^* , se necesita una relación $\vec{M}(\vec{B})$. Se introduce el vector *intensidad de campo magnético*, \vec{H} , definido mediante la siguiente relación

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (6.35)$$

y estudiar la relación $\vec{M}(\vec{H})$ en lugar de $\vec{M}(\vec{B})$. Así, encontramos la relación

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (6.36)$$

que se puede comparar con la Ec.(4.49) aplicada a dieléctricos. Nótese que de (6.45) se sigue que \vec{H} obedece las ecuaciones

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}^* \quad , \quad \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}. \quad (6.37)$$

siendo la primera de ellas similar a la Eq.(6.16). Procediendo pues del mismo modo que para obtener la ley de Ampere para el vacío, integramos la Eq.(6.48) sobre cualquier superficie abierta S , apoyada en una curva cerrada Γ ,

$$\int_S \nabla \wedge \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}^* \cdot d\vec{S} \quad (6.38)$$

y usando el teorema de Stokes, tenemos finalmente

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Gamma}^* \quad (6.39)$$

Nótese así mismo que en el **vacío**, al ser la imanación nula, los vectores intensidad de campo magnético e inducción magnética son proporcionales $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}$.

En problemas con cierta simetría, puede ignorarse la segunda ecuación (6.48) y obtener \vec{H} sin conocer $\vec{M}(\vec{H})$ en términos de \vec{J}^* , que es fácilmente medible y controlable. \vec{H} y \vec{M} se miden en A/m; Para la mayoría de los materiales la relación $\vec{M}(\vec{H})$ es muy simple,

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.40)$$

siendo la *permeabilidad magnética* μ_r muy próxima a la unidad ($\mu_r > 1$, paramagnetismo, ó $\mu_r < 1$, diamagnetismo). En caso de que ($|\vec{M}| \ll |\vec{H}|$) es posible despreciar los efectos paramagnéticos y diamagnéticos. Así mismo se define la *susceptibilidad magnética* como $\chi_m = \mu_r - 1$.

6.4.1. Ferromagnetismo

Hay materiales con comportamiento magnético peculiar, de origen cuántico nuevamente; de particular importancia es el ferromagnetismo. Por debajo de la llamada cierta temperatura de Curie⁸ T_c los momentos \vec{m}_s de todos los átomos de un *monocristal* ferromagnético, *suficientemente pequeño*, están coalineados en el estado de equilibrio termodinámico, aún en ausencia de corrientes externas. T_c es característica de cada material, y es del orden de 10^3K . Se tiene entonces $\vec{M}(T) \neq 0$ (y uniforme) para $T < T_c$, y $\vec{M}(T) = 0$, para $T \geq T_c$. Este es un efecto cuántico de interacción sólo entre momentos vecinos. Si \vec{M} tuviese un valor \vec{M}_1 uniforme en una parte del monocristal, y otro valor uniforme $\vec{M}_2 \neq \vec{M}_1$ en la otra, la entropía sería algo menor que la de equilibrio termodinámico, debido a la no coalineación de momentos \vec{m}_s a un lado y otro de la superficie que separase las regiones 1 y 2 del monocristal.

Por debajo de la temperatura de Curie, el monocristal produce, por tanto, un campo macroscópico \vec{B} (de unos pocos teslas). Al estudiar la *inducción* se verá que hay una energía por unidad de volumen $\frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 B^2$ asociada a todo campo magnético. Como consecuencia, un monocristal suficientemente grande, en equilibrio termodinámico, exhibe una estructura espacial de pequeños “dominios”, con tamaño del orden de la micra, $1\mu\text{m}$: la dirección de \vec{M} es uniforme dentro de cada dominio, pero difiere de un dominio al vecino. Esto se explica porque el campo \vec{B} en el exterior, promediada la contribución del vector \vec{M} de numerosos dominios, resulta así nulo; la reducción de la energía magnética de volumen incrementa la energía interna U y, en consecuencia, incrementa la entropía, lo que compensa su reducción por la no colineación de los momentos \vec{m}_s en cada frontera entre dos dominios.

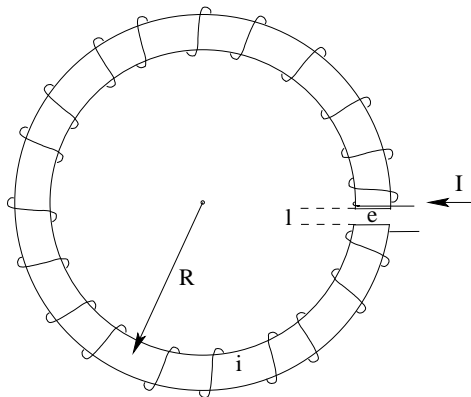


Figura 6.2:

Un cuerpo ferromagnético formado por múltiples monocristales de orientación cristalina independiente (policristal) presenta un efecto similar. En uno u otro caso, un campo magnético debido a fuentes externas puede hacer colineal a \vec{M} parcial o totalmente (magnetización). Hay fenómenos irreversibles en el proceso de alineación, con efectos de histéresis, originados por defectos en la estructura cristalina. Esto conduce a una relación compleja entre \vec{M} , (ó \vec{B}), y \vec{H} ; en particular se puede tener $\vec{M} \neq 0$ (imán permanente) después de retirar la fuente externa. Un electroimán (como el toro alargado de la figura (6.3), interrumpido en una pequeña distancia l) es una pieza de material ferromagnético, con un hilo de corriente I devanado

en torno un número N grande de vueltas, que permite obtener y controlar un campo magnético \vec{B} intenso en la zona exterior, accesible, e . Para $l = 0$, el toro se podría considerar como un solenoide recto cerrado sobre sí mismo, de modo que el campo \vec{B} quedaría encerrado en el toro y tendría valor uniforme, y las líneas de campo serían círculos; B_i se obtendría de la relación ferromagnética $B_i(H_i)$, y el campo \vec{H}_i de la Eq.(6.50).

⁸Pierre Curie (1859-1906), Físico Francés, descubridor del efecto la piezoelectrico. Galardonado con el premio Nobel de Física en 1903 por sus estudios sobre la radiactividad. Premio compartido con su mujer Marie Curie (Maria Sklodowska) y Henri Becquerel.

En el caso del toro abierto de la figura, el campo B_e se obtiene de las relaciones $B_e \simeq B_i$ (que resulta de la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$), $B_e = \mu_0 H_e$ (relación del vacío), $B_i(H_i)$, y de la Eq.(6.50)

$$(2\pi R - l)H_i + lH_e = NI. \quad (H_e \gg H_i) \quad (6.41)$$

Un cuerpo ferromagnético no magnetizado es fuertemente atraído por corrientes lejanas (adquiere un \vec{M} paralelo al campo \vec{B} de las corrientes, como en el caso paramagnético); si el cuerpo estaba magnetizado, es atraído o repelido según sean los sentidos de \vec{M} y del campo debido a las corrientes externas. El carácter de esa interacción se resume con la noción de polos magnéticos. Una barra imanada equivale a un solenoide de longitud L y N espiras de corriente I , con una corriente de conducción en superficie $\vec{J}_m^s = \vec{M} \wedge \vec{n}$, $M = \frac{N}{L}I$.

6.5. Magnetostática de materiales

En un punto alejado de una distribución de corriente estacionaria ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$), *localizada* en torno a \vec{r}_c , el potencial vector vale

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \simeq -\vec{m} \wedge \nabla \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_c|} \quad (6.42)$$

siendo \vec{m} el momento dipolar magnético. Para una espira plana se tiene $\vec{m} = I\vec{n} \times (\text{área de la espira})$ donde \vec{n} es aquella normal a la espira que forma un triedro a derechas con la intensidad I .

Para un cuerpo macroscópico se define el vector magnetización, $\vec{M}_\alpha \equiv \sum_s \vec{m}_s / \delta V_\alpha$, donde \vec{m}_s es el momento dipolar del átomo s en δV_α . El potencial vector de todo el cuerpo se sigue de un desarrollo similar al expuesto para dieléctricos:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \rightarrow - \int_v \vec{M}(\vec{r}') \wedge \nabla \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (6.43)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_S \frac{d\vec{S}' \wedge \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\rightarrow 0} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\nabla' \wedge \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \quad (6.44)$$

donde el volumen de integración encierra al cuerpo, por lo que la integral de superficie es nula. De (6.44) se sigue que hay una corriente *real* de magnetización, $\vec{J}_m = \nabla \wedge \vec{M}$; se demuestra que en un punto de la superficie del cuerpo de normal exterior \vec{n} hay una corriente superficial $\vec{J}_m^s = \vec{M} \wedge \vec{n}$.

En presencia de corrientes de conducción \vec{J}^* , la Magnetostática toma la forma,

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0(\nabla \wedge \vec{M} + \vec{J}^*) \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (6.45)$$

Para resolver (6.45) dado \vec{J}^* , se necesita una relación $\vec{M}(\vec{B})$. Se introduce el vector *intensidad de campo magnético*, \vec{H} , definido mediante la siguiente relación

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}, \quad (6.46)$$

y estudiar la relación $\vec{M}(\vec{H})$ en lugar de $\vec{M}(\vec{B})$. Así, encontramos la relación

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (6.47)$$

que se puede comparar con la Ec.(4.49) aplicada a dieléctricos. Nótese que de (6.45) se sigue que \vec{H} obedece las ecuaciones

$$\nabla \wedge \vec{H} = \vec{J}^* \quad , \quad \nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M}. \quad (6.48)$$

siendo la primera de ellas similar a la Eq.(6.16). Procediendo pues del mismo modo que para obtener la ley de Ampere para el vacío, integramos la Eq.(6.48) sobre cualquier superficie abierta S , apoyada en una curva cerrada Γ ,

$$\int_S \nabla \wedge \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}^* \cdot d\vec{S} \quad (6.49)$$

y usando el teorema de Stokes, tenemos finalmente

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Gamma}^* \quad (6.50)$$

Nótese así mismo que en el **vacío**, al ser la imanación nula, los vectores intensidad de campo magnético e inducción magnética son proporcionales $\mu_0 \vec{H} = \vec{B}$.

En problemas con cierta simetría, puede ignorarse la segunda ecuación (6.48) y obtener \vec{H} sin conocer $\vec{M}(\vec{H})$ en términos de \vec{J}^* , que es fácilmente medible y controlable. \vec{H} y \vec{M} se miden en A/m; Para la mayoría de los materiales la relación $\vec{M}(\vec{H})$ es muy simple,

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (6.51)$$

siendo la *permeabilidad magnética* μ_r muy próxima a la unidad ($\mu_r > 1$, paramagnetismo, ó $\mu_r < 1$, diamagnetismo). En caso de que ($|\vec{M}| \ll |\vec{H}|$) es posible despreciar los efectos paramagnéticos y diamagnéticos. Así mismo se define la *susceptibilidad magnética* como $\chi_m = \mu_r - 1$.

6.5.1. Ferromagnetismo

Hay materiales con comportamiento magnético peculiar, de origen cuántico nuevamente; de particular importancia es el ferromagnetismo. Por debajo de la llamada cierta temperatura de *Curie*⁹ T_c los momentos \vec{m}_s de todos los átomos de un *monocristal* ferromagnético, *suficientemente pequeño*, están coalineados en el estado de equilibrio termodinámico, aún en ausencia de corrientes externas. T_c es característica de cada material, y es del orden de 10^3 K. Se tiene entonces $\vec{M}(T) \neq 0$ (y uniforme) para $T < T_c$, y $\vec{M}(T) = 0$, para $T \geq T_c$. Este es un efecto cuántico de interacción sólo entre momentos vecinos. Si \vec{M} tuviese un valor \vec{M}_1 uniforme en una parte del monocristal, y otro valor uniforme $\vec{M}_2 \neq \vec{M}_1$ en la otra, la entropía sería algo menor que la de equilibrio termodinámico, debido a la no coalineación de momentos \vec{m}_s a un lado y otro de la superficie que separase las regiones 1 y 2 del monocristal.

Por debajo de la temperatura de Curie, el monocristal produce, por tanto, un campo macroscópico \vec{B} (de unos pocos teslas). Al estudiar la *inducción* se verá que hay una energía por unidad de volumen $\frac{1}{2}\epsilon_0 c^2 B^2$ asociada a todo campo magnético. Como consecuencia, un monocristal suficientemente grande, en equilibrio termodinámico, exhibe una estructura espacial de pequeños “dominios”, con tamaño del orden de la micra, $1\mu m$: la dirección de \vec{M} es uniforme dentro de cada dominio, pero difiere de un dominio al vecino. Esto se explica porque el campo \vec{B} en el exterior, promediada la contribución del vector \vec{M} de numerosos dominios, resulta así nulo; la reducción de la energía magnética de volumen incrementa la energía interna U y, en consecuencia, incrementa la entropía, lo que compensa su reducción por la no colineación de los momentos \vec{m}_s en cada frontera entre dos dominios. Un cuerpo ferromagnético formado por múltiples monocristales de orientación cristalina independiente (policristal) presenta un efecto similar. En uno u otro caso, un campo magnético debido a fuentes externas puede hacer colineal a \vec{M} parcial o totalmente (magnetización). Hay fenómenos irreversibles en el proceso de alineación, con efectos de histéresis, originados por defectos en la estructura cristalina. Esto conduce a una relación compleja entre \vec{M} , (ó \vec{B}), y \vec{H} ; en particular se puede tener $\vec{M} \neq 0$ (imán permanente) después de retirar la fuente externa.

Un electroimán (como el toro alargado de la figura (6.3), interrumpido en una pequeña distancia l) es una pieza de material ferromagnético, con un hilo de corriente I devanado en

⁹Pierre Curie (1859-1906), Físico Francés, descubridor del efecto la piezoeléctrico. Galardonado con el premio Nobel de Física en 1903 por sus estudios sobre la radiactividad. Premio compartido con su mujer Marie Curie (Maria Sklodowska) y Henri Becquerel.

torno un número N grande de vueltas, que permite obtener y controlar un campo magnético \vec{B} intenso en la zona exterior, accesible, e . Para $l = 0$, el toro se podría considerar como un solenoide recto cerrado sobre sí mismo, de modo que el campo \vec{B} quedaría encerrado en el toro y tendría valor uniforme, y las líneas de campo serían círculos; B_i se obtendría de la relación ferromagnética $B_i(H_i)$, y el campo \vec{H}_i de la Eq.(6.50). En el caso del toro abierto de la figura, el campo B_e se obtiene de las relaciones $B_e \simeq B_i$ (que resulta de la ecuación $\nabla \cdot \vec{B} = 0$), $B_e = \mu_0 H_e$ (relación del vacío), $B_i(H_i)$, y de la Eq.(6.50)

$$(2\pi R - l)H_i + lH_e = NI. \quad (H_e \gg H_i) \quad (6.52)$$

Un cuerpo ferromagnético no magnetizado es fuertemente atraído por corrientes lejanas (adquiere un \vec{M} paralelo al campo \vec{B} de las corrientes, como en el caso paramagnético); si el cuerpo estaba magnetizado, es atraído o repelido según sean los sentidos de \vec{M} y del campo debido a las corrientes externas. El carácter de esa interacción se resume con la noción de polos magnéticos. Una barra imanada equivale a un solenoide de longitud L y N espiras de corriente I , con una corriente de conducción en superficie $\vec{J}_m^s = \vec{M} \wedge \vec{n}$, $M = \frac{N}{L}I$.

CAPÍTULO 7

Introducción a la Teoría Especial de la Relatividad

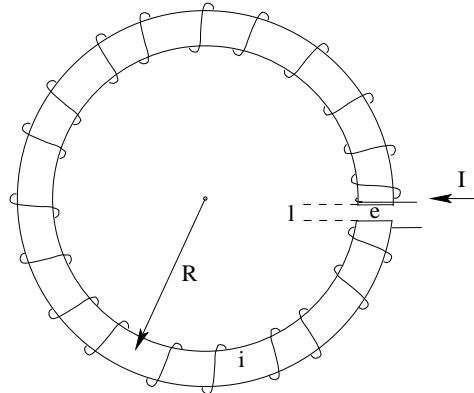


Figura 6.3:

7.1. Introducción

Las ecuaciones del electromagnetismo exhiben características novedosas respecto a la física newtoniana. La fuerza de Lorentz, debido al término $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ depende del sistema inercial desde donde se observa el fenómeno¹. Así mismo, en las ecuaciones de Maxwell aparece una constante con dimensiones de velocidad, c . Como se demuestra en la sección relativa a ondas electromagnéticas, c es la velocidad de propagación de dichas ondas en el vacío. Es obvio que esta velocidad, analizada desde el punto de vista prerrelativista, debe depender del sistema de referencia inercial. Esto está en contra del un Principio de Relatividad (*PRG*) asumido por la física clásica: *Cualquier fenómeno obedece leyes iguales en todos los triedros inerciales*.

Como vemos, las leyes del electromagnetismo parecen sugerir la existencia de un triedro de referencia especial, el *éter*, con lo que se viola el (*PRG*). Sin embargo, la evidencia experimental indica que tal *éter* no existe, y en consecuencia c es un valor universal independiente del triedro inercial de referencia. El Principio de Relatividad de Einstein² (*PRE*) indica que se cumplen ambos, el (*PRG*) y que c es constante para todo sistema inercial. Esto modifica las relaciones entre distancias e intervalos de tiempos, entre otras, con respecto a la física prerrelativista como veremos seguidamente. Actualmente, todas las predicciones de la teoría especial de la relatividad han sido ampliamente comprobadas experimentalmente.

¹Ver comentario al respecto en la página 33.

²Albert Einstein físico de origen alemán (1879- 1955), apátrida inicialmente y posteriormente nacionalizado suizo y estadounidense. Formado en el Polytechnikum de Zurich. Publicó en 1905 tres trabajos transcendentales: Explicó el movimiento Browniano (Esto permitió la determinación experimental de la constante de Avogadro en 1908), desarrolló la teoría del efecto fotoeléctrico, por lo que obtuvo el premio Nobel en 1921, y publicó la teoría especial de la relatividad, objeto de estas notas. Posteriormente publicó la teoría general de la relatividad mostrando que el Universo responde a geometrías más generales que la de Euclides. Protagonizó intensos debates principalmente con Max Born, a propósito del significado de *realidad* y la interpretación de la física cuántica.

7.2. Cinemática Relativista

En lo que sigue utilizaremos los conceptos de suceso e intervalo. Un suceso se define por el lugar que ocurre y el instante en que ocurre. Supongamos dos sucesos 1 y 2 definidos por (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) en un triedro S inercial. Se define el intervalo entre ellos como

$$\Delta s_{12} = ((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.1)$$

Supongamos que el suceso 1 es el paso en t_1 de una onda electromagnética por el punto (x_1, y_1, z_1) y la misma onda define el suceso 2 de forma análoga al 1. En virtud del *PRE* tenemos $\Delta s_{12} = \Delta s'_{12}$, siendo $\Delta s'_{12}$ es el intervalo medido en un sistema de referencia S' inercial. Argumentos mas generales sobre la homogeneidad del espacio y el tiempo y la isotropía de espacio permiten extender la invariancia de Δs_{12} a cualquier par de sucesos. Para sucesos infinitamente próximos tenemos:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2 \quad (7.2)$$

7.2.1. Tiempo propio

Supongamos un reloj que permanezca en reposo en S' no necesariamente inercial. Dado que $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$, utilizando 7.2 tenemos

$$dt' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}. \quad (7.3)$$

Aunque ahora S' no es necesariamente inercial, la ecuación 7.3 sigue siendo válida ya que siempre podemos encontrar un sistema local inercial donde el reloj se encuentre en reposo durante el intervalo de tiempo dt' .

Teniendo en cuenta que

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \quad (7.4)$$

es la velocidad instantánea de S' (o del reloj) podemos escribir 7.3 como

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7.5)$$

donde dt' es el *tiempo propio* en S' y dt el tiempo medido en S . Para un incremento finito del tiempo propio tenemos

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (7.6)$$

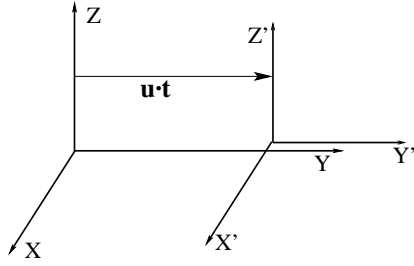
La ecuación 7.6 indica que un reloj en movimiento atrasa respecto a un reloj en reposo.

El experimento que confirmó definitivamente la ecuación 7.6 para S' no inercial se realizó en el CERN en un acelerador circular de partículas especialmente diseñado para almacenar muones (μ)³. Los muones son partículas elementales con una vida media en reposo (*vida media propia*) de $\Delta t'_\mu = 2,2\mu s$. Los muones fueron acelerados hasta $V = 0,9994c$ en órbitas circulares de 14m de perímetro. Medida la vida media de los muones desde el sistema fijo al laboratorio, y por tanto aproximadamente inercial, se pudo determinar la validez de la ecuación 7.6 con un error relativo inferior a 10^{-3} . Posteriores experimentos en el CERN han bajado dicho error relativo.

³J. Bailey et al. (1977). "Measurements of Relativistic Time Dilatation for Positive and Negative Muons in Circular Orbit." *Nature*, **268**, 301

7.2.2. Transformaciones de Lorentz

Supongamos ahora que $\vec{v} = u\vec{j}$ es constante y los sistemas S y S' inerciales con ejes paralelos siendo el eje Y común.



En este caso tenemos $dx = dx'$ y $dz = dz'$ y de 7.2 tenemos

$$\Delta y^2 + \Delta \tau^2 = \Delta y'^2 + \Delta \tau'^2 \quad (7.7)$$

siendo $\tau = ict$ y $\tau' = ict'$. De 7.7 se sigue que la transformación buscada es una rotación en el plano (y, t) , esto es:

$$y' = y \cos \phi + \tau \sin \phi, \quad \tau' = \tau \cos \phi - y \sin \phi \quad (7.8)$$

Para $y' = 0$ se tiene de 7.8, por una parte que $y/\tau = -\tan \phi$ y por otra parte, $y = ut = -iu\tau/c$. De esto se sigue

$$\tan \phi = iu/c. \quad (7.9)$$

Las ecuaciones 7.8 toman finalmente la forma

$$y' = \frac{y - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - uy/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x' = x, \quad z' = z, \quad (7.10)$$

Las ecuaciones 7.10 se conocen como Transformación de Lorentz. Se comprueba que 7.10 satisface 7.8 y despejando t e y , se recobra consistentemente, la transformación de Lorentz recíproca con $-u$ en lugar de u .

Nótese que Para $c \rightarrow \infty$ o bien para $\frac{c}{u} \rightarrow 0$ se recobra la transformación propia de la mecánica newtoniana, $y' = y - ut$, $t' = t$;

En general, x, y, z, ict son las coordenadas de un *cuatrivector* invariante ante la transformación de Lorentz siendo s un escalar.

Analizamos seguidamente algunas consecuencias inmediatas de las transformaciones de Lorentz. Supóngase que con el triedro S' se desplaza una varilla dispuesta sobre el eje y' . La determinación de las ordenadas de sus extremos, para medir su longitud, puede hacerse en distintos instantes en S' (donde la varilla está en reposo) pero ha de hacerse en iguales instantes en S . Utilicemos la primera de las ecuaciones 7.10 para el par de sucesos (y_1, t_1) , (y_2, t_2) correspondientes a la medición de las coordenadas y_1 e y_2 en los extremos de la varilla, y restemos esas ecuaciones. Recordando que $\Delta t \equiv t_2 - t_1 = 0$, y haciendo $\Delta L' \equiv y_2' - y_1'$, $\Delta L \equiv y_2 - y_1$, se tiene la *Contracción de Lorentz*

$$\Delta L' = \frac{\Delta L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (7.11)$$

Supongamos ahora que la varilla se encuentra en reposo en S . En este caso tenemos $\Delta t' = 0$, y de 7.10 resulta

$$\Delta L' = (\Delta L - u\Delta t)/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad \Delta t = u\Delta L/c^2, \quad (7.12)$$

de donde obtenemos el resultado simétrico a 7.11

$$\Delta L = \frac{\Delta L'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (7.13)$$

Considérese ahora un reloj en reposo en S' y dos sucesos: el comienzo y fin de un periodo $\Delta t'$ de ese reloj. Se tiene $\Delta y' = 0$. De 7.10 resulta

$$\Delta y = u\Delta t, \quad \Delta t' = (\Delta t - u\Delta y/c^2)/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (7.14)$$

y en consecuencia tenemos la *dilatación del tiempo de Lorentz*

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - u^2/c^2} \quad \text{o bien} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \quad (7.15)$$

Vemos que si en la ecuación 7.6 hacemos $v = u$ siendo u constante, recuperamos 7.15

Consideremos un ejemplo para ilustrar el significado de la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes de Lorentz. Supongamos que una partícula marcha en S con velocidad u y se desintegrará tras un tiempo propio $\Delta t'$. Desde el punto de vista clásico la partícula recorrerá una distancia $L_{clásica} = u \cdot \Delta t'$. En esta distancia tendríamos de situar los detectores si pretendemos detectarla antes de su desintegración. Sin embargo, $L_{clásica}$ es incorrecta, siendo la distancia disponible $L_{disponible} = u \cdot \Delta t$ y según 7.15 tenemos $L_{disponible} > L_{clásica}$. Desde S' donde la partícula se encuentra en reposo, se observa como se acercan unos detectores con velocidad $-u$. Dichos detectores recorrerá una distancia $L' = \Delta t' u$ antes de que la partícula se desintegre. Si utilizamos la ecuación 7.13 para transformar L' al sistema S , recuperamos nuevamente $L_{disponible}$.

Finalmente veamos la relación entre velocidades en S y S' . Consideremos dos sucesos coincidentes con dos posiciones muy próximas en el movimiento de una partícula. Diferenciando 7.10 resulta

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y - u}{1 - uv_y/c^2}, \quad v'_x = v_x \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_y/c^2}, \quad v'_z = v_z \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - uv_y/c^2}. \quad (7.16)$$

Supongamos que $v'_y = u = \alpha c$ siendo $\alpha \leq 1$. Clásicamente tendríamos erróneamente que $v_y = c$ para $\alpha = 1/2$ y $v_y > c$ para $\alpha > 1/2$. Utilizando la primera de las ecuaciones 7.16 tenemos

$$v_y = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} c \quad (7.17)$$

por lo que $v_y \leq c$ consiguiéndose la igualdad si $\alpha = 1$, es decir $v_y = v'_y = c$, en acuerdo con la universalidad de c .

7.3. Dinámica Relativista.

Definiendo cantidad de movimiento según la mecánica newtoniana, vemos en el choque elástico de dos partículas el vector $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ no se conserva. Sin embargo, definiendo \vec{p} según la mecánica Lagrangiana (que se estudiará en cursos posteriores) tenemos para la cantidad de movimiento la siguiente expresión:

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \vec{v} \quad (7.18)$$

que si se conserva en choques entre partículas. La variación de la energía de una partícula sobre la que se ejerce una fuerza \vec{F} puede expresarse así:

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} \quad (7.19)$$

e integrando tenemos

$$E_c = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.20)$$

y para velocidades no relativistas, $v/c \ll 1$,

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (7.21)$$

De 7.20 se sigue que la partícula de masa m tiene una energía en reposo

$$E = mc^2 \quad (7.22)$$

Como c , m y $\sqrt{1 - v^2/c^2} dt \equiv ds/c$ no varían en una transformación de Lorentz, las cantidades

$$\vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} d\vec{r} \quad , \quad \frac{E}{c^2} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt \quad (7.23)$$

se transforman como (x, y, z, t) (ó bien (x, y, z, ict)). Esto indica que $(p_x, p_y, p_z, iE/c)$ forman un cuatrivector.

7.3.1. Nota sobre la segunda ley de Newton

En la ecuación 7.19 hemos utilizado la siguiente definición de fuerza

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (7.24)$$

Derivando 7.24 y teniendo en cuenta 7.18 tenemos

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{a} + \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \vec{v} \quad (7.25)$$

por lo que la fuerza no es paralela a la aceleración como sucede en mecánica newtoniana. Nótese que para $v^2/c^2 \ll 1$, el término entre parentesis de segundo sumando de 7.25 tiende a la constante m , por lo que su derivada es nula, recuperando así la expresión clásica $\vec{F} = m\vec{a}$.

Supongamos que en 7.25, la fuerza actúa perpendicularmente a la partícula, modificando la dirección de su velocidad pero no su módulo. En este caso tenemos

$$\vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{a}. \quad (7.26)$$

Si la velocidad cambia sólo de módulo, es decir, la fuerza es paralela a la velocidad, tenemos:

$$\vec{F} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{a}. \quad (7.27)$$

Vemos pues que en estos casos particulares la fuerza y la aceleración son paralelas pero su razón es diferente en ambos casos.

7.3.2. Campo electromagnético

Las componentes del campo electromagnético \vec{E} , \vec{B} también se transforman al pasar de un triedro inercial S a otro S' . Si la velocidad u de S' respecto a S es mucho menor que c los campos se transforman del siguiente modo

$$\vec{B}' \simeq \vec{B}, \quad \vec{E}' \simeq \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}. \quad (7.28)$$

Tenemos pues que una carga q en reposo en S' y en presencia de un campo eléctrico \vec{E}' sufre la fuerza de Coulomb $\vec{F} = q\vec{E}'$. Dicha carga, vista desde S está sometida al campo $\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}$ y la fuerza resultante es la de Lorentz.

CAPÍTULO 8

Conducción eléctrica y fuerza electromotriz inducida

8.1. Conducción eléctrica

Se puede evitar el equilibrio termodinámico de un conductor manteniendo diferencias de potencial en su interior. El campo \vec{E} no nulo en el conductor da lugar a una densidad de corriente de cargas libres (electrones). En un metal se tiene

$$\vec{J} = \sum_{\delta v} q_j \vec{v}_j / \delta v = q_e n_e \langle \vec{v}_j \rangle \quad (8.1)$$

donde n_e es el número de electrones libres por unidad de volumen, q_e es la carga del electrón, y $\langle \vec{v}_j \rangle$ el valor medio de \vec{v}_j . En condiciones estacionarias se tiene

$$\langle \vec{v}_j \rangle \propto q_e \vec{E} \quad (8.2)$$

y se puede escribir $\langle \vec{v}_j \rangle = (q_e \vec{E} / m_e) t_c$, donde t_c es una constante con dimensiones de tiempo que caracteriza la interacción con la red del cristal. De otro modo, el desplazamiento de un electrón ligado a un átomo se modela como un oscilador armónico forzado,

$$m_e(\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x) = q_e E_x; \quad (8.3)$$

para un electrón libre no hay fuerza *elástica*, es decir $\omega_0^2 \equiv 0$, y si además se tiene campo E constante resulta $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = q_e E_x / m_e \gamma$, $\gamma \equiv 1/t_c$. Se tiene así,

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} \quad (8.4)$$

donde se define la *conductividad eléctrica* del material medida en siemens¹/m, S²/m (ver sección A.3).

$$\sigma_c \equiv \frac{q_e^2 n_e t_c}{m_e}. \quad (8.5)$$

Se define la *resistividad* del material como la magnitud inversa de la conductividad eléctrica. Al igual que en Electroestática, ρ_e es nulo dentro del conductor, por tanto $\rho_e = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \sigma_c^{-1} \nabla \cdot \vec{J} = 0$ y la carga existe en la superficie del conductor.

Conductor	$\sigma_c [S/m]$
Grafeno	$9,6 \cdot 10^7$
Ag	$6,3 \cdot 10^7$
Cu	$6,0 \cdot 10^7$
Au	$5,6 \cdot 10^7$
W	$1,8 \cdot 10^7$
Fe	$1,3 \cdot 10^7$

Cuadro 8.1: Resistividad de algunos materiales conductores

Semiconductores	$\sigma_c [S/m]$
C	$2,8 \cdot 10^4$
Ge	$2,2 \cdot 10^{-2}$
Si	$1,6 \cdot 10^{-5}$
H_2O	$5 \cdot 10^{-6}$
H_2O salada	Del orden de la unidad
Aislantes	$\sigma_c [S/m]$
Vidrio	10^{-10} a 10^{-14}
Mica	10^{-11} a 10^{-15}
Cuarzo	$1,3 \cdot 10^{-18}$

Cuadro 8.2: Resistividad de algunos materiales no conductores

Para un cable conductor (con dimensiones de la sección transversal mucho menores que la longitud), el potencial V será prácticamente uniforme en cada sección y se puede considerar el cable como una curva; el vector \vec{J} toma la forma $\vec{J} = \vec{\tau}I/A$, siendo S el área de la sección transversal del cable, I la intensidad, tomada positiva en cierto sentido e igual para todas las secciones, y $\vec{\tau}$ el versor tangente en cada punto, en ese sentido. Nótese que fluye corriente a través de la superficie del cable. Para dos secciones a y b con I tomada de a hacia b , se tiene

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{\vec{J}}{\sigma_c} \cdot \vec{\tau} dl \quad (8.6)$$

es decir

$$V_a - V_b = RI \quad (8.7)$$

donde se ha definido la resistencia eléctrica R como

$$R \equiv \int \frac{dl}{A\sigma_c} \quad (8.8)$$

Nótese que $R > 0$. La ecuación (8.7) se conoce como Ley de **Ohm**³ y R se mide en ohmios, Ω (ver sección A.3). Se denomina conductancia al inverso de la resistencia eléctrica, y se mide en $S = \Omega^{-1}$.

¹Werner von Siemens (1816-1892). Ingeniero alemán. Inventor de la dinamo. En 1879 realizó la primera locomotora eléctrica. Cofundador de la empresa Siemens AG.

²No confundir S con s.

³Georg Simon Ohm (1789-1854). Profesor alemán de enseñanza secundaria. Finalmente obtuvo una cátedra en la universidad de Munich.

El trabajo realizado por el campo \vec{E} por unidad de tiempo y volumen, que vale

$$\sum_{\delta V} \frac{q_j \vec{E}(\vec{r}_j) \cdot \vec{v}_j}{\delta V} \simeq \vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \sigma_c E^2 = \frac{J^2}{\sigma_c}, \quad (8.9)$$

aumenta la energía interna del cable (efecto Joule) y finalmente la del medio exterior. La potencia *disipada* en todo el cable es

$$\int_a^b \vec{J} \cdot \vec{E} A dl = \int_a^b I \vec{\tau} dl \cdot \vec{E} = I(V_a - V_b) = RI^2 = \frac{(V_a - V_b)^2}{R}. \quad (8.10)$$

En una red eléctrica, los distintos elementos que la componen (resistencias, pilas, ...) están conectados por cables de resistencia despreciable frente al resto de los elementos.

Las pilas y baterías o acumuladores tienen cierta resistencia interna r debido a que las cargas no se mueven libremente, por lo que se modelan mediante la siguiente ecuación (ver Fig. 8.1b)

$$V_+ - V_- = \varepsilon - Ir, \quad (8.11)$$

donde ε se denomina *fuerza electromotriz*. Nótese que según (8.11), la fuerza electromotriz es la diferencia de potencial entre los bornes *positivo* y *negativo* de la pila o acumulador cuando no fluye corriente. En la red se distinguen circuitos conductores cerrados (mallas), puntos donde confluyen corrientes (nudos), y circuitos conductores abiertos entre dos nudos (ramas).



Figura 8.1: a) Distintos esquemas para representar resistencias eléctricas. La flecha indica el sentido de la corriente según la ecuación $V_a - V_b = RI$. b) Esquema eléctrico de una pila o acumulador. La flecha indica la dirección de la corriente eléctrica en el interior de la pila (en ausencia de fuerzas electromotrices adicionales).

La ley de conservación de la carga ($\nabla \cdot \vec{J} = 0$) aplicada a un pequeño volumen que contenga a un nudo conduce a la **Primera Ley de Kirchhoff**⁴

La suma de intensidades de ramas que confluyen en un nudo es nula.

En una red con N nudos sólo hay $N - 1$ ecuaciones de nudo independientes. Hay también $N - 1$ diferencias de potencial independientes. Como la intensidad de cualquier rama se puede escribir en función de la diferencia de potencial entre los nudos extremos, la resistencia, y la fuerza electromotriz de la rama, se obtienen $N - 1$ ecuaciones para $N - 1$ incógnitas (las diferencias de potencial).

⁴Gustav Robert Kirchhoff, físico alemán (1824-1887). Catedrático de física matemática en la Universidad de Berlín. Inventó el espectroscópio, y junto con Bunsen identificó Na en el sol. Descubrieron así mismo el Cs y el Rb.

Otro método de resolución de la red utiliza las diferencias de potencial en lugar de las intensidades. En efecto, dado que \vec{E} es irrotacional, es decir $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, lo que nos conduce a la

Segunda Ley de Kirchhoff *La variación de V en el recorrido completo de una malla es nula.*

La variación de V en cada rama depende de la intensidad en ella; si hay M mallas independientes, las $N - 1$ ecuaciones de nudos y M ecuaciones de mallas proporcionan las C intensidades de rama (se tiene $M + N - 1 = C$). Existen otros métodos de resolución (método de las corrientes de malla).

8.2. Efecto termoeléctrico

El equilibrio de los electrones libres en un metal requiere que tanto $\mu + q_e V$ como la temperatura T sean uniformes. Si T no es uniforme, fluye una corriente. Para gradientes de temperatura usuales, \vec{J} es proporcional a ∇T ; en general, si existe simultáneamente un campo \vec{E} se puede escribir

$$\vec{J} = \sigma_c (\vec{E} - \alpha \nabla T). \quad (8.12)$$

donde α es el *coeficiente termoeléctrico* del material.

Si se conectan dos conductores metálicos A y B en dos puntos a temperaturas 1 y 2 para formar un circuito, resulta

$$RI = \oint \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} - \oint \alpha \nabla T \cdot d\vec{l} = - \int_{T_1}^{T_2} \alpha_B dT - \int_{T_2}^{T_1} \alpha_A dT \quad (8.13)$$

por tanto,

$$RI = \int_{T_1}^{T_2} [\alpha_A(T) - \alpha_B(T)] dT \simeq (\alpha_A - \alpha_B)(T_2 - T_1). \quad (8.14)$$

Se sigue (8.14) que la circulación de corriente por un circuito metálico sin pilas requiere una temperatura no uniforme y más de una fase metálica (termopar).

8.3. Fuerza electromotriz inducida

Si un conductor se mueve en una región donde existe un campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$, la relación entre $\vec{J}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$ y $\vec{B}(\vec{r})$ en un punto del conductor toma la forma

$$\vec{J} = \sigma_c (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (8.15)$$

donde $\vec{v}(\vec{r})$ es la velocidad local del conductor. La relación (8.15) se sigue de una argumentación similar a la descrita en la sección 8.1 (página 49) donde en la ecuación (8.2) hemos de completar la fuerza eléctrica debido a la presencia de \vec{B} y por tanto utilizar la fuerza de Lorentz (6.7). De esta forma, (8.4) se transforma en (8.15)

Supongamos un circuito sin pilas donde analizamos tres casos como sigue.

Primero: $\vec{v} \neq 0$, y $\partial\vec{B}/\partial t \equiv 0$

$$RI = \oint_{\Gamma} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \underbrace{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{=0} + \oint_{\Gamma} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (8.16)$$

Se induce una corriente, en general, cuando \vec{v} y \vec{B} no son nulos; se comprueba que $\oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -d\phi/dt$, $\phi \equiv \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, donde S es una superficie abierta apoyada en el circuito (el sentido de la normal en $d\vec{S}$ y el adoptado para I positiva deben formar un triedro a derechas). La ecuación (8.16) es la *ley de Faraday*⁵ y el término $-\frac{d\phi}{dt}$ se denomina *fuerza electromotriz inducida*. Entre dos puntos a y b del circuito, se tiene

$$R_{ab}I = V_a - V_b + \int_a^b (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}. \quad (8.17)$$

Por otra parte, si E_c es la energía cinética del movimiento del circuito resulta

$$\frac{dE_c}{dt} = \oint \vec{v} \cdot (Id\vec{l} \wedge \vec{B}) + \dot{w}_a \quad (8.18)$$

donde \dot{w}_a es una potencia adicional aplicada. Multiplicando la ec. (8.16) por I resulta

$$RI^2 = - \oint \vec{v} \cdot (Id\vec{l} \wedge \vec{B}) = -\frac{dE_c}{dt} + \dot{w}_a. \quad (8.19)$$

Para mantener constante la energía E_c , hace falta aplicar la potencia \dot{w}_a : \vec{B} hace un trabajo neto *nulo*. Si $\dot{w}_a = 0$, E_c decrece; \vec{B} se limita a transferir energía del movimiento macroscópico a la energía interna, por calentamiento Joule.

Ver el problema 12 y las primeras secciones del problema 13.

Segundo: $\vec{v} \equiv 0$ y $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$

De la ecuación $\nabla \wedge \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$, se sigue que no existe ahora potencial eléctrico. Para una curva cerrada fija Γ resulta

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\neq 0} = - \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt}, \quad (8.20)$$

donde la primera integral es en general distinta de cero. En caso de que curva sea un circuito conductor se tiene de nuevo

$$RI = \oint \frac{\vec{J} \cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}. \quad (8.21)$$

⁵Ver nota 5 en página 21.

Tercero: $\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$ y $\vec{v} \neq 0$

Se obtiene el mismo resultado, (ver apartado 13f en los problemas.)

$$RI = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.22)$$

La corriente I genera un campo magnético dado por $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$, donde $\vec{J} = \vec{\tau}I/a$, sobre la curva del conductor, como anteriormente, y se supone $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ despreciable frente a \vec{J} ; el signo menos en la relación $RI = -d\phi/dt$ implica que cuando ϕ varía, el campo creado por I se opone a esa variación (Ley de Lenz⁶). Para determinar la fuente de la energía disipada en la resistencia cuando $\vec{v} = 0$, supongamos que \vec{B} se debe *sólo* a la propia corriente del circuito. Si en $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ se duplica I con geometría dada, se duplica igualmente \vec{J} y $\vec{B} \rightarrow \vec{B} \propto I$. Se tiene así

$$\phi = LI; \quad (8.23)$$

donde L es el coeficiente de autoinducción. El coeficiente de autoinducción se mide en henrios, $H \equiv \Omega \cdot s$ (ver sección A.3).

Se comprueba que L es positivo y su valor en henrios usualmente pequeño; para un solenoide alargado, en cuyo interior $B = \mu_0 nI$, siendo n el número de espiras por unidad de longitud, se tiene $L = \mu_0 n^2 V_{sol}$. De (8.21) resulta

$$RI^2 = I \left(-\frac{d\phi}{dt} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right). \quad (8.24)$$

La energía $U_M = \frac{1}{2} LI^2$ está asociada al campo \vec{B} ; por ejemplo, para el solenoide, $U_M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 V_{sol}$. En general, $U_M = \int \frac{1}{2\mu_0} B^2 dV$. La fuente de esa energía es el trabajo realizado por el campo eléctrico engendrado al crecer el campo magnético de cero a un valor no nulo ($\nabla \wedge \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$); el campo \vec{B} , como ya se indicó, no hace trabajo.

Si se tienen dos circuitos 1 y 2, el circuito 1, por ejemplo, encierra un flujo total

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + \int_{S_1} \vec{B}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{S}_1 \quad (8.25)$$

donde \vec{B}_2 es el campo magnético creado por la corriente I_2 . Usando la ley de Biot-Savart para el potencial vector \vec{A}_2 , y el teorema de Stokes, resulta

$$\vec{B}_2 = \nabla \wedge \vec{A}_2, \quad \vec{A}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad (8.26)$$

$$\phi_{12} = \int_{S_1} d\vec{S}_1 \cdot \nabla \wedge \vec{A}_2 = \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{A}_2 = \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \oint_{\Gamma_2} d\vec{l}_2 \frac{\mu_0 I_2}{4\pi |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = M_{12} I_2. \quad (8.27)$$

De la simetría de esta formula se sigue

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = L_2 I_2 + M_{21} I_1, \rightarrow M_{21} = M_{12} \equiv M \quad (8.28)$$

donde M se denomina coeficiente de inducción mutua.

⁶Heinrich Friedrich Emil Lenz. Físico ruso (1804-1865).

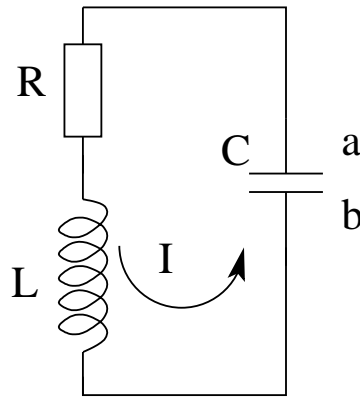


Figura 8.2: Circuito RCL. a y b denotan las armaduras del condensador C .

8.4. Corrientes variables

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff (vista en la página 52) a la malla de la figura (8.2) tenemos

$$RI + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q_b}{C} = 0 \quad (8.29)$$

donde $I = dQ_b/dt$. Nótese que la (8.29) puede ponerse así mismo en función de la carga,

$$L \frac{d^2 Q_b}{dt^2} + R \frac{dQ_b}{dt} + \frac{Q_b}{C} = 0 \quad (8.30)$$

Derivando (8.30) se obtiene

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \quad (8.31)$$

Como el lector ha reconocido, las ecuaciones (8.30) y (8.31) son las de un oscilador armónico amortiguado, ver el capítulo correspondiente de la asignatura Física General I. Multiplicando (8.31) por I resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = -RI^2. \quad (8.32)$$

- Si R es despreciable en (8.30) o (8.31) tenemos el oscilador armónico simple de frecuencia propia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- Si en (8.30) L es despreciable, tenemos la ecuación de descarga de un condensador,

$$R \frac{dQ_b}{dt} + \frac{Q_b}{C} = 0 \rightarrow Q_b(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (8.33)$$

donde el producto RC se denomina *constante de tiempo* del circuito y naturalmente Q_0 es la carga inicial.

- Si no existe condensador, es decir, la diferencia de potencial entre sus placas es nula, el último término de (8.29) desaparece y tenemos

$$RI = -L \frac{dI}{dt} \rightarrow I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (8.34)$$

donde L/R se denomina *constante de tiempo* del circuito y naturalmente I_0 es la intensidad inicial.

9.1. Ondas Electromagnéticas en el vacío

El campo electromagnético en el vacío está determinado por las ecuaciones de Maxwell¹ en ausencia de cargas. Recordemos la ecuaciones de Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}_t, \quad (9.2)$$

Donde $\rho_t = 0$ incluye todas las densidades de carga y $\vec{J}_t = 0$ todas las densidades de corriente. Para tratar el caso del vacío eliminamos las cargas y corrientes de las ecuaciones anteriores. Es decir, el primer par de ecuaciones de Maxwell se mantienen sin modificación alguna, mientras que en el segundo par hacemos $\rho_t = 0$ y, $\vec{J}_t = 0$.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (9.3)$$

Estas ecuaciones, como se verá seguidamente, tienen soluciones no nulas. Esto significa que un campo electromagnético puede existir incluso cuando *no existen cargas*. Los campos electromagnéticos que existen en el vacío en ausencia de cargas se llaman *ondas electromagnéticas*.

Observemos en primer lugar que los campos soluciones de (9.1) y (9.3) ha de variar con el tiempo, pues de lo contrario tendríamos las ecuaciones de la electrostática en ausencia de cargas, es decir, campos nulos.

¹James Clerk Maxwell (Edimburgo, 1831 - Cambridge, 1879). Físico escocés. Demostró que el campo electromagnético tiene realidad física independiente de la materia. Dicho campo puede propagarse en el vacío y en medios materiales. Formuló la teoría cinética de gases, estudió los anillos de saturno y dejó para la posteridad su celebre diablillo tratando de doblegar el segundo principio de la termodinámica. Fue profesor de distintas universidades. En 1856 se retiró un tiempo a sus propiedades en Escocia donde pudo trabajar con tranquilidad y libertad. Allí sintetizó magistralmente la teoría electromagnética clásica en lo que hoy se conoce como ecuaciones de Maxwell.

Tomando el rotacional en la segunda ecuación (9.1) tenemos:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial \nabla \wedge \vec{B}}{\partial t} \quad (9.4)$$

y utilizando las propiedades del doble rotacional junto con la segunda Ec. (9.3) tenemos:

$$-\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{\nabla \cdot \vec{E}=0}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (9.5)$$

Teniendo en cuenta que en el vacío $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ se obtiene finalmente la siguiente ecuación para el campo eléctrico \vec{E}

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (9.6)$$

y de forma análoga, de (9.1) y de la segunda de (9.3) tenemos para la inducción magnética

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0, \quad (9.7)$$

Estas seis ecuaciones, tres para las componentes del vector \vec{E} y otras tres para \vec{B} tienen la misma forma:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (9.8)$$

donde ψ representa cualquiera de las cantidades $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$.

La ecuación (9.8) se denomina *ecuación de ondas*. Se conocen infinidad de soluciones de la ecuación de ondas. Seguidamente estudiamos alguna de ellas. Nótese que al ser (9.8) una ecuación lineal, cualquier combinación lineal de soluciones de (9.8) es a su vez solución de la ecuación.

Introduciendo en (9.8) una función arbitraria $\psi(\xi)$, de una variable real y derivable dos veces, (nótese que $\psi(\xi)$ en (9.8) es una función de cuatro variables) con el siguiente argumento $\xi = \vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi$, obtenemos que (9.8) se cumple si se satisface la relación

$$c^2 \kappa^2 = \omega^2. \quad (9.9)$$

Las ondas electromagnéticas de la forma $\psi(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ se llaman *ondas planas* y la (9.9) *relación de dispersión* para las ondas planas en el vacío. Así mismo el argumento $(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$ se denomina *fase* siendo \vec{k} el vector de ondas, ω la frecuencia y ϕ la constante de fase.

Sin pérdida de generalidad, tomamos el eje x según $\vec{\kappa}$ y tenemos $\psi = \psi(\kappa x - \omega t + \phi)$. En cualquier instante, las superficies de igual fase $(\kappa x - \omega t + \phi)$ de la onda plana, son los planos $x = \text{cte}$ y cualquier valor prefijado de la fase se propaga con la denominada *velocidad de fase* que resulta:

$$\kappa \frac{dx}{dt} \Big|_{(\text{fase const.})} - \omega = 0 \rightarrow \frac{dx}{dt} \Big|_{(\text{fase const.})} = \frac{\omega}{\kappa} = c. \quad (9.10)$$

Haciendo ψ proporcional a la función seno, tenemos un caso particular de la onda electromagnética plana llamada *onda monocromática plana*:

$$\psi = \psi_0 \text{sen}(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi). \quad (9.11)$$

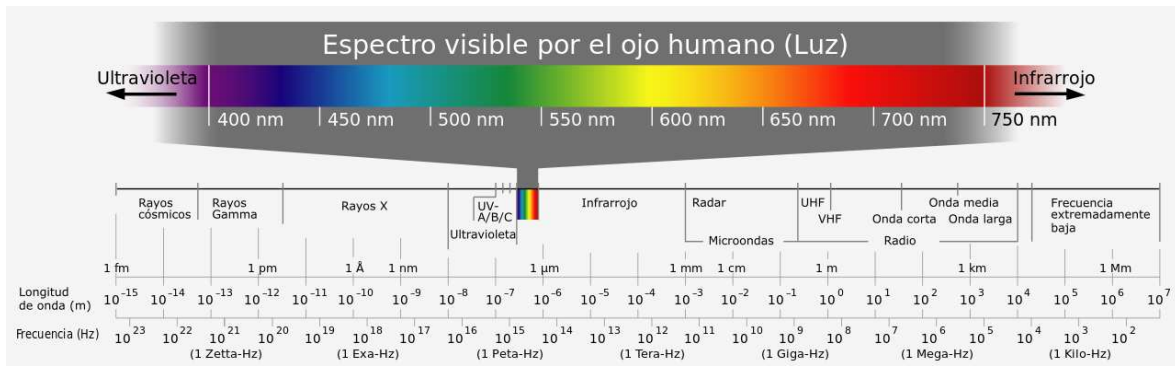


Figura 9.1: Espectro de ondas electromagnéticas.

La denominación monocromática de debe a que su frecuencia, si corresponde a la parte visible del espectro electromagnético, determina el color con que se percibe la onda. El espectro de frecuencias o longitudes de onda es continuo y de un modo aproximado, la clasificación de la ondas electromagnéticas es como sigue: (ver fig. 9.1).

- Ondas de radio: son las utilizadas en telecomunicaciones e incluyen las ondas de radio y televisión. Su frecuencia oscila desde unos pocos hercios hasta los GHz aproximadamente. Se originan en la oscilación de la carga eléctrica en las antenas emisoras. La telefonía móvil utiliza ondas de uno a dos GHz.
- Microondas: Se utilizan en las comunicaciones del radar, banda UHF (Ultra High Frequency) y en los hornos de las cocinas. Su frecuencia comprende desde GHz hasta 10^{11} Hz.
- Infrarrojos: Son emitidos por los cuerpos calientes. Sus frecuencias comprenden desde 10^{11} Hz hasta $4 \cdot 10^{14}$ Hz. La piel también detecta las radiaciones infrarrojas.
- Luz visible: Incluye una franja estrecha de frecuencias: $4 \cdot 10^{14}$ Hz - $8 \cdot 10^{14}$ Hz. Los humanos tenemos unos sensores para detectarla: conos y bastones situados en la retina.
- Ultravioleta: Comprende de $8 \cdot 10^{14}$ Hz a 10^{17} Hz. La piel detecta la radiación ultravioleta y como consecuencia fabricar melanina como medida de protección. La capa de O_3 absorbe radiación ultravioleta.
- Rayos X: Comprenden desde $1,1 \cdot 10^{17}$ Hz hasta $1,1 \cdot 10^{19}$ Hz. De inmediata aplicación en medicina para la obtención de radiografías.
- Rayos gamma: comprenden frecuencias superiores a 10^{19} Hz.

la emisión de ondas electromagnéticas en cualquier zona del espectro está fuertemente regulada jurídicamente en la mayoría de los países y mediante convenios internacionales. La ecuación (9.8) no recoge toda la información contenida en las ecuaciones de Maxwell, que imponen ciertas condiciones a las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} como seguidamente estudiamos.

Supongamos una onda plana propagándose en según el eje X , es decir $\vec{\kappa} = \kappa \vec{i}$. En este caso, las ecuaciones $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ toma la forma mas sencilla $\partial E_x / \partial x = 0$ y $\partial B_x / \partial x = 0$

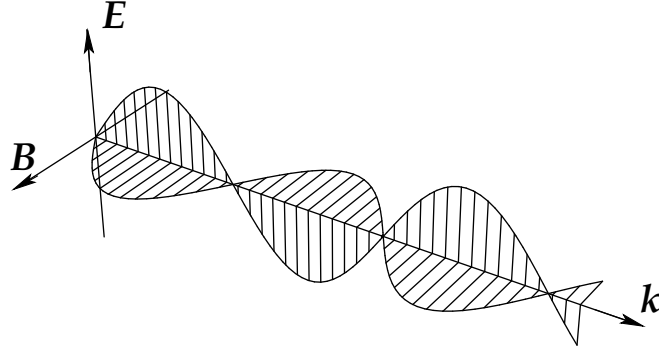


Figura 9.2: Onda electromagnética plana correspondiente a la ecuación 9.12 con $E_{z0} = 0$ y $\vec{\kappa} = \kappa \vec{i}$. Los vectores \vec{E} y \vec{B} son paralelos a \vec{j} y \vec{k} respectivamente.

es decir $E_x = 0$ y $B_x = 0$, por tanto y que \vec{E} y \vec{B} son perpendiculares a $\vec{\kappa}$, que a su vez indica la dirección de propagación de la onda. Tenemos pues que las ondas electromagnéticas son *ondas transversales*. En general, el campo \vec{E} de una onda plana monocromática tiene la forma

$$\vec{E} = E_{y0} \text{sen}(\kappa x - \omega t) \vec{j} + E_{z0} \text{sen}(\kappa x - \omega t + \Delta) \vec{k} \quad (9.12)$$

permitiendo un desfase Δ entre E_z y E_y . La ecuaciones de Maxwell imponen así mismo relaciones entre los campos \vec{E} y \vec{B} que analizamos seguidamente.

Supongamos por simplicidad una onda plana propagándose paralela al eje X , es decir:

$$\vec{E} = E_y(\kappa x - \omega t + \phi_y) \vec{j} + E_z(\kappa x - \omega t + \phi_z) \vec{k} \quad (9.13)$$

El campo \vec{B} queda determinado por la ecuación

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.14)$$

resultando

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\kappa E'_z(\kappa x - \omega t + \phi_z) \vec{j} + \kappa E'_y(\kappa x - \omega t + \phi_y) \vec{k} \quad (9.15)$$

siendo E'_y la derivada de la función E_y y análogamente para la función E_z . Tenemos finalmente para \vec{B}

$$\vec{B} = -\kappa \int E'_z(\kappa x - \omega t + \phi_z) dt \vec{j} + \kappa \int E'_y(\kappa x - \omega t + \phi_y) dt \vec{k} \quad (9.16)$$

es decir

$$\vec{B} = \frac{\kappa}{\omega} \left(-E'_z(\kappa x - \omega t + \phi_z) \vec{j} + E'_y(\kappa x - \omega t + \phi_y) \vec{k} \right) \quad (9.17)$$

Por tanto, para una onda plana general se tiene

$$c\vec{B} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \wedge \vec{E}; \quad (9.18)$$

Donde $\vec{\kappa}$, \vec{E} y \vec{B} forman un triedro a derechas según indica la fig. 9.2 para una onda monocromática.

La relación de dispersión también se satisface poniendo $\omega = -c\kappa < 0$, en lugar de $\omega = c\kappa > 0$, pero se puede mantener $\omega > 0$ positiva escribiendo $\vec{\kappa} \cdot \vec{r} \mp \omega t$, en lugar de $\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t$, en la solución en el argumento de ψ . Nótese que una onda con fase $\kappa x + \omega t$ siendo $\kappa > 0$ y $\omega > 0$ se propaga con velocidad $-c\vec{i}$. Una onda estacionaria

$$\psi = \psi_0 \sin(\kappa x - \omega t) + \psi_0 \sin(\kappa x + \omega t) = 2\psi_0 \sin \kappa x \cos \omega t \quad (9.19)$$

es la superposición de ondas iguales propagándose en sentidos opuestos, y es solución de (9.8) aún no siendo onda plana. En una onda estacionaria, ψ se anula simultáneamente en todos los puntos, no hay propagación de fase y se anula en todo instante para ciertos puntos.

Seguidamente se describen algunas soluciones de interés técnico junto con sus correspondientes relaciones de dispersión.

- Las cavidades resonantes de geometría simple se describen por ondas estacionarias,

$$\psi = \psi_0 \sin \kappa_z z \sin \kappa_x x \cos \omega t, \quad \omega^2 = c^2(\kappa_z^2 + \kappa_x^2) \quad (9.20)$$

- Las guías de onda se describen por ondas mixtas, estacionarias y de propagación,

$$\psi = \psi_0 \sin \kappa_z z \sin(\kappa_x x - \omega t), \quad \omega^2 = c^2(\kappa_z^2 + \kappa_x^2); \quad (9.21)$$

- Las líneas de transmisión, por ondas de propagación de campo transversal potencial,

$$\vec{E} = -\nabla\psi(y, z) \times \sin(\kappa_x x - \omega t), \quad \nabla^2\psi = 0, \quad \omega^2 = c^2\kappa_x^2. \quad (9.22)$$

En las Ec. (9.20) y (9.21), ψ representa cierta componente de \vec{E} , y se ha de tener $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, y $\vec{E}_t = 0$ (componente del campo \vec{E} tangencial) en las paredes conductoras de las cavidades o guías, lo que determina κ_z .

En (9.22), se ha de tener para la componente tangencial $(\nabla\psi)_t = 0$ sobre los cables de la línea de transmisión.

9.2. Ondas electromagnéticas en medios dieléctricos

En un dieléctrico se propagan ondas electromagnéticas, pero la amplitud decrece en el curso de la propagación porque procesos atómicos absorben energía de la onda. En este caso el primer par de ecuaciones (9.1) sigue siendo válido. Sin embargo para el segundo par de ecuaciones (9.3) hemos de considerar el medio dieléctrico, es decir

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (9.23)$$

donde hemos eliminado las cargas libres. Si además el medio carece de corrientes de imanación tenemos

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (9.24)$$

Consideremos medios dieléctricos lineales, utilizando por tanto la relación entre el vector de polarización y el campo eléctrico vista en electrostática.

$$\vec{P} = \varepsilon_0(n^2 - 1)\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \vec{E} \quad (9.25)$$

donde se ha escrito $\epsilon_r = n^2$ identificando la constante dieléctrica con el cuadrado del *índice de refracción* n que puede depende de la frecuencia ω y de la posición en el dieléctrico, pero no del tiempo, $n(\vec{r}, \omega)$. La Ec.(9.30) mostrara que la identificación es correcta.

Las cuatro ecuaciones de Maxwell (9.1) y (9.24) toman ahora la forma

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9.26)$$

$$\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = 0, \quad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial (n^2 \vec{E})}{\partial t} \quad (9.27)$$

A diferencia del vacío, ahora $\nabla \cdot \vec{E} \neq 0$, y hemos de obtener su valor de la primera de las ecuaciones anteriores.

$$\nabla \cdot (n^2 \vec{E}) = \nabla n^2 \cdot \vec{E} + n^2 \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (9.28)$$

por tanto

$$\nabla \cdot \vec{E} = -2\vec{E} \cdot \frac{\nabla n}{n} \quad (9.29)$$

procediendo de forma análoga a la obtención de la Ec.(9.6), pero introduciendo en la Ec. (9.5) el valor de $\nabla \cdot \vec{E}$ obtenido en la Ec. (9.29) tenemos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + 2\nabla(\vec{E} \cdot \frac{\nabla n}{n}) = 0. \quad (9.30)$$

En un medio uniforme ($n = cte$) el último término de (9.30) es nulo y por comparación entre las ecuaciones (9.30) y (9.7) se recobran los resultados del vacío, salvo por el cambio de velocidad de fase, que ahora es c/n , y por tanto $\omega^2 = c^2 k^2 / n^2$ confirmando así la relación $\epsilon_r = n^2$. Esta relación fue confirmada *experimentalmente* por L. Boltzmann, científico que también destaco por sus trabajos teóricos y filosóficos.²

La dependencia de n con la frecuencia es el origen de las dispersión de la luz en colores al se refractada por un prisma o gotas de agua, produciendo el arco iris.

9.3. Energía del campo electromagnético

Hemos visto que el campo electromagnético se puede propagar por el vacío y por distintos materiales. Se propaga por tanto la energía electromagnética. En este punto es necesario obtener una ecuación de conservación de la energía que describa dicha propagación.

Según hemos visto anteriormente, el trabajo efectuado por el campo electromagnético por unidad de tiempo (potencia) y unidad de volumen es $\vec{E} \cdot \vec{J}_t$, donde no aparece el campo \vec{B} debido a que no efectúa trabajo.

Utilizando la cuarta ecuación de Maxwell (9.2) para sutituir la densidad de corriente total tenemos:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J}_t = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - c^2 \nabla \wedge \vec{B} \right) \quad (9.31)$$

²Ludwig Boltzmann (1844-1906). La Ecuación $S = k \ln W$ que se vió en la sección *Teoría Cinética de los Gases Perfectos*, está grabada en la tumba de L. Boltzmann, situada en el cementerio central de Viena, como homenaje a uno de los mas ilustres profesores de la Universidad de Viena, donde impartió clases de Física y de historia y filosofía de las ciencias.

donde hemos utilizado la definición $\mu_0 \equiv \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$. La ec. (9.31) puede escribirse de la siguiente forma:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J}_t = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E^2}{2} \right) + c^2 \left[-\vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{B}) + \vec{B} \cdot (\nabla \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \right] \quad (9.32)$$

donde los dos últimos términos del corchete suma cero en virtud de la segunda ec. (9.1). La ec. (9.32) puede agruparse de la siguiente manera:

$$-\vec{E} \cdot \vec{J}_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{2} \right) + c^2 \left[\vec{B} \cdot (\nabla \wedge \vec{B}) - \vec{E} \cdot (\nabla \wedge \vec{B}) \right] \quad (9.33)$$

Donde el término a la izquierda de la igualdad representa la potencia perdida por el sistema de cargas por unidad de volumen, que es igual a la suma de los términos de la derecha, donde en el interior del paréntesis reconocemos suma de la energía por unidad de volumen debida al campo eléctrico y al campo magnético. Llamemos u a dicha suma.

$$u = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{2} \quad (9.34)$$

Esto sugiere poner el último término como una divergencia para tener una ecuación de continuidad para la energía. En efecto utilizando las propiedades del operador divergencia podemos reescribir la ecuación anterior de la siguiente forma

$$-\vec{J}_t \cdot \vec{E} = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} \quad (9.35)$$

donde \vec{S} es el vector de Poynting definido como

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \quad (9.36)$$

Tenemos pues que el último término de la eq. (9.33) de la eq. (9.35) representa el flujo de energía por unidad de área que escapa hacia el exterior.

Integrando la eq. (9.43) en un volumen V delimitado por la superficie cerrada S tenemos

$$-\int_V \vec{J}_t \cdot \vec{E} dv = \int_V \frac{\partial u}{\partial t} dv + \int_V \vec{S} \cdot \vec{ds} \quad (9.37)$$

El significado físico de la Ec. (9.37) es el siguiente: El término de la izquierda de la igualdad la potencia perdida en el volumen V , mientras que a la derecha tenemos la potencia en dicho volumen debida a los campos \vec{E} y \vec{B} y en último término, el flujo de energía por unidad de tiempo que atraviesa la superficie S que delimita el volumen V . Las ecuaciones (9.35) y (9.37) tienen completa validez, pudiéndose aplicar al vacío o a medios materiales. En este último caso, no hay restricción alguna sobre dichos medios.

En ocasiones es más conveniente estudiar la energía sobre las cargas libres, es decir $\vec{J} \cdot \vec{E}$. En este caso podemos hacer una derivación completamente análoga a la anterior a partir de la ecuación de Maxwell en la forma

$$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}, \quad (9.38)$$

y sustituyendo ϵ_0 y μ_0 por ϵ y μ respectivamente. Llegamos así a la ecuación análoga a la ec. (9.35) pero referida sólo a la energía relativas a las cargas libres.

$$-\vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{\partial u'}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}' \quad (9.39)$$

En este caso u' se ha definido como

$$u' = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \mu_0 \frac{H^2}{2} \quad (9.40)$$

En este caso el vector \vec{S}' se ha definido como

$$\vec{S}' = \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (9.41)$$

Hay que tener en cuenta así mismo que en la derivación de la ec. (9.39) hemos considerado ϵ y μ constantes, por lo que dicha ecuación es válida sólo para medios uniformes y con parámetros no dependientes del tiempo. En caso de que esto no sea así, hemos de añadir nuevos términos a la ecuación (9.39) que corrijan el balance de energía, por ejemplo incluyendo las pérdidas por histeresis en materiales magnéticos. En el caso del vacío, ambas formulaciones son equivalentes.

Como ejemplo práctico, apliquemos la ec. (9.39) una onda electromagnética plana. La energía de dicha onda, según la Ec. (9.34) y teniendo en cuenta la relación de dispersión para ondas planas tenemos:

$$u = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{2} = \epsilon_0 E^2 \quad (9.42)$$

Evaluando ahora el vector de Poynting para dicha onda tenemos

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{1}{c} \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \wedge \vec{E} \right) = c \epsilon_0 E^2 \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = c u \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} \quad (9.43)$$

Es decir, la energía de la onda viaja según el vector $\vec{\kappa}$ a velocidad c .

Consideremos ahora un caso completamente distinto. Apliquemos la Ec. (9.37) a un hilo recto infinito cilíndrico de radio R , por el que circula una intensidad I . Analicemos el flujo de energía en un tramo de longitud l (ver figura 9.3). Para mantener la corriente será necesario mantener cierta diferencia de potencial ΔV , siendo \vec{E} uniforme por lo que $\Delta V = l E$. La potencia disipada en dicho tramo por efecto Joule es pues $P = I \Delta V = I l E$. Tenemos que el primer miembro de la ec. (9.37) debe ser $-I l E$. El segundo miembro es nulo debido a que el sistema es estacionario. Deducimos por tanto que el vector de Poynting debe aportarnos el total de energía que entra por la superficie del conductor. Evaluamos por tanto el tercer término de la ecuación (9.37). Teniendo en cuenta que el campo magnético en la superficie del conductor vale (ver fig. 9.3)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R} \vec{\tau} \wedge \vec{n} \quad (9.44)$$

es decir:

$$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\mu_0} \int_A \vec{E} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{I E}{2\pi R} \int_A \underbrace{\vec{\tau} \wedge (\vec{\tau} \wedge \vec{n})}_{-\vec{n}} \cdot \vec{n} dA \quad (9.45)$$

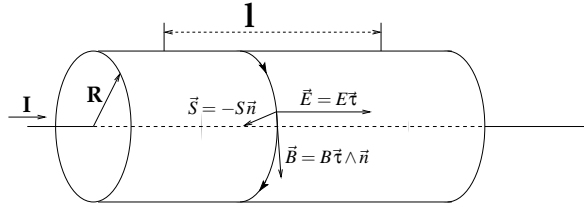


Figura 9.3: Hilo conductor. Se indican los vectores \vec{E} , \vec{B} y el vector de Poynting resultante \vec{S} . El vector unitario $\vec{\tau}$ es paralelo al conductor mientras que \vec{n} es normal exterior a la superficie lateral del conductor.

y teniendo en cuenta que el area lateral del tramo de conductor considerado vale $2\pi Rl$ tenemos finalmente

$$\int_A \vec{S} \cdot d\vec{A} = -\frac{IE}{2\pi R} 2\pi Rl = -IEl \quad (9.46)$$

indicándonos que la misma potencia que sale del conductor es la que entra debido a vector de Poynting. En efecto según la figura 9.3, el vector de Poynting está dirigido hacia el interior del conductor.

9.4. Polarización

Considerando una onda plana monocromática como la representada en la Ec. (9.12)

$$\vec{E} = E_y \vec{j} + E_z \vec{k} = E_{y0} \sin(\kappa x - \omega t) \vec{j} + E_{z0} \sin(\kappa x - \omega t + \Delta) \vec{k} \quad (9.47)$$

y partiendo de las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{E_{y0}} &= \sin(\kappa x - \omega t) \\ \frac{E_z}{E_{z0}} &= \sin(\kappa x - \omega t + \Delta) \end{aligned} \quad (9.48)$$

tras una larga manipulación algebraica obtenemos

$$\frac{E_y^2}{E_{y0}^2} + \frac{E_z^2}{E_{z0}^2} - 2 \cos \Delta \frac{E_y}{E_{y0}} \frac{E_z}{E_{z0}} = \sin^2 \Delta. \quad (9.49)$$

que relaciona las componentes E_y y E_z del vector \vec{E} . El comportamiento de dicho vector depende de los parámetros de la Ec. (9.49) y podemos distinguir diferentes casos:

1. Polarización lineal. $\Delta = 0$ o bien $\Delta = \pi$.

En este caso la Ec. (9.49) queda simplemente

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \pm \frac{E_z}{E_{z0}} \quad (9.50)$$

es decir las componentes E_y y E_z son proporcionales y el vector describe un segmento recta en un plano perpendicular al de propagación. Ver figura 9.4.

2. Polarización circular. $\Delta = \pm \frac{\pi}{2}$ y $E_{y0} = E_{z0}$.

Introduciendo $\Delta = \pm \frac{\pi}{2}$ en la Ec. (9.49) tenemos

$$\frac{E_y^2}{E_{y0}^2} + \frac{E_z^2}{E_{z0}^2} = 1 \quad (9.51)$$

por lo que si $E_{y0} = E_{z0}$, la Ec. (9.51) corresponde a una circunferencia. Ver figura 9.5.

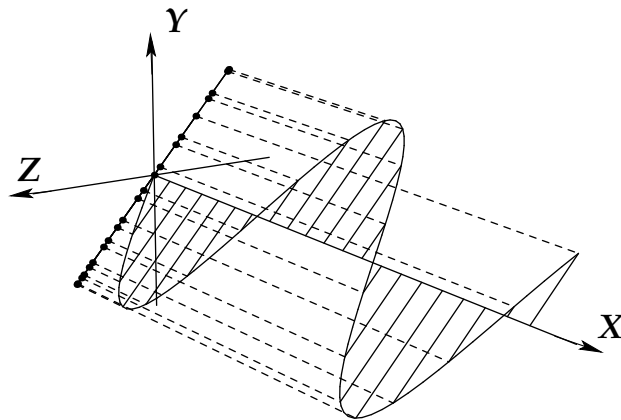


Figura 9.4: Onda electromagnética plana correspondiente a la ecuación (9.12). Por razones de simplicidad se ha representado únicamente el vector \vec{E} . Las líneas discontinuas paralelas a la dirección de propagación proyectan el vector \vec{E} en sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación. Los puntos proyectados forma un segmento recto.

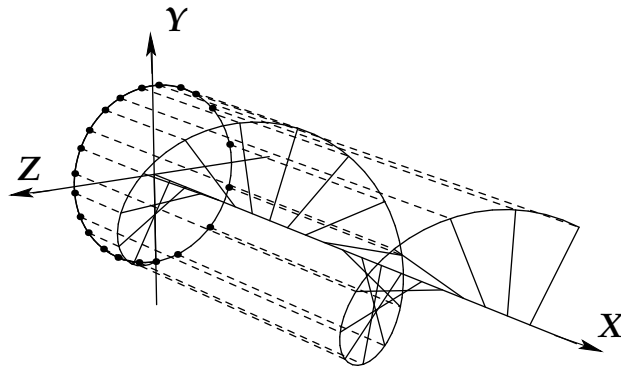


Figura 9.5: Igual que en la Fig. 9.4 pero ahora los puntos proyectados forman una circunferencia.

3. Polarización elíptica:

Corresponde al caso general de la Ec. (9.49) donde el vector describe una elipse. Ver figura 9.6. Una representación de esto puede verse en la fig. 9.6. La Ec. (9.51) también representa polarización elíptica con la particularidad de que los ejes de la elipse coinciden con los ejes X e Y .

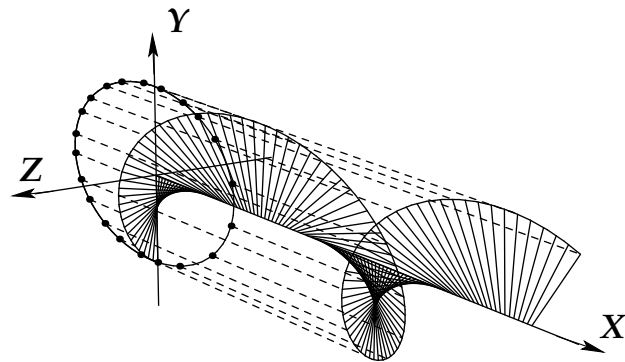


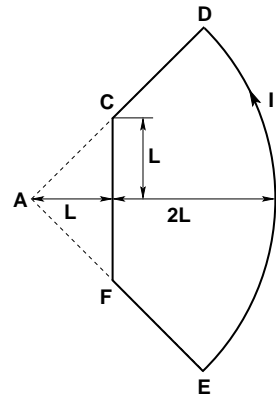
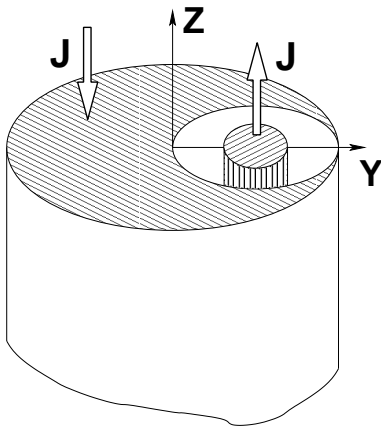
Figura 9.6: Igual que en la Fig. 9.4 pero ahora los puntos proyectados forman una elipse.

CAPÍTULO 10

Problemas propuestos

- Hallar la trayectoria de una carga q de masa m que parte del punto (x_0, y_0, z_0) con velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$ y en ausencia de gravedad, está sometida a la acción de :
 - Un campo magnético constante $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$.
 - El campo magnético de a) y un campo eléctrico constante $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{k}$.
 - El campo magnético de a) y un campo eléctrico constante $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{j}$. Descomponer el vector velocidad en uno constante \mathbf{u} y otro igual a v_a velocidad del apartado a).

- Calcular el campo magnético producido en el punto A por la espira $CDEF$ recorrida por la intensidad I en el sentido indicado.



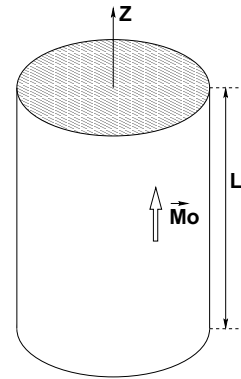
- Se tiene el conductor cilíndrico infinito de radio exterior R_1 y eje el eje z . En el hueco del cilindro hay otro cilindro conductor coaxial de radio R_2 . Sabiendo que la densidad de corriente \mathbf{J} que pasa por ambos conductores, es igual y de sentidos opuestos, se pide el campo magnético en puntos del hueco y del exterior al cilindro sobre el eje Y positivo.
- Calcular el campo magnético en un punto cualquiera generado por un *solenoides infinito* (conductor de longitud infinita enrollado en espiras de radio R), por el que circula una intensidad I .

- b) Calcular el campo magnético en un punto del eje de un *solenoides finito* de radio R y longitud L por el que circula una intensidad I .

llámese $n = n^\circ$ de espiras por unidad de longitud de solenoide.

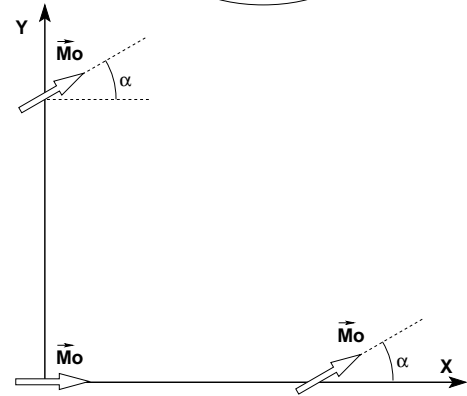
5. Calcular el campo magnético \mathbf{B} creado por un dipolo magnético de momento magnético \mathbf{m} . Comprobar que el ángulo formado por \mathbf{B} y el vector de posición es independiente de la distancia al dipolo.

6. Se tiene un cilindro de radio R y altura L de material ferromagnético, magnetizado permanentemente. El vector de magnetización tiene igual valor en todos los puntos del material: módulo M_0 y dirección la del eje del cilindro. No hay corrientes de conducción. Calcular los campos inducción magnética e intensidad del campo magnético en puntos del eje del cilindro, dentro y fuera de él.
 NOTA: Calcúlese la inducción magnética por analogía con un solenoide de igual radio y longitud, N_t espiras e intensidad I ; hállese la relación entre $N_t I / L$ y M_0 .

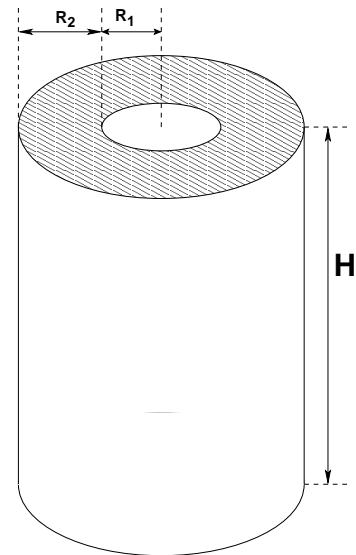


7. Se tiene un imán permanente de volumen V y magnetización $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ en el origen de un triedro.

- a) Calcular y discutir la fuerza y el momento que ejercería sobre un segundo imán, igual, situado a gran distancia en el eje x .
 b) Lo mismo, si el segundo imán está en el eje y .

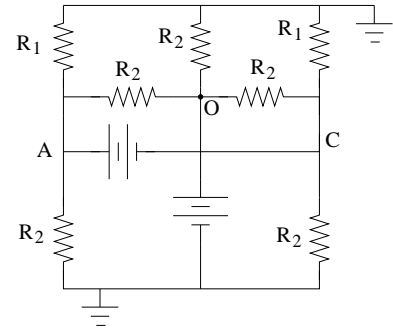


8. Un conductor cilíndrico de radio R_2 tiene en su interior un hueco concéntrico de radio R_1 . Se conectan la superficie interior y la exterior a una pila de forma que se establece una diferencia de potencial V . Sabiendo que la longitud del cilindro es H (suficiente para considerarlo como infinito) y que la conductividad es σ_0 , se pide: Intensidad que circula entre las superficies del cilindro, y su resistencia R , en la conexión indicada.



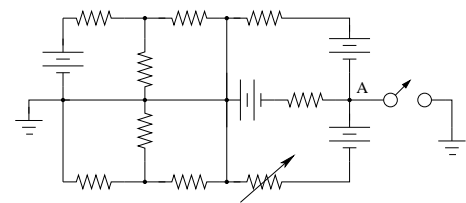
9. Dado el circuito de la figura en el que las pilas tienen una f.e.m. ϵ y resistencia despreciable y $R_1 = 2\Omega$ y $R_2 = 3\Omega$, se pide:

- Intensidad, (módulo y dirección) que pasan por las pilas.
- Potencia disipada en la resistencia situada entre O y C .
- Potencial en el punto A .



10. El circuito de la figura está formado por resistencias del mismo valor R , pilas de fuerza electromotriz ϵ y resistencia interna R , y un potenciómetro cuya resistencia R' puede variarse a voluntad. Se pide:

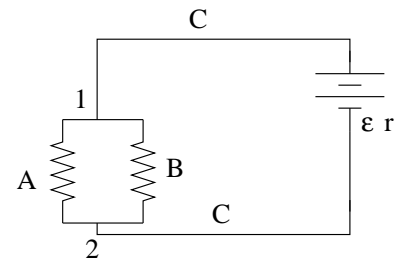
- Valor de R' para que la potencia disipada por las resistencias sea máxima.
- Valor de dicha potencia.
- Potencial del punto A .
- Intensidad que circulará por el interruptor cuando se cierre.



Nota: ¿Puede el alumno predecir el valor de las intensidades que circulan por las tres resistencias de la parte inferior izquierda de la figura?

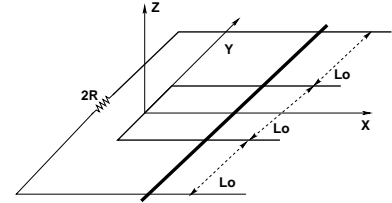
11. En el circuito de la figura los nudos 1 y 2 se mantienen a temperaturas diferentes $T_1 < T_2$. Los conductores A y B tienen resistencias y coeficientes termoeléctricos R_A, R_B y α_A, α_B . El conductor C (de resistencia despreciable) y la pila tienen coeficiente termoeléctrico despreciable. Hallar:

- Intensidad por la pila.
- Relación entre la potencia suministrada por la pila y la suministrada por el par de conductores A y B .



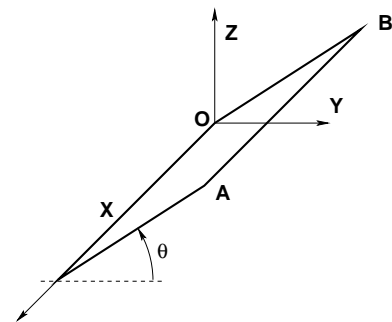
Tómese: $R_A = 2r, R_B = r; \alpha_B = 2\alpha_A, (\alpha_c = 0)$
 ($\alpha \equiv$ coeficiente termoeléctrico).

12. En presencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\mathbf{k}$ existen en un plano horizontal cuatro guías paralelas de resistencia eléctrica despreciable y espaciadas a una distancia L_0 ; las dos guías centrales están conectadas entre sí y las dos exteriores están conectadas a través de una resistencia de valor $2R$. Sobre las guías desliza sin rozamiento una barra conductora uniforme de longitud $3L_0$, masa M y resistencia eléctrica $3R$. Inicialmente dicha barra se desplaza con velocidad $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$. Se pide:



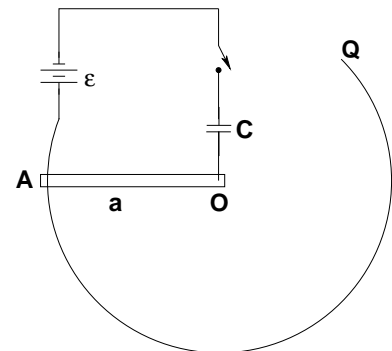
- a) Intensidad que circula por la barra en el instante inicial y fuerza electromagnética que actúa sobre la barra en dicho instante.
- b) Velocidad de la barra en función del tiempo y espacio que recorrerá antes de pararse.

13. Mediante un momento exterior aplicado se hace girar alrededor del eje OX , con velocidad angular constante $\omega_0\mathbf{i}$ una espira cuadrada de lado L y resistencia ρ por unidad de longitud (véase figura). En el instante inicial tenemos $\theta = 0$. Existe un campo magnético dado por $\mathbf{B} = \frac{B_0}{L}(z\mathbf{j} + y\mathbf{k})$. Se pide:



- a) Máxima intensidad que circula por la espira.
- b) Diferencia de potencial entre A y B en el instante en que la intensidad es máxima.
- c) Momento exterior aplicado en función de θ .
- d) Trabajo mecánico suministrado en una vuelta.
- e) Energía disipada por calentamiento ohmico en una vuelta.
- f) Para $\mathbf{B} = \frac{B_0}{L} \sin(\omega t)(z\mathbf{j} + y\mathbf{k})$, intensidad que circula por la espira.

14. El circuito de la figura, situado en un plano horizontal, consta una barra homogénea conductora OA de masa M , longitud a y resistencia R (el resto de las resistencias del circuito y el rozamiento en la barra son despreciables), que se apoya en el hilo circular AQ y está articulada en O . En la región donde se encuentra la espira existe un campo magnético hacia el lector de valor constante B_0 . En $t = 0$ con la barra OA en reposo, en la posición indicada y el condensador descargado, se cierra el interruptor. Calcular para $C = M/a^2B_0^2$:



- a) Aceleración angular inicial de la barra.
- b) Tiempo que tarda la intensidad en reducirse a la mitad del valor inicial.

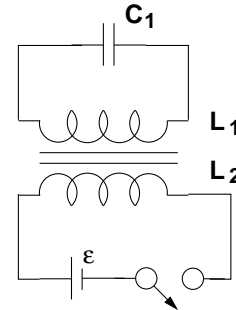
15. Dadas dos autoinducciones L_1 y L_2 se desea conocer el coeficiente de autoinducción

equivalente, cuando ambas se montan en serie o en paralelo. Mostrar que ha de tenerse $M^2 < L_1 L_2$.

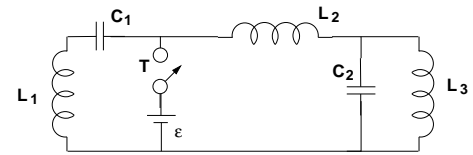
Analice en que casos las fórmulas obtenidas para las autoinducciones en serie y en paralelo son semejantes a las correspondientes para las resistencias.

Nota: Llámese M a la inducción mutua.

16. Sean las autoinducciones L_1 y L_2 de la figura con coeficiente de inducción mutua M . Inicialmente el condensador está descargado y el interruptor abierto. Se cierra el interruptor en $t = 0$. Calcular $Q_1(t)$.



17. En el circuito de la figura los condensadores están inicialmente descargados y el interruptor T abierto. Se cierra T en $t = 0$. Calcular $Q_1(t)$ y $Q_2(t)$.



APÉNDICE A

SI

El Sistema internacional de unidades, en abreviatura SI (del francés Le Système International d'Unités) es adoptado jurícamante por casi todos los países. En España se establece mediante la Ley 3/1985, de 18 de marzo, de Metrología que determina como Unidades Legales de Medida las del Sistema Internacional de Unidades adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas. Estas unidades quedaron establecidas en el Real Decreto 1317/1987, de 27 de octubre, modificado posteriormente por el Real Decreto 1737/1997, de 20 de noviembre.

A.1. Unidades fundamentales

Las siete magnitudes fundamentales en el SI con sus correspondientes definiciones son las siguientes:

1. Magnitud: **Longitud**

Nombre de la unidad: **metro**

Símbolo de la unidad: **m**

Definición: El metro es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ s (17^a CGPM, 1983, r.1).

2. Magnitud: **Masa**

Nombre de la unidad: **kilogramo**

Símbolo de la unidad: **kg**

Definición: El kilogramo es la unidad de masa y es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. (3^a CGPM, 1901, p. 70 del acta).

3. Magnitud: **Tiempo**

Nombre de la unidad: **segundo**

Símbolo de la unidad: **s**

Definición: El segundo es la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. (13^a CGPM, 1967, r.1).

4. Magnitud: **Intensidad de corriente eléctrica**

Nombre de la unidad: **ampere**

Símbolo de la unidad: **A**

Definición¹: El amperio es la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de 1 m uno de otro, en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud. (CIPM, 1946, r.2, aprobada por la 9ª CGPM, 1948).

5. Magnitud: **Temperatura termodinámica**

Nombre de la unidad: **kelvin**

Símbolo de la unidad: **K**

Definición: El kelvin es la fracción $1/273.16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. (13ª CGPM 1967, r.4). La 13ª CGPM (1967, r.3) decidió así mismo que la unidad kelvin y su símbolo K sean utilizados para expresar un intervalo o una diferencia de temperaturas.

COMENTARIOS: Además de la temperatura termodinámica, símbolo T, expresada en kelvins, se utiliza también la temperatura Celsius, símbolo t, definida por la ecuación $t = T - T_0$, donde $T_0 = 273,15$ K por definición. Para expresar la temperatura Celsius, se utiliza la unidad "grado celsius", que es igual a la unidad Kelvin; en este caso, el "grado celsius" es un nombre especial utilizado en lugar de "Kelvin". Un intervalo o una diferencia de temperatura Celsius puede expresarse, indistintamente, en Kelvins o grados Celsius.

6. Magnitud: **Intensidad luminosa**

Nombre de la unidad: **candela**

Símbolo de la unidad: **cd**

Definición: La candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ hertz y cuya intensidad radiante en dicha dirección es $1/683$ vatios por estereorradián. (16ª CGPM, 1979, r.3).

7. Magnitud: **Cantidad de sustancia**

Nombre de la unidad: **mol**

Símbolo de la unidad: **mol**

Definición: El mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12.

COMENTARIOS: Cuando se emplea el mol, las entidades elementales deben ser especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o agrupamientos especificados de tales partículas. (14ª CGPM, 1971).

A.2. Unidades suplementarias

■ **Ángulo plano**

Nombre de la unidad: **radián**

Símbolo de la unidad: **rad**

Definición: El radián es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre la circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual a la del radio. (Norma Internacional ISO 31-I, diciembre de 1965)

¹Esta definición hace referencia a la Ec.(6.30) en la página 36

- **Ángulo sólido**

Nombre de la unidad: **estereorradián**

Símbolo de la unidad: **sr**

Definición: El estereorradián es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, intercepta sobre la superficie de dicha esfera un área igual a la de un cuadrado que tenga por lado el radio de la esfera. (Norma internacional ISO 31-I, diciembre de 1965).

A.3. Unidades derivadas con nombre propio y normas de notación

Unidades derivadas con nombre propio			
Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión
Frecuencia	hertz, hercio	Hz	s^{-1}
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Presión, esfuerzo, tensión mecánica	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	joule, julio	J	$N \cdot m$
Potencia, flujo radiante	watt, vatio	W	$J \cdot s^{-1}$
Carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb, culombio	C	$A \cdot s$
Potencial eléctrico, diferencia de potencial, tensión, fuerza electromotriz	volt, voltio	V	$W \cdot A^{-1}$
Capacidad eléctrica	farad, faradio	F	$C \cdot V^{-1}$
Resistencia eléctrica	ohm, ohmio	Ω	$V \cdot A^{-1}$
Conductancia eléctrica	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$
Flujo magnético , flujo de inducción magnética	wéber	Wb	$V \cdot s$
Intensidad del campo magnético	lenz	Lz	$A \cdot m^{-1}$
Inducción magnética, densidad de flujo magnético	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$
Inductancia	henry, henrio	H	$Wb \cdot A^{-1}$
Temperatura	grado Celsius	°C	K
Flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Iluminación, iluminancia	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$
Actividad (radiactiva)	becquerel	Bq	s^{-1}
Dosis energética, índice de dosis absorbida	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$
Dosis equivalente, índice de dosis equivalente	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$
Ángulo plano	radián	rad	
Ángulo sólido	estereorradián	sr	

A continuación se resumen algunas normas de notación relativas a las unidades. Para mas información puede consultarse la siguiente página web: www.proteccioncivil.org/vademecum/ o bien www.bipm.fr/en/si/.

- Los nombres de las unidades no deben alterarse para acomodarse a las peculiaridades

de cada idioma. Cada unidad SI tiene su propio símbolo, el mismo en cualquier idioma.

- Cuando se usa el nombre completo de las unidades fundamentales y derivadas o de sus múltiplos y submúltiplos, debe escribirse con minúscula incluso si procede de un nombre propio. Se exceptúa Celsius en "grado Celsius".
- Los símbolos se escriben con minúscula excepto cuando provienen de un nombre propio. Es permisible usar la mayúscula L para litro cuando el símbolo normal, l, puede confundirse con el dígito 1. Cuando un símbolo de dos letras proviene de un nombre propio, la inicial es mayúscula.
- Los prefijos de múltiplos y submúltiplos se escriben con minúscula excepto en el caso de los múltiplos mega y superiores.
- Los símbolos no son abreviaturas, nunca llevan plural y no deben ir seguidos de punto final.
- La coma decimal, usada en Europa, o el punto decimal usado en los EE.UU. son ambos aceptables.
- La anterior regla excluye el uso de comas o puntos para separar grupos de cifras. Estos deben separarse con un espacio sin puntuación alguna.

APÉNDICE B

Constantes físicas fundamentales

Los siguientes datos son suministrados por el *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA). Información adicional puede obtenerse de página WEB de CODATA.

Quantity	Symbol	Value	Uncertainty
Speed of light in vacuum	c	$299\,792\,458\text{ m s}^{-1}$	(exact)
Magn. constant	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\text{ N A}^{-2}$	(exact)
Electric constant	ε_0	$8.854187817 \dots \cdot 10^{-12}\text{ F m}^{-1}$	(exact)
Elementary charge	e	$1.60217653 \cdot 10^{-19}\text{ C}$	$0.00000014 \cdot 10^{-19}$
Newtonian constant of gravitation	G	$6.6742 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3\text{ kg}^{-1}\text{ s}^{-2}$	$0.0010 \cdot 10^{-11}$
Molar gas constant	R	$8.314472\text{ J mol}^{-1}\text{ K}^{-1}$	0.000015
Boltzmann constant	k	$1.3806505 \cdot 10^{-23}\text{ J K}^{-1}$	$0.0000024 \cdot 10^{-23}$
Proton charge to mass quotient	e/m_p	$9.578\,833\,76 \cdot 10^7\text{ C kg}^{-1}$	$0.000\,000\,82 \cdot 10^7$
Avogadro constant	N_A	$6.022\,1415 \cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$	$0.0000010 \cdot 10^{23}$

Cuadro B.1: Constantes físicas fundamentales

- [1] Tom M. Apostol. *Calculus* Vol 2. Editorial Reverté.
- [2] Robert W. Christy, Frederick J. Milford, John R. Reitz. *Fundamentos de la Teoría Electromagnética*.
- [3] P. Lorrain y D. E. Corson, *Campos y ondas electromagnéticos*, SC (Selecciones Científicas)
- [4] Marcelo Alonso y Edward J. Finn, *Física*. Addison Wesley. Tomo II