Apuntes de Física II
ELECTROSTÁTICA

Dr. Ezequiel del Río
Departamento de Física Aplicada
E.T.S. de Ingeniería Aeronáutica y del espacio
Universidad Politécnica de Madrid

30 de marzo de 2017

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

Operadores diferenciales

1.1. Introducción

En el estudio de cualquier parte de la Física es esencial familiarizarse desde el principio con los métodos matemáticos relativos a la materia de estudio, es decir, la parte de la matemática utilizada comunmente para *expresar y razonar* la materia a estudiar. Este es el objeto de esta sección. El material aquí espuesto puede encontrarse en los complementos de los resúmenes de Física General I o naturalmente, de modo mas riguroso en libros de análisis matemático.

Cantidades como la presión o la velocidad en un fluido, que dependen del tiempo t y de la posición $\vec{r}(x, y, z)$, se llaman campos. Nótese que son funciones, escalares o vectoriales, de varias variables, pero con la particularidad de que tres variables (x, y, z) son las componentes de un vector $\vec{r}$, y otra, t, es un escalar. Para un campo vectorial $\vec{w}(\vec{r}, t)$, y en un instante dado t_0, se llaman lineas de campo a las curvas tangentes en cada punto $\vec{r}$ al vector $\vec{w}(\vec{r}, t_0)$. Para un campo escalar $p(\vec{r}, t)$, se llaman superficies de campo constante, en un instante t_0, a las superficies $p(\vec{r}, t_0) =$ cte. Unas y otras son útiles para representar gráficamente campos dados.

1.2. Gradiente, divergencia y rotacional

Muchas leyes de la Física relacionan derivadas de campos; si esas leyes han de ser válidas en triedros de cualquier orientación tales derivadas han de ser a su vez campos escalares o vectoriales. Las derivadas temporales, $(\partial p/\partial t,\ \partial\vec{w}/\partial t)$, tienen, evidentemente, ese carácter. Por el contrario, una derivada espacial, tal como $\partial p/\partial x$, no es ni un escalar ni un vector. Combinaciones de derivadas espaciales que sí son escalares o vectores, son:

$$\text{Gradiente :}\quad \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}, \tag{1.1}$$

$$\text{Divergencia :}\quad \nabla\cdot\vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.2}$$

$$\text{Rotacional :}\quad \nabla\wedge\vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{1.3}$$

En las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3) hemos utilizado el operador Nabla

$$\nabla \equiv \vec{i}\partial/\partial x + \vec{j}\partial/\partial y + \vec{k}\partial/\partial z \tag{1.4}$$

que permite una notación vectorial. La expresiones de los operadores anteriores en coordenadas curvilíneas pueden verse en el capítulo 2.

Es fácil comprobar que ∇p es un vector: tratándolo como a tal resulta

$$\nabla p \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta z \simeq p(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - p(\vec{r}) \equiv \Delta p, \tag{1.5}$$

que es un escalar para cualquier $\Delta\vec{r}$. El vector ∇p en el punto arbitrario $\vec{r}_0$ es perpendicular al plano tangente en $\vec{r}_0$ a la superficie $p(\vec{r}) = \text{cte} = p(\vec{r}_0)$ y su sentido es el de p creciente. El caracter escalar de $\nabla \cdot \vec{w}$ y vectorial de $\nabla \wedge \vec{v}$ se seguirá de los teoremas de Gauss y Stokes.

La determinación de aquellas derivadas espaciales segundas que a su vez sean campos escalares o vectoriales es inmediata. Del campo escalar $\nabla \cdot \vec{w}$ se obtiene su gradiente, $\nabla \cdot \vec{w} \rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{w})$, y de los campos vectoriales ∇p y $\nabla \wedge \vec{w}$ se obtiene

$$\nabla p \rightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla p), \quad \nabla \wedge (\nabla p) \quad , \quad \nabla \wedge \vec{w} \rightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}), \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{w}). \tag{1.6}$$

Para los campos escalar y vectorial tenemos las siguientes igualdades

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}) = \nabla \wedge (\nabla p) = 0 \tag{1.7}$$

que el alumno puede comprobar fácilmente.
¿Pueden existir campos $\vec{w}$ y p para los que las ecuaciones (1.7) no se cumplan?

Por otra parte, si en la expresión $\nabla \cdot (\nabla p)$ se trata al operador nabla como si fuese un vector, $\nabla \cdot (\nabla p) = (\nabla \cdot \nabla)p$ (se escribe $\nabla^2 p$, "Laplaciana de p"), se obtiene el mismo resultado:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{1.8}$$

Finalmente, se comprueba la identidad

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{w}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{w}) - \nabla^2 \vec{w}. \tag{1.9}$$

Se puede decir, por tanto, que las derivadas espaciales segundas de campos se presentarán en Física en la forma $\nabla(\nabla \cdot \vec{w})$, $\nabla^2 p$, ó $\nabla^2 \vec{w}$. El operador ∇^2 se llama laplaciano[1].

1.3. Teoremas integrales

1.3.1. Teorema de Gauss

Ciertas relaciones entre integrales de campos permiten a veces simplificar el cálculo de los campos mismos, o llevar leyes físicas de una forma diferencial a una forma integral (ver Ley de Ampere, más adelante). Se llama flujo ϕ de un campo vectorial $\vec{w}$ a través de una superficie S a la integral de superficie

$$\phi \equiv \int_S \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1.10}$$

[1]Pierre-Simon Laplace, astrónomo, físico y matemático francés (1749 - 1827).

donde $\mathrm{d}\vec{S}$ es el vector de módulo el elemento diferencial de área $\mathrm{d}S$, y versor el normal $\vec{n}$ a la superficie en $\mathrm{d}S$. Como hay dos sentidos posibles para $\vec{n}$, para hallar ϕ hay que convenir previamente cual se elige; cuando S es una superficie cerrada se elige siempre la normal exterior. Si se divide un volumen v limitado por una superficie cerrada S en dos volúmenes v_1 y v_2 ($v_1 + v_2 \equiv v$), mediante una superficie de corte abierta S', se cumple

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} \tag{1.11}$$

donde S_1 y S_2 son las superficies cerradas que limitan a v_1 y a v_2 (nótese que sobre S' las normales a utilizar en S_1 y S_2 son opuestas). Analizando el flujo a través de la superficie que limita un cubo elemental se sigue finalmente, para cualquier superficie cerrada S, el Teorema de **Gauss**[2]

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{w} = \int_v dv\ \nabla \cdot \vec{w}. \tag{1.12}$$

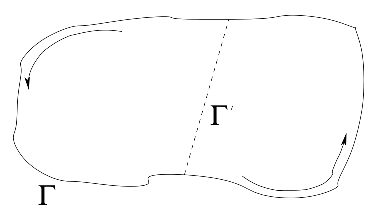
Hay un segundo teorema de Gauss, $\int_S d\vec{S} \wedge \vec{w} = \int_v dv\ \nabla \wedge \vec{w}$.

1.3.2. Teorema de Stokes

Se llama circulación C de un campo vectorial $\vec{w}$ a lo largo de una curva cerrada Γ a la integral de linea de $\vec{w}$ sobre Γ

$$C \equiv \oint_\Gamma \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \tag{1.13}$$

donde $\mathrm{d}\vec{l}$ es el vector de módulo el elemento de arco $\mathrm{d}l$, y versor tangente a Γ en dl en el sentido de recorrido, que es preciso especificar. Una linea interior abierta Γ' que una dos puntos de Γ engendra dos curvas cerradas Γ_1 y Γ_2; se encuentra



$$C_\Gamma = C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} \tag{1.14}$$

(nótese que los sentidos de $\mathrm{d}\vec{l}$ sobre Γ' son opuestos en Γ_1 y Γ_2). Analizando la circulación sobre un rectángulo elemental se sigue finalmente, para cualquier curva cerrada Γ, el Teorema de **Stokes**[3]

$$\oint_\Gamma \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla \wedge \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.15}$$

siendo S *cualquier* superficie abierta que se apoye en Γ; los sentidos de recorrido en Γ y de la normal en S se asocian como en un triedro a derechas. Si Γ colapsa a un punto, S se hace cerrada, y el teorema de Stokes es una identidad,

$$0 = \int_{S\ \text{cerrada}} \nabla \wedge \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_v \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w})\mathrm{d}v, \tag{1.16}$$

donde v es el volumen encerrado por S.

Del teorema de Stokes se deduce que si un campo $\vec{w}$ es irrotacional ($\nabla \wedge \vec{w} = 0$ para cualquier $\vec{r}$), su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Consecuencia de esto es que la integral de línea de $\vec{w}$ a lo largo de una curva abierta, de un punto P a otro A, no depende de la curva; para un campo irrotacional dado $\vec{w}$, $\int_P^A \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ es sólo función de A y P. Si se fija A, y el vector de posición $\vec{r}$ de P es arbitrario, se obtiene de $\vec{w}$ un campo escalar,

[2]Carl Friedrich Gauss. Matemático, astrónomo y físico alemán (1777-1855). Director del observatorio de Gotinga. En su tesis doctoral proporcionó la primera demostración del teorema fundamental del álgebra.

[3]George Gabriel Stokes, matemático y físico irlandés (1819-1903). Trabajó en dinámica de fluidos. Ver ecuación de Navier-Stokes en la asignatura de fluidos.

$$\int_P^A \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \equiv V(\vec{r}) \; ; \tag{1.17}$$

cuando esto no conduce a una integral impropia se toma el punto fijo A a distancia infinita, $V(r \to \infty) = 0$, como sucede en electrotática. Si P y Q son puntos próximos situados en $\vec{r}$ y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} V(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = \Delta V \simeq \nabla V \cdot \Delta\vec{r} \\[2ex] V(\vec{r}) - V(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \int_P^Q \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \simeq \vec{w} \cdot \Delta\vec{r} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{w} = -\nabla V \tag{1.18}$$

CAPÍTULO 2

Operadores diferenciales en Coordenadas cilíndricas y esféricas.

En este capítulo mostramos expresiones de los operadores operaciones utilizados en coordenadas cilíndricas y esféricas. En lo que sigue p es una función escalar mientras que $\vec{w}$ es una función vectorial.

Recordamos las definiciones para coordenadas rectangulares.
El vector gradiente de p se define como:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}, \tag{2.1}$$

El escalar divergencia de $\vec{w}$ se define como:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{2.2}$$

El vector rotacional de $\vec{w}$ se define como:

$$\nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{2.3}$$

Finalmente recordamos la definición de la laplaciana de un campo escalar:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{2.4}$$

Introducimos seguidamente las coordenadas curvilíneas de gran utilidad en electromagnetismo.

2.1. Coordenadas cilíndricas

La figura 2.1 muestra las coordenadas cilíndricas de un punto, siendo $\vec{k}$, $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\phi}_1$ vectores unitarios en direcciones ortogonales entre sí. La distancia del punto al eje z está dada por ρ mientras que ϕ es el ángulo acimutal. El vector de posición es por tanto:

$$\vec{r} = \rho\vec{\rho}_1 + z\vec{k} \tag{2.5}$$

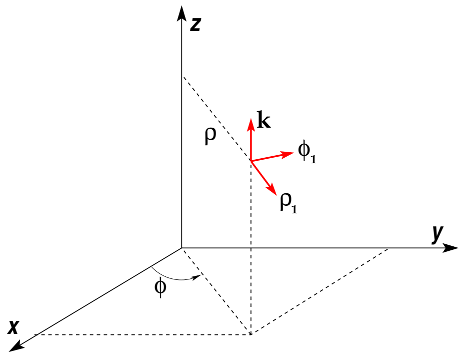


Figura 2.1: Coordenadas cilíndricas

Aplicando ahora la regla de la cadena para campos vectoriales tenemos la siguiente expresión para el operador gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\vec{\rho}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \phi}\vec{\phi}_1 + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}. \tag{2.6}$$

La siguiente expresión para el operador divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho w_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}. \tag{2.7}$$

Para el operador rotacional tenemos:

$$\nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w_z}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial z}\right)\vec{\rho}_1 + \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial \rho}\right)\vec{\phi}_1 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho w_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial w_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{k} \tag{2.8}$$

Finalmente para la laplaciana de campo escalar p obtenemos:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{2.9}$$

2.2. Coordenadas esféricas

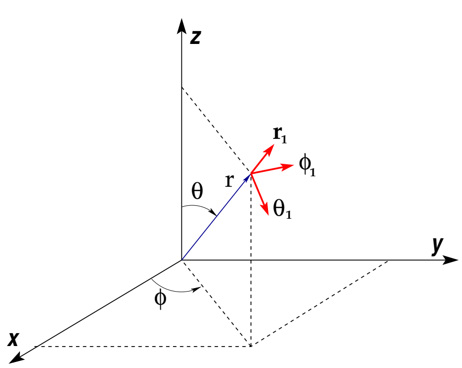


Figura 2.2: Coordenadas esféricas

La figura 2.2 muestra las coordenadas esféricas de un punto donde r es la distancia del punto al origen, θ es el ángulo entre el eje z y el radio vector, y ϕ es el ángulo acimutal. Los vectores unitarios $\vec{r}_1$, ϕ_1 y θ_1 son ortogonales entre sí siendo en este caso el vector de posición:

$$\vec{r} = r\,\vec{r}_1 \tag{2.10}$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena para funciones vectoriales tenemos en coordenadas esféricas las correspondientes expresiones para los operadores gradiente,

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{\theta}_1 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}\vec{\phi}_1 \tag{2.11}$$

divergencia

$$\nabla\cdot\vec{w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\,w_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_\phi}{\partial\phi} \tag{2.12}$$

rotacional

$$\nabla\wedge\vec{w} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\,w_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{r}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\,w_\phi)}{\partial r}\right)\vec{\theta}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,w_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial\theta}\right)\vec{\phi}_1 \tag{2.13}$$

y laplaciana

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi^2}. \tag{2.14}$$

CAPÍTULO 3

Problemas propuestos

1. Dado el campo escalar $P = f(r)$ y el vectorial $\mathbf{w} = \mathbf{r}\ f(r)$, utilizando coordenadas rectangulares, hallar en términos de f y de sus derivadas ordinarias:

   a) ∇P

   b) $\nabla \cdot \mathbf{w}$

   c) $\nabla \wedge \mathbf{w}$

   d) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})$

   e) $\nabla^2 P$

   f) $\nabla^2 \mathbf{w}$

   Hacer lo mismo en utilizando coordenadas esféricas.

2. Dado el campo vectorial adimensional $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + (2 - yz)\mathbf{j} + (\frac{z^2}{2} - 1)\mathbf{k}$, hallar:

   a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$

   b) $\nabla \wedge \mathbf{A}$

   c) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ en el punto $C(a, a, a)$.

   d) Flujo de $\mathbf{A}$ a través de la esfera de centro C y radio $3a$.

   e) Flujo de $\mathbf{A}$ a través de la superficie del triángulo de vértices (a, O, O), (O, a, O) y (O, O, a).

3. Dado el campo vectorial adimensional: $\mathbf{A} = 2xz\mathbf{i} + z \sin x\mathbf{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\mathbf{k}$

   a) Circulación de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a lo largo del cuadrado de lado 2, situado en el plano $z = 2$, y con lados paralelos al los ejes x e y.

   b) Circulación de $\mathbf{A}$ a lo largo de la circunferencia situada en el plano XY, con centro en el origen y radio 2.

c) Flujo de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a través de la superficie del cuadrado definido en el punto $3a$.

d) Flujo de $\mathbf{A}$ a través de la semiesfera de centro el origen y radio 2, que se apoya en la circunferencia definida en $3b$ y situada por encima del plano XY.

CAPÍTULO 4

Campo electrostático

4.1. Introducción

El electromagnetismo es la disciplina que estudia los campos eléctricos y magnéticos y su interacción con la materia.

Históricamente se estudian los campos eléctricos y posteriormente, con ayuda de la pila de A. Volta se generan corrientes y se producen campos magnéticos. Tras varios siglos de investigaciones experimentales y teóricas, fue James Clerk Maxwell, "El hombre que lo cambió todo para siempre', [1] quien sintetizó todos estos los conocimientos en cuatro ecuaciones.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad \nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{4.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}, \qquad \nabla \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}, \tag{4.2}$$

cuyo significado se verá a lo largo de la asignatura.

Las ecuaciones de Maxwell describen los campos eléctricos, $\vec{E}$, y magnéticos, $\vec{B}$, en los que se basan los motores eléctricos, por ejemplo. De ellas se deduce la propagación de ondas electromagnéticas posibilitando la comunicación inalámbrica. Esta ecuaciones, no son invariantes bajo la transformaciones de Galileo. La explicación de esto la daría definitivamente A. Einstein en 1905 con la Teoría Especial de la Relatividad.

Es evidente que las ecuaciones de Maxwell cambiarían la historia de la humanidad forma irreversible, tal como lo expresaría Richard Feynman en sus The Feynman Lectures on Physics: "...no cabe la menor duda de que se considerará que el hecho más significativo del siglo XIX es el descubrimiento realizado por Maxwell de las leyes del electromagnetismo. La Guerra de Secesión americana quedará reducida a algo insignificante comparada con este importante hecho científico que tuvo lugar en la misma década".

El resto de la asignatura está dedicada a entender las ecuaciones de Maxwell (4.1) y (4.2). Para ello se parte de casos sencillos, donde uno de los campos $\vec{E}$ o $\vec{B}$ es cero o bien son constantes, es decir independientes del tiempo.

[1] Expresión que utilizó A. Einstein en 1930 para definir a Maxwell

4.2. Campo electrostático

Los campos electrostáticos se caracterizan por ser $\vec{E}$ independiente del tiempo. En caso de existir un campo $\vec{B}$, este será igualmete independiente del tiempo.

En esta sección introduciremos la primera de las Ec.(4.2) mediante el estudio de la fuerzas electrostáticas.

La fuerza electrostática de un sistema de partículas con cargas q_j en $\vec{r}_j$, sobre otra carga q en $\vec{r}$, viene dada por la ley de **Coulomb**[2](ver figura (4.1.a))

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{q_j q(\vec{r} - \vec{r}_j)}{\mid \vec{r} - \vec{r}_j \mid^3} \tag{4.3}$$

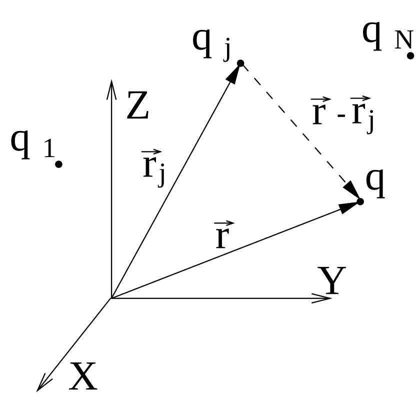
siendo ε_0 la *constante eléctrica*, (ver apéndice B). Desde un punto de vista puramente formal podemos decir que las cargas $\{q_j\}$ crean un campo electrostático

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j q_j \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} \tag{4.4}$$

de modo que una carga arbitraria q situada en un punto arbitrario $\vec{r}$ sufre una fuerza $\vec{F}_e = q\vec{E}(\vec{r})$. Para una distribución de carga de densidad $\rho_e(\vec{r})$ en lugar de un sistema de cargas puntuales se tendrá (ver figura (4.1.b))

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \rho_e(\vec{r'}) \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \mathrm{d}v' \tag{4.5}$$

donde v es cualquier volumen fuera del cual $\rho_e = 0$.



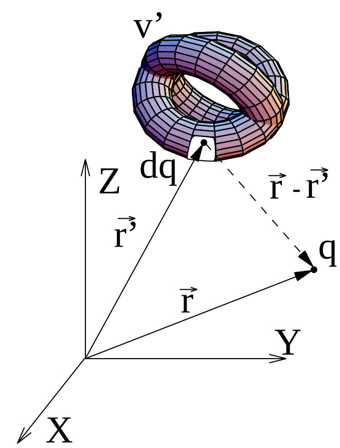


Figura 4.1: a) El sistema de cargas puntuales crea un campo $\vec{E}$ en las proximidades de q según (4.4). b) El volumen v' con densidad de carga ρ_e crea un campo $\vec{E}$ en las proximidades de q según (4.5), siendo $dq = \rho_e \, dv'$.

[2]Charles Augustin Coulomb (1736-1806). Ingeniero francés. Publicó su ley en 1785.

El flujo de la parte del campo debida a q_j en (4.4), a través de una superficie esférica S_j con centro $\vec{r}_j$, es

$$\int_{S_j} \vec{E}_j(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_j \int_{S_j} \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|} dA = \frac{1}{\varepsilon_0} q_j. \tag{4.6}$$

El teorema de Gauss hace válido este resultado para cualquier otra superficie que encierre a q_j, ya que la divergencia $\nabla \cdot \vec{E}_j$ resulta ser nula (salvo en $\vec{r}_j$, donde $\vec{E}_j$ no está definida). Se sigue que el flujo del campo total $\vec{E}$ a través de una superficie S es $\frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_j$, siendo $\sum q_j$ la carga encerrada por S; en el caso de una distribución continua $\rho(\vec{r})$, que no da lugar a singularidades en $\vec{E}$ y $\nabla \cdot \vec{E}$, se tiene, usando de nuevo el teorema de Gauss,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{E}\, dv = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho\, dv \tag{4.7}$$

por lo que finalmente

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}. \tag{4.8}$$

La Ec.(4.8) es la primera de las ecuaciones de Maxwell, (4.2). Se tiene similarmente $\nabla \wedge \vec{E}_j = 0$ (salvo en $\vec{r}_j$, de nuevo), pero como ahora se tiene $\int_{S_j} \vec{E}_j \wedge d\vec{S} = 0$, ya que $\vec{E}_j$ y $d\vec{S}$ son vectores paralelos. Por tanto, en virtud del segundo teorema de Gauss, ver página 7, tenemos $0 = \int_{S_j} \vec{E}_j \wedge d\vec{S}_j = \int_v \nabla \wedge \vec{E}_j dv$, por tanto resulta para una distribución $\rho(\vec{r})$,

$$\nabla \wedge \vec{E} = 0. \tag{4.9}$$

Finalmente, de la Ec.(4.9) se deduce que el campo electrostático $\vec{E}$ puede expresarse mediante una función potencial

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{4.10}$$

donde V es el potencial electrostático. Utilizando (4.8) tenemos:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}. \tag{4.11}$$

Las descripciones (4.5), (4.8), (4.9), (4.10) y (4.11) del campo electrostático $\vec{E}$ son equivalentes. Aún así, la Ec. (4.8) es general, aplicable también a campos eléctricos no electrostáticos.

La ecuación (4.11) se denomina ecuación de Poisson[3]. En el caso $\rho_e = 0$, se denomina ecuación de Laplace[4].

Aplicando el teorema fundamental del cálculo para integrales de línea a la ecuación (4.10) tenemos

$$\int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_a^b \nabla V \cdot d\vec{l} = V(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_b) \tag{4.12}$$

Expresión muy útil para evaluar el potencial a partir del campo electrostático y que tiene una relación directa con el trabajo como analizamos en la siguiente sección. Introduciendo en

[3] Siméon Denis Poisson, físico y matemático francés (1781-1840). Es importante señalar que la ecuación (4.8) tiene validad general, incluso cuando los campos dependan del tiempo.

Se inició precozmente; a los 18 años publicó una memoria de diferencias finitas. Destacó por sus descubrimientos en electricidad, geometría diferencial y la teoría de probabilidades.

[4] Ver nota 1 en pag. 6.

(4.12) el valor del campo $\vec{E}$ según las expresiones (4.4) y (4.5) obtenemos para el potencial electrostático

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}-\vec{r_j}|}\ , \qquad \text{o bien} \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho(\vec{r'})\ \mathrm{d}v'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{4.13}$$

Las fórmulas que contienen una distribución de carga *suave* $\rho_e(\vec{r})$ en vez de cargas puntuales describen macroscópicamente el campo $\vec{E}$ y el potencial V eléctricos (ρ_e , $\vec{E}$ y V son valores promediados sobre volúmenes *macroscópicamente* pequeños). Hay, sin embargo, gran variedad de problemas en Electrostática en que se trata a las cargas como puntuales. Por otra parte, en una descripción macroscópica se puede hablar, en ciertos problemas, de densidades de carga por unidad de área σ_e, y unidad de longitud λ_e.

La Ec.(4.7) se denomina **Ley de Gauss**

$$\int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho_e\,\mathrm{dv} = \frac{Q_v}{\varepsilon_0} \tag{4.14}$$

donde Q_V es la carga contenida en el volumen V, aún cuando $\vec{E}$ es el campo creado por **todas** las cargas tanto interiores como exteriores a S. En problemas con alta simetría, la ley de Gauss conduce a $\vec{E}$ fácilmente si se escoge S apropiadamente.

4.3. Energía

4.3.1. Energía potencial electrostática

El trabajo que realiza la fuerza del campo electrostático para trasladar una carga q de un punto a hasta otro punto b es

$$\int_a^b \vec{F}_e\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -q\int_a^b \nabla V\cdot d\vec{l} = q\left[V(\vec{r}_a)-V(\vec{r}_b)\right], \tag{4.15}$$

de lo que resulta que la energía electrostática de dicha partícula es $U_e = qV$,

4.3.2. Energía de un sistema de partículas cargadas

Por otra parte, en la ecuación de la energía potencial de un sistema de partículas, U_e es

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\text{pares}} \frac{q_i q_j}{\mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid} \tag{4.16}$$

y la suma se extiende a todas las parejas $\{i,j\}$. Para una distribución continua de cargas, la energía potencial U_e se puede escribir en función del campo $\vec{E}$, partiendo de la expresión para cargas puntuales,

$$U_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{2}\frac{q_i q_j}{\mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid} = \sum_i \frac{1}{2}q_i\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j\neq i}\frac{q_j}{\mid \vec{r}_i - \vec{r}_j \mid}\right] = \sum_i \frac{1}{2}q_i V_{q_i}(\vec{r}_i), \tag{4.17}$$

donde se excluye en $V_{q_i}(\vec{r}_i)$ el campo creado por q_i; el factor 1/2 se debe a que la doble suma cuenta dos veces cada pareja (ver problema 4). Para una distribución continua se tiene $V_{q_i} = V$ y

$$U_e = \int_v \frac{1}{2}\rho_e(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}v = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int_v V\ \nabla^2 V\ \mathrm{d}v = \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\int_S V\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}_{\to 0} + \int_v \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\ \mathrm{d}v; \tag{4.18}$$

si V cubre todo el espacio se comprueba que la integral de superficie es nula para cualquier distribución de masas encerrada en un volumen finito. En la tercera igualdad de (4.18) hemos utilizado la relación

$$\nabla\cdot(g\vec{A}) = g\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla g \tag{4.19}$$

identificando la función escalar con V y la vectorial con ∇V.

4.4. Similitudes con el campo gravitatorio

De la fuerza de Newton de una masa m_j en $\vec{r}_j$ sobre otra masa m en $\vec{r}$,

$$\vec{F}_G = -G\sum_j \frac{m_j m(\vec{r}-\vec{r}_j)}{|\ \vec{r}-\vec{r}_j\ |^3} \tag{4.20}$$

se deducen fórmulas enteramente similares a las de la electrostática (basta el cambio $q \to m$, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G$ siendo G la *constante de gravitavión de Newton* (ver apéndice B) y $\rho_e \to \rho$, donde $\rho \equiv \delta m/\delta v$ es la densidad; en vez de $\vec{E}$ y V escribimos $\vec{f}_G$ y ψ_G): $\vec{F}_G = m\vec{f}_G$

$$\vec{f}_G(\vec{r}) = -G\sum_j m_j\frac{\vec{r}-\vec{r}_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|^3} \qquad \vec{f}_G(\vec{r}) = -G\int_v \rho(\vec{r'})\ \mathrm{d}v'\,\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3} \tag{4.21}$$

$$\nabla\wedge\vec{f}_G = 0, \qquad \nabla\cdot\vec{f}_G = -4\pi G\rho \tag{4.22}$$

$$\vec{f}_G = -\nabla\psi_G, \qquad \nabla^2\psi_G = 4\pi G\rho \tag{4.23}$$

$$U_G = m\psi_G, \qquad \psi_G = -G\sum_j \frac{m_j}{|\vec{r}-\vec{r}_j|}, \qquad \psi_G = -G\int_v \frac{\rho(\vec{r'})\ \mathrm{d}v'}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{4.24}$$

ó bien

$$U_G = -G\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{2}\frac{m_i m_j}{|\ \vec{r}_i-\vec{r}_j\ |} = \int_v \frac{1}{2}\rho(\vec{r})\mathrm{d}v\psi_G(\vec{r}) = -\frac{1}{8\pi G}\int_v f_G^2\ \mathrm{d}v, \tag{4.25}$$

donde la última integral se extiende a todo el espacio.

4.5. Diferencias entre campos electromagnéticos y gravitatorios

Si bien el concepto de campo se ha introducido formalmente en la Ec.(4.4) como otra manera de expresar la fuerza electrostática, conviene indicar que el campo tiene existencia física propia. Actualmente se descarta la existencia en la naturaleza de acciones a distancia de forma instantánea como parece indicar la ley de Coulomb o la ley de gravitación de Newton. Lo que sucede es que la partícula cargada actúa en su entorno inmediato produciendo un campo y este se propaga con velocidad finita hasta el entorno de la otra partícula cargada que detecta este campo. El campo es por tanto el mediador indispensable para que las partícula lejanas interaccionen entre sí. Este efecto desaparece si suponemos que las partículas permanecen en reposo (marco de aplicación de la ley de Coulomb), es decir suponemos que el campo producido por las carga ha tenido suficiente tiempo para viajar de unas cargas a otras. En este límite el campo aparece meramente como otra forma de expresar la fuerza entre cargas sin sentido físico adicional. Fue **Faraday** el primer científico que supuso realidad física al campo electromagnético.

Mas allá de la semejanza matemática entre las ecuaciones (4.4) y (4.20) existen diferencias fundamentales entre los fenómenos electromagnéticos y los gravitatorios:

- Existe un campo magnético asociado al campo eléctrico, que como veremos en la sección **??**, es consecuencia de la velocidad finita de propagación de los campos.

- Por otra parte, los campos gravitatorios tienen la propiedad fundamental de que todos los cuerpos se mueven en ellos de la misma manera, con independencia de su masa. Esto hace que los campos gravitatorios, mas allá de la Ley de Newton, se describan como fenómenos que afectan a la geometría espacio-tiempo dentro del marco de la *teoría de general de la relatividad*, que no se tratará en esta asignatura.

- La masa es positiva mientras que la carga eléctrica puede ser positiva o negativa.

- Existe gran diferencia entre las intensidades de las dos fuerzas. Comparamos los modulos de fuerza gravitatoria F_G y electrostatica F_e entre dos protones separados una distancia D
$$\frac{F_G}{F_e} = 4\pi\varepsilon_0 G\left(\frac{m_p}{e}\right)^2 \approx 8\cdot 10^{-47} \tag{4.26}$$
Las constantes que aparecen en la Ec.(4.26) pueden encontrarse en el apéndice B. Nótese que la cantidad adimensional en (4.26), no depende del valor de la constante de gravitación de Newton ni de la constante eléctrica. El valor de dichas constantes está determinado por la definicion de las unidades para m_p y e, de forma análoga a como la definición de K determina la constante de Boltzmann.

- Finalmente mencionar que en el marco de la física de partículas (modelo Standard) la carga de las partículas elementales está bien descrita matemáticamente. Todo lo contrario sucede con la masa de las partículas, ya que su descripción produce graves problemas matemáticos. Para solucionar esto se ha propuesto la existencia de una nueva partícula, el bosón de Higgs, que ha sido "detectada" el 4 de julio de 2012 en el *LHC* del **CERN** (ver *www.cern.ch*).

4.6. Electrostática de Conductores

Existen sistemas macroscópicos llamados conductores en los que hay cargas que pueden moverse con libertad en su *interior*; tales son los casos de metales líquidos o sólidos (cristales), que contienen electrones libres, y de sales disueltas en agua, que contienen iones. Un campo macroscópico y estacionario $\vec{E}$ dentro de un conductor provoca un flujo de corriente, como se verá más adelante.

Consideremos conductores metálicos fijados en el espacio y cargados, o en presencia de cargas externas dadas. La energía electrostática *macroscópica*,

$$U_e = \frac{1}{2}\int_v \rho_e(\vec{r})V(\vec{r})\mathrm{d}v, \tag{4.27}$$

depende, naturalmente, de la distribución macroscópica de carga en los conductores. Nótese que un conductor con carga neta nula puede tener una distribución de carga no idénticamente nula. Cualquier rearreglo de carga en los conductores, por medio de una corriente macroscópica $\vec{J}$ que no modifica las cargas netas, afecta a U_e y por tanto a la energía interna U del sistema, ya que $U + U_e = \text{cte}$ (conservación de la energía). En consecuencia, en el equilibrio termodinámico, que es la situación considerada en *Electrostática* de conductores, U_e debe ser mínima (recuérdese que la entropía es máxima cuando U es máxima: $\partial S/\partial U \equiv 1/T$ es positiva).

En el equilibrio termodinámico no puede haber corriente macroscópica $\vec{J}$. De la condición $\vec{J} = 0$ se sigue que, en Electrostática y dentro de un conductor, $\vec{E}$ y $\rho_e = \varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E}$ son nulos. Esto implica así mismo que el potencial electrostático en el interior del conductor en constante. En su superficie (S) puede existir una distribución de carga por unidad de área $\sigma_e(\vec{r})$, ya que los electrones no son libres para dejar el conductor, cuya carga neta es por tanto $\int_S \sigma_e(\vec{r})\mathrm{d}S$. Del uso local de las ecuaciones de la Electrostática se sigue que el campo eléctrico $\vec{E}$ es normal a la superficie en su inmediato exterior y viene dado por $\vec{E} = \vec{n}\,\sigma_e/\varepsilon_0$, siendo $\vec{n}$ la normal exterior. La energía electrostática de un sistema de conductores toma una forma particularmente simple,

$$U_e = \frac{1}{2}\int_v \rho_e(\vec{r})V(\vec{r})\mathrm{d}v = \sum_\alpha \frac{1}{2}V_\alpha \int_{S_\alpha} \sigma_e(\vec{r})\,\mathrm{d}S_\alpha = \sum_\alpha \frac{1}{2}V_\alpha Q_\alpha, \tag{4.28}$$

donde V, Q y S son potencial, carga y área, y la suma se extiende a los conductores del sistema.

El problema central de la Electrostática de conductores es determinar V fuera de éstos, conociendo, bien el potencial, bien la carga de cada uno; se puede demostrar que existe una solución única a este problema dada por la expresión explícita

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_\alpha \int_{S\alpha} \frac{\sigma_e(\vec{r'})\mathrm{d}S'}{\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} \tag{4.29}$$

que sin embargo, no es útil porque antes de resolver el problema no se conoce la función $\sigma_e(\vec{r})$ definida sobre las superficies de los conductores; por el contrario una vez hallado V en el exterior, se obtiene σ_e de la igualdad $\sigma_e = -\varepsilon_0\vec{n}\cdot\nabla V$.

La solución única para V se puede conseguir manteniendo las condiciones de contorno, es decir el potencial en la superficie geométrica de los conductores. De este modo se pueden sustituir los conductores por distribuciones de cargas que mantengan las mismas condiciones en los lugares geométricos que ocupaban las superficies de los conductores. El resultado para el campo y el potencial coincidirá con el del problema original fuera de los conductores. Este procedimiento se llama *método de las imágenes* (ver problema 8).

Se comprueba que un conductor descargado, alejado de un sistema de conductores cargados, es siempre atraído por estos.

Se demuestra fácilmente que en una cavidad de un conductor (una región enteramente limitada por éste) que no contiene carga, se tiene $\vec{E} = 0$ y $V = \text{cte}$. Si la cavidad está limitada por dos conductores 1 y 2, a potenciales diferentes V_1 y V_2, se tiene un "condensador"; de la ley de Gauss se sigue la relación $Q_2 = -Q_1$, siendo Q_1 y Q_2 las cargas en las superficies de 1 y 2 que limitan la cavidad interior. La energía del condensador vale por tanto

$$U_e = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 = \frac{1}{2}Q_1(V_1 - V_2). \tag{4.30}$$

Como la determinación de $\vec{E}$ y V en la cavidad, fijados V_1 y V_2, tiene solución única, Q_1 es una función de V_1 y V_2, o más bien de su diferencia, ya que $\vec{E}$ es independiente de la elección de origen de potencial. De la linealidad de las ecuaciones de la electrostática (ver por ejemplo la ec. 4.13) se deduce que Q_1 es una función lineal, $Q_1 = C(V_1 - V_2)$, donde C es la capacidad que sólo depende de la geometría de la cavidad. Se tiene por tanto

$$U_e = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C} \tag{4.31}$$

y de la expresión $U_e = \int_{V(\text{cavidad})} \frac{1}{2}\varepsilon_0\ E^2 \mathrm{d}V$, se sigue que la capacidad C es positiva.

Los resultados anteriores apenas se modifican si, como es usual, la cavidad no está enteramente limitada por los conductores. Por otra parte conectando varios condensadores en serie, la capacidad del conjunto viene dada por

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_\alpha} \tag{4.32}$$

y en caso de conectarlos en paralelo tenemos

$$C = \sum C_\alpha \tag{4.33}$$

La unidad de capacidad es el faradio[5] ($F \equiv CV^{-1}$). Para condensadores utilizados comunmente en dispositivos en electrónicos, se utilizan submúltiplos desde pF hasta μF.

Para la capacidad de un solo conductor, considérese que el segundo conductor se sitúa en el infinito. Ver pregunta $11c$ en la sección de problemas.

[5]Michael Faraday (1791-1867). Químico y Físico británico. En 1831 descubrió el fenómeno de inducción magnética (ver sec. **??** en la página **??**).

4.7. Electrostática de dieléctricos

Los medios no conductores llamados dieléctricos no contienen cargas libres por lo que en el interior de un dieléctrico puede existir un campo electrostático macroscópico. Aproximaremos el dieléctrico como un conjunto de cargas puntuales, los electrones y protones que contiene, por lo que como cuestión previa a la determinación del campo creado por un dieléctrico dentro y fuera de él, consideremos el potencial $V(\vec{r})$ de un sistema de cargas puntuales $\{q_j\}$, con carga neta $\sum q_j = 0$, contenidas en una región de un tamaño característico R. Lejos de dicha región, es decir, para puntos C de ella donde $\mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid >> R$, se tiene

$$V(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_j \mid} \simeq \sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid}\left[1 + \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_c)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_c)}{\mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid^2} + ...\right] \tag{4.34}$$

o bien

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum q_j}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid} + \sum_j \frac{q_j(\vec{r}_j - \vec{r}_c)}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{\mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid^3} \tag{4.35}$$

es decir

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum q_j}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid} + \vec{p} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_c)}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid^3} \tag{4.36}$$

donde $\vec{p} \equiv \sum q_j(\vec{r}_j - \vec{r}_c)$ es el *momento dipolar eléctrico* respecto del punto $\vec{r}_c$. Finalmente tenemos

$$V(\vec{r}) \simeq \frac{\sum q_j}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid} - \vec{p} \cdot \nabla \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid}\right] + ... \tag{4.37}$$

Para un sistema de cargas con carga neta nula, $\sum q_j = 0$, el término dominante es el del dipolo, a además, el vector $\vec{p}$ no depende de $\vec{r}_c$ siendo $\vec{p} = \sum q_j \vec{r}_j$. El momento dipolar eléctrico de un par de cargas $q(> 0)$ y $-q$ es simplemente

$$\vec{p} = q(\vec{r}_{+q} - \vec{r}_{-q}) = q\vec{a}, \tag{4.38}$$

siendo $\vec{a}$ el vector que parte de la carga negativa y tiene su extremo en la carga positiva. En la aproximación considerada $\mid \vec{r_j} - \vec{r}_c \mid << \mid \vec{r} - \vec{r}_c \mid$, por tanto $\vec{r}_c$ puede situarse en el punto medio de las dos cargas del dipolo. En este caso el segundo sumando de la Ec.(4.40) proporciona el campo de un dipolo para puntos alejados de este.

Analicemos ahora el potencial creado por un elemento macroscópico de volumen δv_α de un dieléctrico formado por moléculas neutras,

$$V(\vec{r}) = \sum_\alpha \delta V_\alpha(\vec{r}). \tag{4.39}$$

Tenemos pues de (4.37):

$$\delta V_\alpha(\vec{r}) \simeq -\sum_s \vec{p}_s \cdot \nabla \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_{cs} \mid}\right) \tag{4.40}$$

donde el subíndice s recorre todas las moléculas (número enorme) del elemento del volumen δv_α. Nótese que el primer término de (4.37) no aparece en por ser neutras la moléculas del dieléctrico. El vector $\vec{p}_s$ es el dipolo de la molécula s. Para puntos del interior del dieléctrico el uso de la aproximación (4.37) ignora las variaciones rápidas de potencial en las proximidades de cada molécula, lo que es permisible para calcular un campo promediado, campo macroscópico. Por otra parte, como δv_α contiene un gran número de moléculas, se puede esperar que, al igual que ρ_e, o la densidad másica usual, el vector polarización definido como sigue

$$\vec{P}(\vec{r}_\alpha) \equiv \frac{\sum_s \vec{p}_s}{\delta v_\alpha} \tag{4.41}$$

varíe suavemente de un elemento a otro. Se tiene entonces ($\vec{r}_{cs} \simeq \vec{r}_\alpha$)

$$\delta V_\alpha(\vec{r}) \simeq -\delta v_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha) \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_\alpha \mid}, \tag{4.42}$$

por lo que el potencial debido a todo el dieléctrico será

$$V(\vec{r}) \simeq -\sum_\alpha \delta v_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha) \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}_\alpha \mid} \tag{4.43}$$

o bien en forma integral

$$V(\vec{r}) \simeq -\int_v \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} \mathrm{d}v' \tag{4.44}$$

donde v es cualquier volumen que encierre al dieléctrico. Utilizando la notación $\nabla' \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z'}$ tenemos $\nabla(1/\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid) = -\nabla'(1/\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid)$. La identidad

$$\nabla' \cdot \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} = \frac{\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{\mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} \tag{4.45}$$

nos permite sustituir el integrando en (4.44) y utilizar el teorema de Gauss para obtener

$$V(\vec{r}) = \int_S \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \mathrm{d}\vec{S}'}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} + \int_v \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 \mid \vec{r} - \vec{r}' \mid} dv', \tag{4.46}$$

Los resultados generales de la Electrostática muestran que el segundo sumando de la Ec.(4.46) es la solución de la ecuación

$$\nabla^2 V = \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \quad , \text{ o bien } \; \nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}. \tag{4.47}$$

Existe por tanto una densidad macroscópica de carga *real*, debida a la polarización del dieléctrico, $\rho_{ep} \equiv -\nabla \cdot \vec{P}$. El mismo argumento indica que en cada punto de la superficie de un dieléctrico hay una densidad de carga $\sigma_{ep} \equiv \vec{P} \cdot \vec{n}$, donde $\vec{P}$ es la polarización en el punto (interior a su superficie) y $\vec{n}$ es la normal exterior en él. Además de la carga de polarización pueden existir cargas libres (por ejemplo en la superficie de conductores) con densidad ρ_e^*; se tiene entonces

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-\nabla \cdot \vec{P} + \rho_e^*}{\varepsilon_0} \quad , \qquad \nabla \wedge \vec{E} = 0, \tag{4.48}$$

donde $-\nabla \cdot \vec{P} + \rho_e^*$ es la densidad total. Usualmente se define el vector *desplazamiento eléctrico*, designado por $\vec{D}$ como

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{4.49}$$

La motivación de la definición se debe a que su divergencia depende tan sólo de las cargas libres como se sigue de (4.48)

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e^* \tag{4.50}$$

Usualmente, un campo macroscópico (promediado) $\vec{E}$ es muy pequeño comparado con el campo (microscópico) que actúa sobre una carga en una molécula, debido a las cargas vecinas. Desarrollando $\vec{P}(\vec{E})$ en potencias de $\vec{E}$, bastará retener el primer término no nulo:

$$\vec{P}(\vec{E}) = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\,\vec{E} + ... \tag{4.51}$$

La constante de proporcionalidad, se ha escrito $\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) > 0$, donde ε_r es adimensional y se denomina *constante dieléctrica* o *permitividad relativa* del material. Así mismo se define la *susceptibilidad eléctrica* del dieléctrico como la cantidad adimensional $\chi_e = \varepsilon_r - 1$.

La Ec. (4.51) puede ponerse en términos del vector desplazamiento $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} + ... \tag{4.52}$$

En las Ecs.(4.51, 4.52) no hay término independiente del campo $\vec{E}$ (salvo en los cristales llamados piezoeléctricos), bien porque las moléculas carezcan de dipolo en ausencia de campo, bien porque teniendo cada molécula un dipolo permanente, la agitación térmica conduzca en ausencia de campo a un valor nulo de la suma $\sum \vec{p}_s \equiv \delta V_\alpha \vec{P}(\vec{r}_\alpha)$ extendida a un número elevado de moléculas. El término dominante es por tanto el proporcional a $\vec{E}$; Introduciendo las aproximaciones (4.51) y (4.52) en (4.48) resulta

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho_e^*}{\varepsilon_0} \qquad , \qquad \nabla \wedge \vec{E} = 0. \tag{4.53}$$

o bien

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_e^* \qquad , \qquad \nabla \wedge \vec{E} = 0. \tag{4.54}$$

Si hay una σ_e^* en la superficie de un conductor, hay una $\sigma_{ep} = -\sigma_e^*(\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r$ en el dieléctrico adyacente. Aplicando el teorema de Gauss, a la primera ecuación 4.54 tenemos la *Ley de Gauss* para dieléctricos, análoga a la ec. (4.14),

$$\int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_v \rho_e^*\,\mathrm{dv}. \tag{4.55}$$

Puede que el espacio entre conductores (donde existe campo eléctrico) se encuentre lleno de un único dieléctrico de constante uniforme ε_r. Se tiene entonces $\nabla \wedge (\varepsilon_r \vec{E}) = \varepsilon_r \nabla \wedge \vec{E} = 0$; *para cargas dadas, en conductores de geometría dada*, el campo $\varepsilon_r \vec{E}$ en presencia de dieléctrico resulta igual al campo $\vec{E}$ en su ausencia. Como se tiene $\varepsilon_r > 1$, el dieléctrico disminuye el campo eléctrico. Una consecuencia de esto es que un dieléctrico aumenta la capacidad de un condensador en un factor ε_r.

4.8. Energía almacenada en un condensador

La energía almacenada en un condensador es trabajo necesario para cargar dicho condensador

$$U_c = \int_0^Q V' dQ' = \int_0^Q \frac{Q' dQ'}{C} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} V^2 C; \tag{4.56}$$

Esa energía es mayor que la puramente electrostática U_e dada por la Ec.(4.18), es decir

$$U_e = \frac{1}{2}\int_v \rho_e(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}v \tag{4.57}$$

siendo ρ_e la densidad de carga eléctrica. Para el caso de un material dieléctrico, $\rho_e = \rho + \rho_p$, siendo ρ la densidad de carga libre o de conducción mientras que ρ_p es la densidad de carga de polarización del dieléctrico. Tenemos por tanto:

$$\rho_e = \rho + \rho_p = \nabla\cdot\vec{D} - \nabla\cdot\vec{P} = \nabla\cdot(\vec{D}-\vec{P}) \tag{4.58}$$

Introduciendo esto en la integral (4.57) tenemos

$$U_e = \frac{1}{2}\int_v \nabla\cdot(\vec{D}-\vec{P})V(\vec{r})\,\mathrm{d}v \tag{4.59}$$

Por lo que utilizando la relación (4.19), como ya hicimos para la Ec.(4.18), y teniendo en cuenta que

$$U_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2\ \mathrm{d}v; \tag{4.60}$$

llagamos finalmente la siguiente ecuación para las distintas energías del condensador:

$$\underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2\ \mathrm{d}v}_{U_e} = \underbrace{\frac{1}{2}\int_v \vec{D}\cdot\vec{E}\ \mathrm{d}v}_{U_c} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_v \vec{P}\cdot\vec{E}\ \mathrm{d}v}_{U_p} \tag{4.61}$$

es decir, $U_c = U_e + U_p$ donde U_p es una energía debido al vector de polarización del material dieléctrico, que naturalmente está ausente en el vacío. Tenemos por tanto que la energía U_c almacenada en el condensador con dieléctrico es suma de la energía puramente electrostática U_e más la energía U_p, almacenada al crear los dipolos en las moléculas del dieléctrico.

CAPÍTULO 5

Problemas propuestos

1. Siendo $\vec{F}_e$ la fuerza electrostática que N cargas puntuales q_j situadas en $\vec{r}_j$ ejercen sobre una carga unidad situada en $\vec{r}$, demostrar:

   a) $\nabla \wedge \vec{F}_e = 0$ para $\vec{r} \neq \vec{r}_j$.

   b) $\nabla \cdot \vec{F}_e = 0$ para $\vec{r} \neq \vec{r}_j$.

   c) El flujo de $\vec{F}_e$ a través de una superficie cerrada que contenga a las N cargas, es $\frac{\sum q_j}{\varepsilon_0}$

   d) Para una distrubución continua de carga, $\nabla \cdot \vec{F}_e = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

2. Se tienen las siguientes distribuciones de carga:

   a) Distribución con densidad superficial de carga σ en el plano $z = a$.

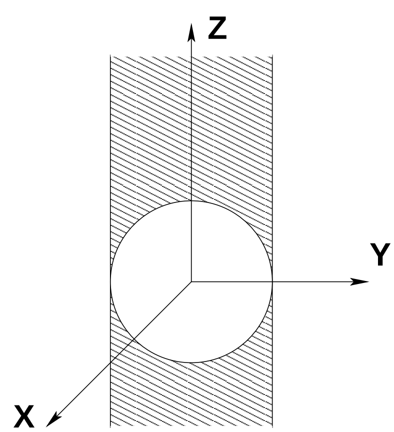
   b) Distribución con densidad superficial de carga σ en el interior del circulo de radio R, con centro el origen de coordenadas y situado en $z = 0$.

   Se pide:

   a) Valor del campo eléctrico en los puntos del eje z.

   b) Trabajo que hay que realizar para mover la carga q desde el punto $(O, O, -b)$ al punto (O, O, b), (se sabe que $b > a$).

3. Dada la distribución de carga de densidad ρ_0 constante en los puntos del cilindro infinito de eje Z y radio R, excepto en los puntos de la esfera de radio R y centro O, calcular:

   a) Valor del campo eléctrico en las distintas regiones del espacio.

   b) Trabajo del campo para trasladar la carga q del punto (O, a, O) a (O, b, O), sabiendo que $b > a > R$.

4. *a*) Sean tres cargas q, $2q$ y $3q$ en (O,O,a), (O,a,O) y (a,O,O) respectivamente. Hallar la energía U_e usando

$$U_e = \sum_{\text{parejas}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \mid \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \mid} = \sum_{\text{cargas}} \frac{1}{2} q_i V_{q_i}(\mathbf{r}_i). \tag{1}$$

Comprobar que la expresión

$$\int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv. \tag{2}$$

diverge (no se usa para cargas puntuales); (1) excluye, [(2) incluye] el potencial de q_o en $\mathbf{r}_i$.

b) Sea una superficie esférica con centro el origen, radio R y densidad superficial $\sigma = \sigma_o$, uniforme. Hallar la energía U_e usando

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dv \quad \text{y} \quad \mathrm{U_e} = \int \frac{1}{2} \mathrm{Vdq} = \int \frac{1}{2} \mathrm{V}\sigma\mathrm{dA}$$

y comprobar que son iguales.

c) Sea una esfera con centro el origen, radio R, densidad volumétrica $\rho(r) = \rho_0 \frac{r}{R}$ $(O < r < R)$. Hallar la energía U_e usando

$$U_e = \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \mathrm{dv} \quad \text{y} \quad \mathrm{U_e} = \sum_{\text{pareja}} \frac{\mathrm{q_i q_j}}{4\pi\epsilon_0 \mid \mathbf{r}_\mathrm{i} - \mathbf{r}_\mathrm{j} \mid}$$

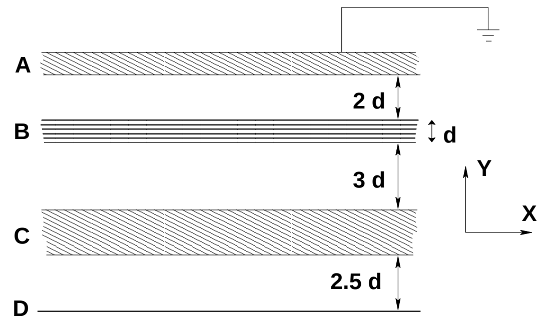
mediante el *montaje* del sistema paso a paso: si $U(Q')$ es la energía cuando se ha alcanzado la carga $Q' < Q$ (Q carga total)

$$U(Q' + \partial Q') = U(Q') + \partial Q' V(Q').$$

Comprobar que el resultado es igual al de (3).

5. Se tiene una distribución de carga de densidad ρ_0 entre las esferas de centro $O(0,0,0)$ y radios $R/2$ y R y dos cargas Q_1 y Q_2 situadas respectivamente en $O(0,0,0)$ y $O'(0,0,R)$. Calcular la energía electrostática del sistema de cargas.

6. Se tienen los conductores y distribuciones de cargas de la figura; A y C son dos conductores planos, infinitos y paralelos estando el A conectado a tierra (potencial nulo); B es una distribución uniforme de densidad volumétrica de carga ρ_0 y espesor d; D es una distribución uniforme de densidad superficial $\sigma = \rho_0 d$. Se pide:

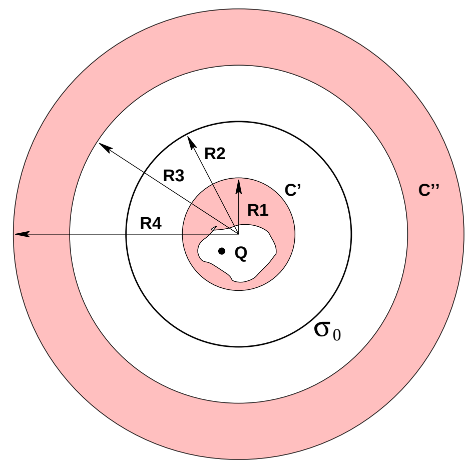


   a) Potencial de C.

   b) Distribución superficial de carga en las cuatro caras de los conductores A y C.

   NOTA: Se sabe que el potencial en $y \to \pm\infty$ es nulo.

7. Un conductor esférico C' de radio R_1 y carga neta $2Q$, tiene un agujero con una carga puntual Q; C' está rodeado por una distribución esférica de carga σ_0 concéntrica, de radio R_2 y carga total $-Q$. Otro conductor C'' en forma de cáscara esférica concéntrica, de radios R_3 y R_4 y carga neta nula se trae desde el infinito hasta alcanzar la disposición de la figura. Se pide:



   a) El potencial en C' y C''.

   b) El trabajo de las fuerzas que hay que aplicar para que el conductor C'' alcance la disposición indicada.

8. *a*) Una esfera conductora de radio R, está en presencia de una carga puntual q_0 situada a una distancia a de su centro. Se sabe que en estas circunstancias y supuesta la esfera con potencial nulo, el campo eléctrico en el exterior de la esfera es igual al producido conjuntamente por la carga q_0 y por otra carga q' situada a la distancia a' del centro (Método de las imágenes). Determinar:
      1) Valores de a' y q'.
      2) Carga total de la esfera.
      3) Fuerza entre la carga y la esfera.

   b) Supuesta la esfera aislada con carga neta Q, determinar:
      1) La carga/s imagen/es.
      2) Potencial de la esfera.
      3) Fuerza entre la carga y la esfera.

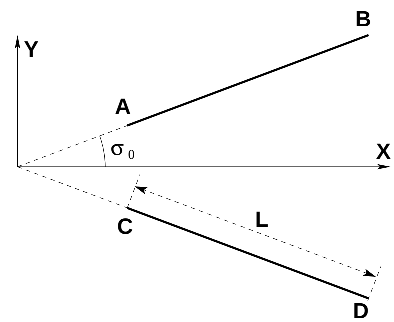
9. En el seno de un campo eléctrico inicialmente uniforme ($\mathbf{E} = E_0\mathbf{k}$) se introduce una esfera conductora descargada de radio R con su centro en el origen de coordenadas, se pide:

a) Campo eléctrico resultante.

b) Densidad superficial de carga sobre el conductor.

NOTA: Ensáyese un potencial eléctrico de la forma $V = az + b\frac{z}{r^3}$, determinando las constantes a y b para que lejos de la esfera el campo tienda al campo inicial y para que la superficie de la esfera sea equipotencial.

10. Un condensador está formado por dos placas cuadradas de lado L, de modo que los lados contiguos al lado AB y al CD (ver figura) son perpendiculares al papel. Hallar la capacidad si el ángulo entre placas es $2\alpha_0$ (α_0 pequeño) y $AC = 2h$. Comprobar que si A y C están fijos y $\alpha_0 \to 0$, se recupera la capacidad de un condensador de placas paralelas.
NOTA: Ensáyese la expresión $V = a + b(\arctan \frac{y}{x})$ (a y b constantes) para el potencial en el espacio entre placas.

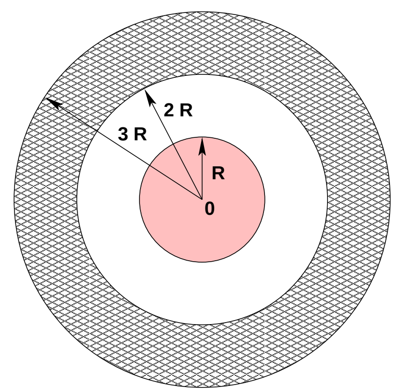


11. Se tiene un conductor esférico de radio R, centro O y carga Q, rodeado por una cáscara de dieléctrico de centro O y radios $2R$ y $3R$ cuya constante dieléctrica es $\varepsilon_r = 1 + \alpha r$ siendo r la distancia al punto O; se pide:

   a) Campo eléctrico en el dieléctrico.

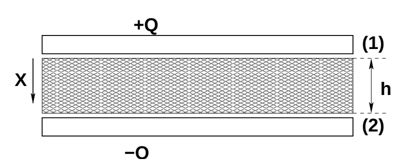
   b) Carga de polarización en el dieléctrico.

   c) Capacidad del sistema. Ver página 21.



12. Se tiene un semiespacio conductor ($y < 0$) conectado a tierra ($V = 0$). El semiespacio $y > 0$ está ocupado por un dieléctrico de constante ε_r. En el punto $\mathbf{r} = a\mathbf{j}$ existe una carga puntual de valor q. Determinar, por el método de las imágenes, la densidad de carga en el dieléctrico.

13. Un condensador plano de área S y distancia entre placas h, tiene una carga Q. Entre sus placas existe un dieléctrico de constante $\varepsilon_r(x)$ tal que vale ε_{r1} en las proximidades de la placa (1) y ε_{r2} en las de la placa (2). Se pide:



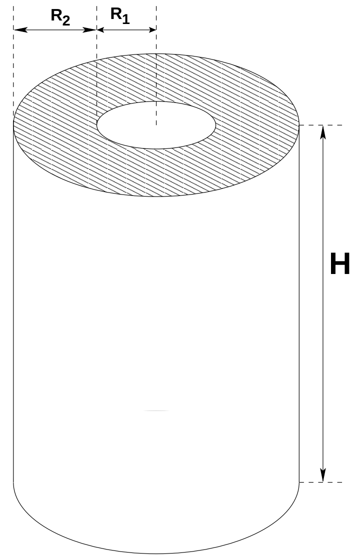
   a) Hallar $\rho_{\text{pol}}(x)$ en función de ε_r y $\frac{\mathrm{d}\varepsilon_r}{\mathrm{dx}}$.

   b) Carga de polarización en el interior del dieléctrico.

   c) Carga de polarización en las superficies del dieléctrico.

   d) Supuesto $\varepsilon_r(x)$ lineal con x, hallar la capacidad del condensador.

14. Un conductor cilíndrico de radio R_2 tiene en su interior un hueco concéntrico de radio R_1. Se conectan la superficie interior y la exterior a una pila de forma que se establece una diferencia de potencial V. Sabiendo que la longitud del cilindro es H (suficiente para considerarlo como infinito) y que la conductividad es σ_0, se pide: Intensidad que circula entre las superficies del cilindro, y su resistencia R, en la conexión indicada.

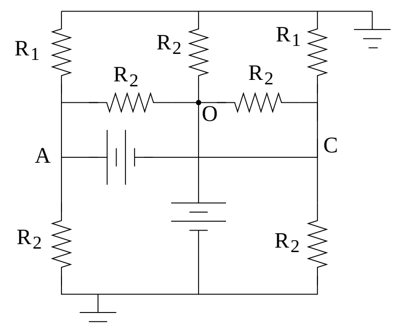


15. Dado el circuito de la figura en el que las pilas tienen una f.e.m. ϵ y resistencia despreciable y $R_1 = 2\Omega$ y $R_2 = 3\Omega$, se pide:

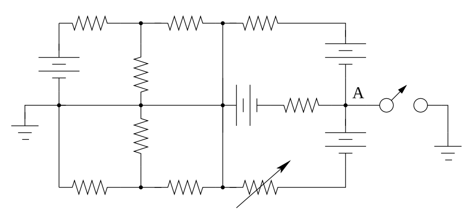
   a) Intensidad, (módulo y dirección) que pasan por las pilas.

   b) Potencia disipada en la resistencia situada entre O y C.

   c) Potencial en el punto A.



16. El circuito de la figura está formado por resistencias del mismo valor R, pilas de fuerza electromotriz ϵ y resistencia interna R, y un potenciométro cuya resistencia R' puede variarse a voluntad. Se pide:



   a) Valor de R' para que la potencia disipada por las resistencias sea máxima.

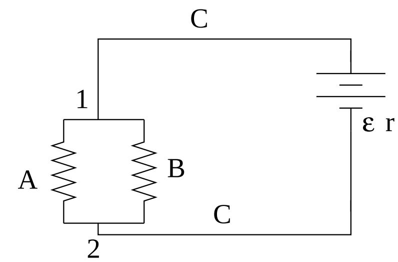
   b) Valor de dicha potencia.

   c) Potencial del punto A.

   d) Intensidad que circulará por el interruptor cuando se cierre.

Nota: ¿Puede el alumno predecir el valor de las intensidades que circulan por las tres resistencias de la parte inferior izquierda de la figura?

17. En el circuito de la figura los nudos 1 y 2 se mantienen a temperaturas diferentes $T_1 < T_2$. Los conductores A y B tienen resistencias y coeficientes termoeléctricos R_A, R_B y α_A, α_B. El conductor C (de resistencia despreciable) y la pila tienen coeficiente termoeléctrico despreciable. Hallar:



   a) Intensidad por la pila.

   b) Relación entre la potencia suministrada por la pila y la suministrada por el par de conductores A y B.

   Tómese: $R_A = 2r$, $R_B = r$; $\alpha_B = 2\alpha_A$, ($\alpha_c = 0$) ($\alpha \equiv$coeficiente termoeléctrico).

APÉNDICE A

SI

El Sistema internacional de unidades, en abreviatura SI (del francés Le Système International d'Unités) es adoptado jurícamante por casi todos los países. En España se establece mediante la Ley 3/1985, de 18 de marzo, de Metrología que determina como Unidades Legales de Medida las del Sistema Internacional de Unidades adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas. Estas unidades quedaron establecidas en el Real Decreto 1317/1987, de 27 de octubre, modificado posteriormente por el Real Decreto 1737/1997, de 20 de noviembre.

A.1. Unidades fundamentales

Las siete magnitudes fundamentales en el SI con sus correspodientes definiciones son las siguientes:

1. Magnitud: **Longitud**
   Nombre de la unidad: **metro**
   Símbolo de la unidad: **m**
   Definición: El metro es la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de $\frac{1}{299\ 792\ 458}$ s (17ª CGPM, 1983, r.1).

2. Magnitud: **Masa**
   Nombre de la unidad: **kilogramo**
   Símbolo de la unidad: **kg**
   Definición: El kilogramo es la unidad de masa y es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo. (3ª CGPM, 1901, p. 70 del acta).

3. Magnitud: **Tiempo**
   Nombre de la unidad: **segundo**
   Símbolo de la unidad: **s**
   Definición: El segundo es la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133. (13ª CGPM, 1967, r.1).

4. Magnitud: **Intensidad de corriente eléctrica**
   Nombre de la unidad: **ampere**

Símbolo de la unidad: **A**
Definición[1]: El amperio es la intensidad de una corriente constante que, manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilineos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de 1 m uno de otro, en el vacío, produciría entre estos conductores una fuerza igual $2 \cdot 10^{-7}$ newton por metro de longitud. (CIPM, 1946, r.2, aprobada por la 9ª CGPM, 1948).

5. Magnitud: **Temperatura termodinámica**
Nombre de la unidad: **kelvin**
Símbolo de la unidad: **K**
Definición: El kelvin es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua. (13ª CGPM 1967, r.4). La 13 CGPM (1967, r.3) decidió así mismo que la unidad kelvin y su símbolo K sean utilizados para expresar un intervalo o una diferencia de temperaturas.
Comentarios: Además de la temperatura termodinámica, símbolo T, expresada en kelvins, se utliza también la temperatura Celsius, símbolo t , definida por la ecuación $t = T - T_0$, donde $T_0 = 273,15\ K$ por definición. Para expresar la temperatura Celsius, se utiliza la unidad "grado celsius", que es igual a la unidad Kelvin; en este caso, el "grado celsius.es un nombre especial utilizado en lugar de "Kelvin". Un intervalo o una diferencia de temperatura Celsius puede expresarse, indistintamente, en Kelvins o grados Celsius.

6. Magnitud: **Intensidad luminosa**
Nombre de la unidad: **candela**
Símbolo de la unidad: **cd**
Definición: La candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite una radiación monocromática de frecuencia $540 \cdot 10^{12}$ hertz y cuya intensidad radiante en dicha dirección es 1/683 vatios por estereorradián. (16ª CGPM, 1979, r.3).

7. Magnitud: **Cantidad de sustancia**
Nombre de la unidad: **mol**
Símbolo de la unidad: **mol**
Definición: El mol es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0,012 kilogramos de carbono 12.
Comentarios: Cuando se emplea el mol, las entidades elementales deben ser especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas o agrupamientos especificados de tales partículas. (14ª CGPM, 1971).

A.2. Unidades suplementarias

- **Ángulo plano**
Nombre de la unidad: **radián**
Símbolo de la unidad:**rad**
Definición: El radián es el ángulo plano comprendido entre dos radios de un círculo que, sobre la circunferencia de dicho círculo, interceptan un arco de longitud igual a la del radio. (Norma Internacional ISO 31-I, diciembre de 1965)

[1] Esta definición hace referencia a la Ec.(**??**) en la página **??**

- **Ángulo sólido**
  Nombre de la unidad: **estereorradián**
  Símbolo de la unidad: **sr**
  Definición: El estereorradián es el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, intercepta sobre la superficie de dicha esfera un área igual a la de un cuadrado que tenga por lado el radio de la esfera. (Norma internacional ISO 31-I, diciembre de 1965).

A.3. Unidades derivadas con nombre propio y normas de notación

Unidades derivadas con nombre propio			
Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión
Frecuencia	hertz, hercio	Hz	s^{-1}
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$
Presión, esfuerzo, tensión mecánica	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	joule, julio	J	$N \cdot m$
Potencia, flujo radiante	watt, vatio	W	$J \cdot s^{-1}$
Carga eléctrica, cantidad de electricidad	coulomb, culombio	C	$A \cdot s$
Potencial eléctrico, diferencia de potencial, tensión, fuerza electromotriz	volt, voltio	V	$W \cdot A^{-1}$
Capacidad eléctrica	farad, faradio	F	$C \cdot V^{-1}$
Resistencia eléctrica	ohm, ohmio	Ω	$V \cdot A^{-1}$
Conductancia eléctrica	siémens	S	$A \cdot V^{-1}$
Flujo magnético , flujo de inducción magnética	wéber	Wb	$V \cdot s$
Intensidad del campo magnético	lenz	Lz	$A \cdot m^{-1}$
Inducción magnética, densidad de flujo magnético	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$
Inductancia	henry, henrio	H	$Wb \cdot A^{-1}$
Temperatura	grado Celsius	°C	K
Flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
Iluminación, iluminancia	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$
Actividad (radiactiva)	becquerel	Bq	s^{-1}
Dosis energética, índice de dósis absorbida	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$
Dosis equivalente, índice de dosis equivalente	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$
Ángulo plano	radián	rad	
Ángulo sólido	estereorradián	sr	

A continuación se resumen algunas normas de notación relativas a las unidades. Para mas información puede consultarse la siguiente página web: *www.proteccioncivil.org/vademecum/* o bien *www.bipm.fr/en/si/*.

- Los nombres de las unidades no deben alterarse para acomodarse a las peculiaridades de cada idioma. Cada unidad SI tiene su propio símbolo, el mismo en cualquier idioma.

- Cuando se usa el nombre completo de las unidades fundamentales y derivadas o de sus múltiplos y submúltiplos, debe escribirse con minúscula incluso si procede de un nombre propio. Se exceptúa Celsius en ”grado Celsius”.
- Los símbolos se escriben con minúscula excepto cuando provienen de un nombre propio. Es permisible usar la mayúscula L para litro cuando el símbolo normal, l, puede confundirse con el dígito 1. Cuando un símbolo de dos letras proviene de un nombre propio, la inicial es mayúscula.
- Los prefijos de múltiplos y submúltiplos se escriben con minúscula excepto en el caso de los múltiplos mega y superiores.
- Los símbolos no son abreviaturas, nunca llevan plural y no deben ir seguidos de punto final.
- La coma decimal, usada en Europa, o el punto decimal usado en los EE.UU. son ambos aceptables.
- La anterior regla excluye el uso de comas o puntos para separar grupos de cifras. Estos deben separarse con un espacio sin puntuación alguna.

APÉNDICE B

Constantes físicas fundamentales

Los siguientes datos son suministrados por el *Committee on Data for Science and Technology* (CODATA). Información adicional puede obtenerse de página WEB de CODATA.

Quantity	Symbol	Value	Uncertainty
Speed of light in vacuum	c	299 792 458 ms^{-1}	(exact)
Magn. constant	μ_0	$4\pi 10^{-7} N\, A^{-2}$	(exact)
Electric constant	ε_0	$8.854187817\ldots 10^{-12} F\, m^{-1}$	(exact)
Elementary charge	e	$1.60217653 \cdot 10^{-19} C$	$0.00000014 \cdot 10^{-19}$
Newtonian constant of gravitation	G	$6.6742\, 10^{-11} m^3\, kg^- 1\, s^- 2$	$0.0010\, 10^{-11}$
Molar gas constant	R	$8.314472\, J\, mol^{-1}\, K^{-1}$	0.000015
Boltzmann constant	k	$1.3806505 \cdot 10^{-23}\, J\, K^{-1}$	$0.0000024 \cdot 10^{-23}$
Proton charge to mass quotient	e/m_p	$9.578\,833\,76 \cdot 10^7 C\, kg^{-1}$	$0.000\,000\,82 \cdot 10^7$
Avogadro constant	N_A	$6.022\,1415 \cdot 10^{23} mol^{-1}$	$0.0000010 \cdot 10^{23}$

Cuadro B.1: Constantes físicas fundamentales

BIBLIOGRAFÍA

[1] Tom M. Apostol. *Calculus* Vol 2. Editorial Reverté.

[2] Robert W. Christy, Frederick J. Milford, John R. Reitz. *Fundamentos de la Teoria Electromagnetica*.

[3] P. Lorrain y D. E. Corson, *Campos y ondas electromagnéticos*, SC (Selecciones Científicas)

[4] Marcelo Alonso y Edward J. Finn, *Física*. Addison Wesley. Tomo II