Apuntes de Física II

TERMODINÁMICA

Dr. Ezequiel del Río
Departamento de Física Aplicada
E.T.S. de Ingeniería Aeronáutica y del espacio
Universidad Politécnica de Madrid

14 de febrero de 2017

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO 1

Operadores diferenciales

1.1. Introducción

En el estudio de cualquier parte de la Física es esencial familiarizarse desde el principio con los métodos matemáticos relativos a la materia de estudio, es decir, la parte de la matemática utilizada comunmente para *expresar y razonar* la materia a estudiar. Este es el objeto de esta sección. El material aquí espuesto puede encontrarse en los complementos de los resúmenes de Física General I o naturalmente, de modo mas riguroso en libros de análisis matemático.

Cantidades como la presión o la velocidad en un fluido, que dependen del tiempo t y de la posición $\vec{r}(x, y, z)$, se llaman campos. Nótese que son funciones, escalares o vectoriales, de varias variables, pero con la particularidad de que tres variables (x, y, z) son las componentes de un vector $\vec{r}$, y otra, t, es un escalar. Para un campo vectorial $\vec{w}(\vec{r}, t)$, y en un instante dado t_0, se llaman lineas de campo a las curvas tangentes en cada punto $\vec{r}$ al vector $\vec{w}(\vec{r}, t_0)$. Para un campo escalar $p(\vec{r}, t)$, se llaman superficies de campo constante, en un instante t_0, a las superficies $p(\vec{r}, t_0) =$ cte. Unas y otras son útiles para representar gráficamente campos dados.

1.2. Gradiente, divergencia y rotacional

Muchas leyes de la Física relacionan derivadas de campos; si esas leyes han de ser válidas en triedros de cualquier orientación tales derivadas han de ser a su vez campos escalares o vectoriales. Las derivadas temporales, $(\partial p/\partial t,\ \partial \vec{w}/\partial t)$, tienen, evidentemente, ese carácter. Por el contrario, una derivada espacial, tal como $\partial p/\partial x$, no es ni un escalar ni un vector. Combinaciones de derivadas espaciales que sí son escalares o vectores, son:

$$\text{Gradiente :}\quad \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}, \tag{1.1}$$

$$\text{Divergencia :}\quad \nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.2}$$

$$\text{Rotacional :}\quad \nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{1.3}$$

En las expresiones (2.1), (2.2) y (2.3) hemos utilizado el operador Nabla

$$\nabla \equiv \vec{i}\partial/\partial x + \vec{j}\partial/\partial y + \vec{k}\partial/\partial z \tag{1.4}$$

que permite una notación vectorial. La expresiones de los operadores anteriores en coordenadas curvilíneas pueden verse en el capítulo 2.

Es fácil comprobar que ∇p es un vector: tratándolo como a tal resulta

$$\nabla p \cdot \Delta\vec{r} = \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\Delta z \simeq p(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - p(\vec{r}) \equiv \Delta p, \tag{1.5}$$

que es un escalar para cualquier $\Delta\vec{r}$. El vector ∇p en el punto arbitrario $\vec{r}_0$ es perpendicular al plano tangente en $\vec{r}_0$ a la superficie $p(\vec{r}) = \text{cte} = p(\vec{r}_0)$ y su sentido es el de p creciente. El caracter escalar de $\nabla \cdot \vec{w}$ y vectorial de $\nabla \wedge \vec{v}$ se seguirá de los teoremas de Gauss y Stokes.

La determinación de aquellas derivadas espaciales segundas que a su vez sean campos escalares o vectoriales es inmediata. Del campo escalar $\nabla \cdot \vec{w}$ se obtiene su gradiente, $\nabla \cdot \vec{w} \to \nabla(\nabla \cdot \vec{w})$, y de los campos vectoriales ∇p y $\nabla \wedge \vec{w}$ se obtiene

$$\nabla p \to \quad \nabla \cdot (\nabla p), \quad \nabla \wedge (\nabla p) \quad , \quad \nabla \wedge \vec{w} \to \quad \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}), \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{w}). \tag{1.6}$$

Para los campos escalar y vectorial tenemos las siguientes igualdades

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{w}) = \nabla \wedge (\nabla p) = 0 \tag{1.7}$$

que el alumno puede comprobar fácilmente.
¿Pueden existir campos $\vec{w}$ y p para los que las ecuaciones (1.7) no se cumplan?

Por otra parte, si en la expresión $\nabla \cdot (\nabla p)$ se trata al operador nabla como si fuese un vector, $\nabla \cdot (\nabla p) = (\nabla \cdot \nabla)p$ (se escribe $\nabla^2 p$, "Laplaciana de p"), se obtiene el mismo resultado:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{1.8}$$

Finalmente, se comprueba la identidad

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{w}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{w}) - \nabla^2 \vec{w}. \tag{1.9}$$

Se puede decir, por tanto, que las derivadas espaciales segundas de campos se presentarán en Física en la forma $\nabla(\nabla \cdot \vec{w})$, $\nabla^2 p$, ó $\nabla^2 \vec{w}$. El operador ∇^2 se llama laplaciano[1].

1.3. Teoremas integrales

1.3.1. Teorema de Gauss

Ciertas relaciones entre integrales de campos permiten a veces simplificar el cálculo de los campos mismos, o llevar leyes físicas de una forma diferencial a una forma integral (ver Ley de Ampere, más adelante). Se llama flujo ϕ de un campo vectorial $\vec{w}$ a través de una superficie S a la integral de superficie

$$\phi \equiv \int_S \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1.10}$$

[1] Pierre-Simon Laplace, astrónomo, físico y matemático francés (1749 - 1827).

donde $\mathrm{d}\vec{S}$ es el vector de módulo el elemento diferencial de área $\mathrm{d}S$, y versor el normal $\vec{n}$ a la superficie en $\mathrm{d}S$. Como hay dos sentidos posibles para $\vec{n}$, para hallar ϕ hay que convenir previamente cual se elige; cuando S es una superficie cerrada se elige siempre la normal exterior. Si se divide un volumen v limitado por una superficie cerrada S en dos volúmenes v_1 y v_2 ($v_1 + v_2 \equiv v$), mediante una superficie de corte abierta S', se cumple

$$\phi_S = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} \tag{1.11}$$

donde S_1 y S_2 son las superficies cerradas que limitan a v_1 y a v_2 (nótese que sobre S' las normales a utilizar en S_1 y S_2 son opuestas). Analizando el flujo a través de la superficie que limita un cubo elemental se sigue finalmente, para cualquier superficie cerrada S, el Teorema de **Gauss**[2]

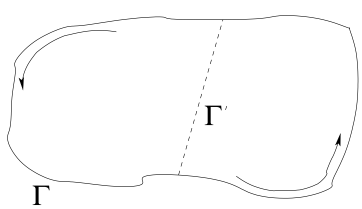
$$\int_S \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{w} = \int_v dv\ \nabla\cdot\vec{w}. \tag{1.12}$$

Hay un segundo teorema de Gauss, $\int_S d\vec{S}\wedge\vec{w} = \int_v dv\ \nabla\wedge\vec{w}$.

1.3.2. Teorema de Stokes

Se llama circulación C de un campo vectorial $\vec{w}$ a lo largo de una curva cerrada Γ a la integral de linea de $\vec{w}$ sobre Γ

$$C \equiv \oint_\Gamma \vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{1.13}$$



donde $\mathrm{d}\vec{l}$ es el vector de módulo el elemento de arco $\mathrm{d}l$, y versor tangente a Γ en dl en el sentido de recorrido, que es preciso especificar. Una linea interior abierta Γ' que una dos puntos de Γ engendra dos curvas cerradas Γ_1 y Γ_2; se encuentra

$$C_\Gamma = C_{\Gamma_1} + C_{\Gamma_2} \tag{1.14}$$

(nótese que los sentidos de $\mathrm{d}\vec{l}$ sobre Γ' son opuestos en Γ_1 y Γ_2). Analizando la circulación sobre un rectángulo elemental se sigue finalmente, para cualquier curva cerrada Γ, el Teorema de **Stokes**[3]

$$\oint_\Gamma \vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla\wedge\vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{S}, \tag{1.15}$$

siendo S *cualquier* superficie abierta que se apoye en Γ; los sentidos de recorrido en Γ y de la normal en S se asocian como en un triedro a derechas. Si Γ colapsa a un punto, S se hace cerrada, y el teorema de Stokes es una identidad,

$$0 = \int_{S\ \mathrm{cerrada}} \nabla\wedge\vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_v \nabla\cdot(\nabla\wedge\vec{w})\mathrm{d}v, \tag{1.16}$$

donde v es el volumen encerrado por S.

Del teorema de Stokes se deduce que si un campo $\vec{w}$ es irrotacional ($\nabla\wedge\vec{w} = 0$ para cualquier $\vec{r}$), su circulación a lo largo de cualquier curva cerrada es nula. Consecuencia de esto es que la integral de línea de $\vec{w}$ a lo largo de una curva abierta, de un punto P a otro A, no depende de la curva; para un campo irrotacional dado $\vec{w}$, $\int_P^A \vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ es sólo función de A y P. Si se fija A, y el vector de posición $\vec{r}$ de P es arbitrario, se obtiene de $\vec{w}$ un campo escalar,

[2] Carl Friedrich Gauss. Matemático, astrónomo y físico alemán (1777-1855). Director del observatorio de Gotinga. En su tesis doctoral proporcionó la primera demostración del teorema fundamental del álgebra.

[3] George Gabriel Stokes, matemático y físico irlandés (1819-1903). Trabajó en dinámica de fluidos. Ver ecuación de Navier-Stokes en la asignatura de fluidos.

$$\int_P^A \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \equiv V(\vec{r}) \; ; \tag{1.17}$$

cuando esto no conduce a una integral impropia se toma el punto fijo A a distancia infinita, $V(r \to \infty) = 0$, como sucede en electrotática. Si P y Q son puntos próximos situados en $\vec{r}$ y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, se tiene

$$\left.\begin{array}{l} V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = \Delta V \simeq \nabla V \cdot \Delta\vec{r} \\[2ex] V(\vec{r}) - V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = \int_P^Q \vec{w} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \simeq \vec{w} \cdot \Delta\vec{r} \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{w} = -\nabla V \tag{1.18}$$

CAPÍTULO 2

Operadores diferenciales en Coordenadas cilíndricas y esféricas.

En este capítulo mostramos expresiones de los operadores operaciones utilizados en coordenadas cilíndricas y esféricas. En lo que sigue p es una función escalar mientras que $\vec{w}$ es una función vectorial.

Recordamos las definiciones para coordenadas rectangulares.
El vector gradiente de p se define como:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}, \tag{2.1}$$

El escalar divergencia de $\vec{w}$ se define como:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{2.2}$$

El vector rotacional de $\vec{w}$ se define como:

$$\nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{2.3}$$

Finalmente recordamos la definición de la laplaciana de un campo escalar:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{2.4}$$

Introducimos seguidamente las coordenadas curvilíneas de gran utilidad en electromagnetismo.

2.1. Coordenadas cilíndricas

La figura 2.1 muestra las coordenadas cilíndricas de un punto, siendo $\vec{k}$, $\vec{\rho}_1$ y $\vec{\phi}_1$ vectores unitarios en direcciones ortogonales entre sí. La distancia del punto al eje z está dada por ρ mientras que ϕ es el ángulo acimutal. El vector de posición es por tanto:

$$\vec{r} = \rho\vec{\rho}_1 + z\vec{k} \tag{2.5}$$

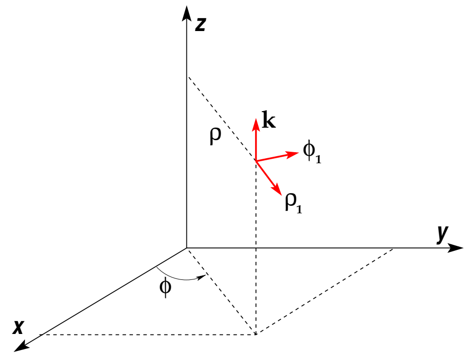


Figura 2.1: Coordenadas cilíndricas

Aplicando ahora la regla de la cadena para campos vectoriales tenemos la siguiente expresión para el operador gradiente en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\vec{\rho}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \phi}\vec{\phi}_1 + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}. \tag{2.6}$$

La siguiente expresión para el operador divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho w_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}. \tag{2.7}$$

Para el operador rotacional tenemos:

$$\nabla \wedge \vec{w} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w_z}{\partial \phi} - \frac{\partial w_\phi}{\partial z}\right)\vec{\rho}_1 + \left(\frac{\partial w_\rho}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial \rho}\right)\vec{\phi}_1 + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho w_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial w_\rho}{\partial \phi}\right)\vec{k} \tag{2.8}$$

Finalmente para la laplaciana de campo escalar p obtenemos:

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{2.9}$$

2.2. Coordenadas esféricas

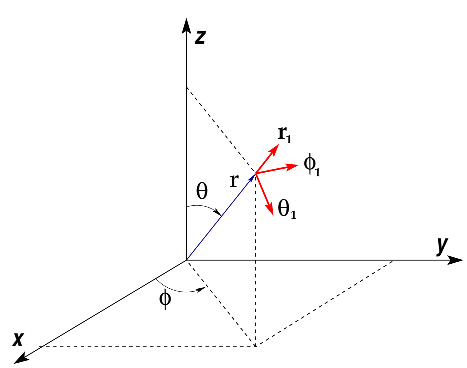


Figura 2.2: Coordenadas esféricas

La figura 2.2 muestra las coordenadas esféricas de un punto donde r es la distancia del punto al origen, θ es el ángulo entre el eje z y el radio vector, y ϕ es el ángulo acimutal. Los vectores unitarios $\vec{r}_1$, ϕ_1 y θ_1 son ortogonales entre sí siendo en este caso el vector de posición:

$$\vec{r} = r\,\vec{r}_1 \tag{2.10}$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena para funciones vectoriales tenemos en coordenadas esféricas las correspondientes expresiones para los operadores gradiente,

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{\theta}_1 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \phi}\vec{\phi}_1 \tag{2.11}$$

divergencia

$$\nabla\cdot\vec{w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 w_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, w_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w_\phi}{\partial\phi} \tag{2.12}$$

rotacional

$$\nabla\wedge\vec{w} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, w_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{r}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial w_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\, w_\phi)}{\partial r}\right)\vec{\theta}_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\, w_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial\theta}\right)\vec{\phi}_1 \tag{2.13}$$

y laplaciana

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi^2}. \tag{2.14}$$

CAPÍTULO 3

Problemas propuestos

1. Dado el campo escalar $P = f(r)$ y el vectorial $\mathbf{w} = \mathbf{r}\ f(r)$, utilizando coordenadas rectangulares, hallar en términos de f y de sus derivadas ordinarias:

    a) ∇P

    b) $\nabla \cdot \mathbf{w}$

    c) $\nabla \wedge \mathbf{w}$

    d) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{w})$

    e) $\nabla^2 P$

    f) $\nabla^2 \mathbf{w}$

    Hacer lo mismo en utilizando coordenadas esféricas.

2. Dado el campo vectorial adimensional $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + (2 - yz)\mathbf{j} + (\frac{z^2}{2} - 1)\mathbf{k}$, hallar:

    a) $\nabla \cdot \mathbf{A}$

    b) $\nabla \wedge \mathbf{A}$

    c) $\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})$ en el punto $C(a, a, a)$.

    d) Flujo de $\mathbf{A}$ a través de la esfera de centro C y radio $3a$.

    e) Flujo de $\mathbf{A}$ a través de la superficie del triángulo de vértices (a, O, O), (O, a, O) y (O, O, a).

3. Dado el campo vectorial adimensional: $\mathbf{A} = 2xz\mathbf{i} + z \sin x\mathbf{j} + (x^2 + y^2 - z^2)\mathbf{k}$

    a) Circulación de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a lo largo del cuadrado de lado 2, situado en el plano $z = 2$, y con lados paralelos al los ejes x e y.

    b) Circulación de $\mathbf{A}$ a lo largo de la circunferencia situada en el plano XY, con centro en el origen y radio 2.

c) Flujo de $\nabla \wedge \mathbf{A}$ a través de la superficie del cuadrado definido en el punto $3a$.

d) Flujo de $\mathbf{A}$ a través de la semiesfera de centro el origen y radio 2, que se apoya en la circunferencia definida en $3b$ y situada por encima del plano XY.

BIBLIOGRAFÍA

[1] P. Lorrain y D. E. Corson, *Campos y ondas electromagnéticos*, SC (Selecciones Científicas)

[2] Tom M. Apostol. *Calculus* Vol 2. Editorial Reverté.