Apéndices: Problemas y Comentarios (no entran en temario)

CONDUCCIÓN ELÉCTRICA

Dr. José Manuel Donoso

http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/

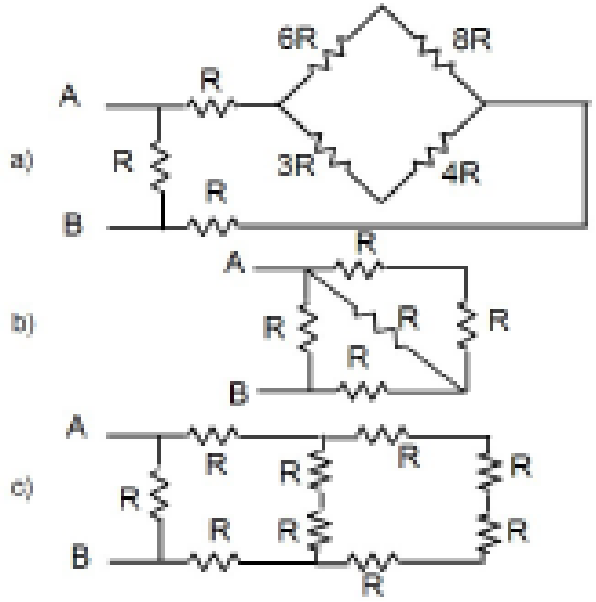
Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Corriente eléctrica, Densidad de corriente, Ley de Ohm, Efecto Joule, Fuerza electromotriz, circuito simple.

Problemas y comentarios (no entran en temario este año)

- **Problema 6.1**

Determinar la resistencia equivalente entre los puntos A y B de las redes de resistencias de la figura:



Solución

a) $R_{eq} = (20/23)R$

b) $R_{eq} = (5/8)R$

c) $R_{eq} = (10/13)R$

APÉNDICE 2 extra: Circuitos no simples: Mallas y nudos. Leyes de Kirchoff

• La ley anterior **se generaliza** para una red compuesta por más de un circuito simple**.**

•Los **elementos de una red** son :

Nudo o nodo : volumen pequeño en el que confluyen tres o más hilos conductores de corriente

Rama: Línea de circuito entre dos nudos conteniendo generadores y/o resitencias

Malla: Cualquier trayectoria cerrada dentro del circuito, puede ser simple o compuesta por otras simples.

•Resolver un problema de red de un circuito con ***M*** **mallas** y ***N*** **nodos** supone determinar las ***C*** **Corrientes** que circulan **por las C ramas**.

•Hay *M* ecuaciones de malla y (*N-1*) ecuaciones de nodos para las *C* corrientes de rama:

$$C = M + (N - 1)$$

Por **continuidad de corriente** y por **campo conservativo** se tienen las **reglas de Kirchoff:**

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_{nodo} \sum_j \frac{I_j}{S_j} dS_j = 0 \Rightarrow \sum_j I_j = 0$$

$(en\ cada\ nodo)$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \sum_i (V_{i+1} - V_i) = \sum_i (V_{ai} - V_{bi}) = 0$$

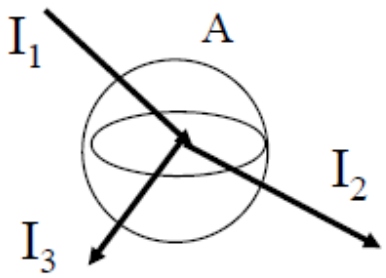
$$\sum_i \varepsilon_i = \sum_i I_i (R_i + r_i) \quad \text{(en cada malla)}$$

Gustav R. Kirchhoff (1824-1887)

MÉTODOS Y EJEMPLOS PARA ANÁLISIS DE REDES (ver libro de apuntes)

Leyes de Kirchhoff

La ley de conservación de la carga aplicada a una superficie cerrada A que contenga a un nudo conduce a:



Teorema de la divergencia

$$\nabla \cdot \vec{J} = 0 \rightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sum_i I_i = 0$$

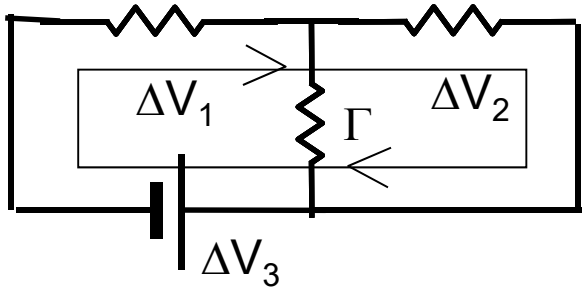
$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Primera Ley: La suma de intensidades de rama que confluyen en un nudo es cero.

En una red con N nudos sólo hay N-1 ecuaciones de nodo independientes.

Leyes de Kirchhoff

Dado que E es irrotacional, su circulación aplicada a una línea cerrada formada a partir de ramas del circuito (malla) conduce a:



Teorema de Stokes

$$\nabla \times \vec{E}_e = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \sum_i \Delta V_i = 0$$

$$\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 0$$

Segunda Ley: La suma de diferencias de potencial de los elementos que componen una malla es cero.

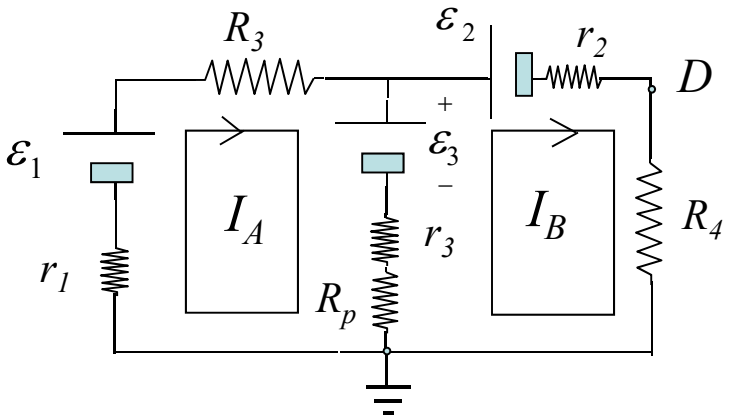
En una red con M mallas simples (no contienen a otras), sólo hay M ecuaciones de malla independientes.

"Las N-1 ecuaciones de nudo y M ecuaciones de malla permiten obtener todas las intensidades de rama".

J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

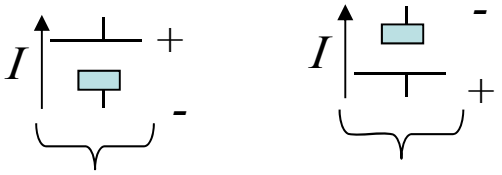
Método de Intensidades de Malla

Disminuye el nº de ecuaciones en circuitos con 2 o más mallas simples.



Se asigna a cada malla simple una intensidad de malla que la recorre en **sentido horario**

$$\begin{pmatrix} V \text{ de elementos activos en } A \\ V \text{ de elementos activos en } B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{resistencias en } A & -(\text{resist. comunes en } A \text{ y } B) \\ -(\text{resist. comunes en } A \text{ y } B) & \text{resist. en } B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix}$$

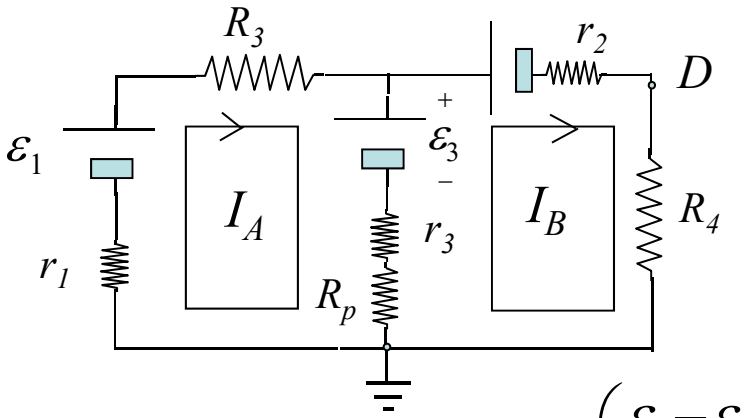


ddp positiva ddp negativa

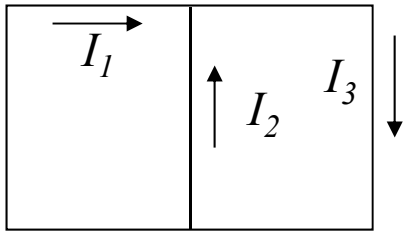
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + R_3 + r_3 + R_p & -r_3 - R_p \\ -r_3 - R_p & r_3 + r_2 + R_4 + R_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix}$$

J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

Método de Intensidades de Malla



$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + R_3 + r_3 + R_p & -r_3 - R_p \\ -r_3 - R_p & r_3 + r_2 + R_4 + R_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \end{pmatrix}$$

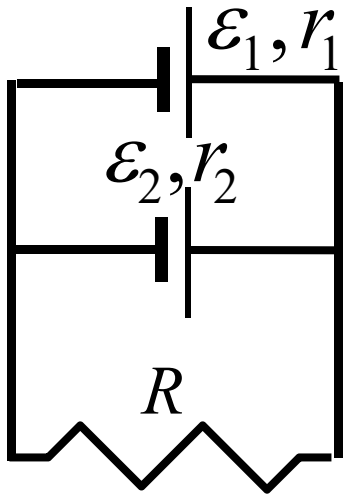


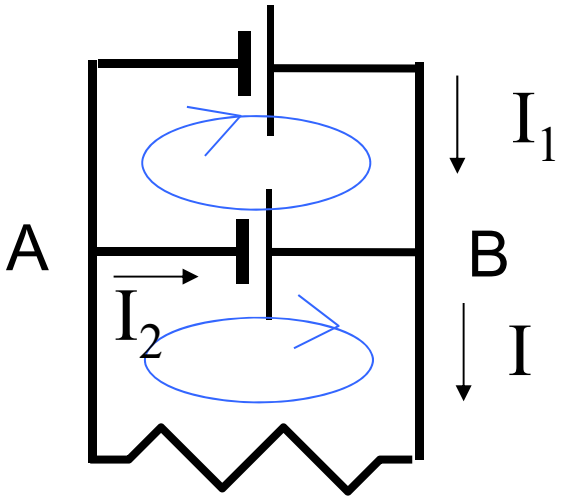
Relación entre intensidades de malla y rama:

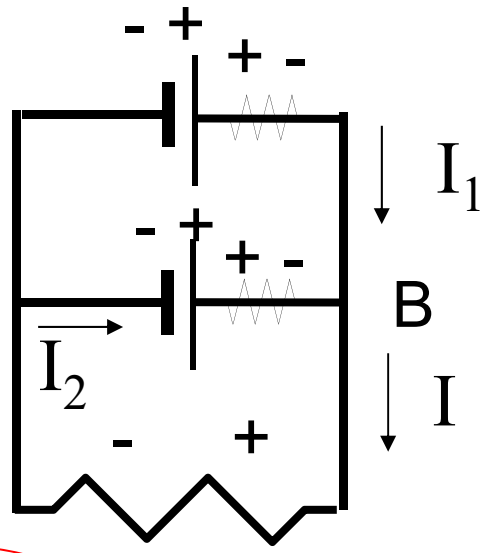
$$\begin{aligned} I_1 &= I_A \\ I_2 &= I_B - I_A \\ I_3 &= I_B \end{aligned}$$

J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

Ejemplo: Circuito con dos generadores en paralelo





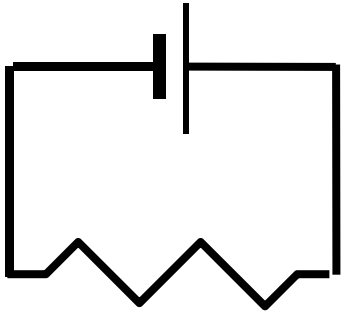


$$I_1 + I_2 = I$$

$$\varepsilon_1 - r_1 I_1 - \varepsilon_2 + r_2 I_2 = 0$$

$$\varepsilon_2 - r_2 I_2 - RI = 0$$

$$\longrightarrow I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}}{R + \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \qquad \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} = \varepsilon_{eq} \qquad \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = r_{eq}$$



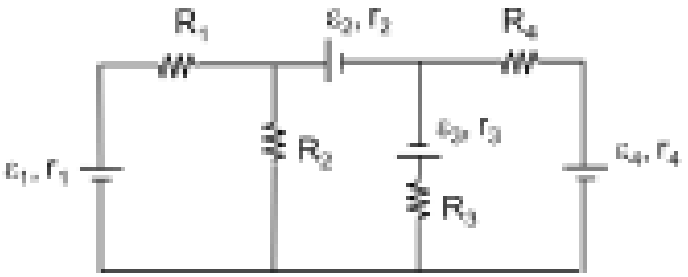
$$\varepsilon_{eq} - r_{eq} I - RI = 0 \longrightarrow I = \frac{\varepsilon_{eq}}{R + r_{eq}}$$

J.C. Jiménez Sáez y S. Ramírez de la Piscina Millán
U.D. Física
Departamento de Física y Química Aplicadas a la Técnica Aeronáutica

- **Problema 6.2**

Para el circuito de la figura con los datos $\varepsilon_i = 10\,\text{V}$ para $i = 1, 2, 3$ y 4, resistencias internas $r_i = 1\,\Omega$ y resistencias $R_i = 1\,\Omega$, se pide:

a) Las intensidades que circulan por cada rama.
b) La potencia que comunica al circuito cada generador así como la potencia que disipan internamente cada uno.
c) La potencia disipada en cada una de las cuatro resistencias R_i.



Datos: $\varepsilon_i = 10\,\text{V}$, resistencias internas $r_i = 1\,\Omega$ y las resistencias $R_i = 1\,\Omega$, para $i = 1, 2, 3, 4$.

Solución :

a) $I_{\varepsilon_1} = I_{\varepsilon_2} = 2{,}5\,\text{A}$; $I_{\varepsilon_3} = 3{,}75\,\text{A}$; $I_{\varepsilon_4} = 6{,}25\,\text{A}$; $I_{R_2} = 5\,\text{A}$

b) $P_1 = P_2 = 18{,}75\,\text{W}$, ; $P_3 = 23{,}44\,\text{W}$; $P_4 = 23{,}44\,\text{W}$

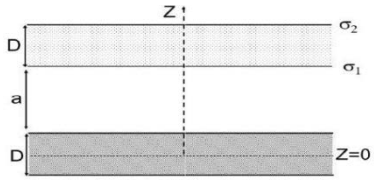
c) $P_{d1} = P_{d2} = 6{,}25\,\text{W}$; $P_{d3} = 14{,}06\,\text{W}$; $P_{d4} = 39{,}06\,\text{W}$

Problemas (I, ejm. de examen, sólo para trabajo personal. Sin circuitos)

2.5) Se tienen dos rectas infinitas, paralelas y separadas una distancia a con densidades lineales de carga λ_1 y λ_2 positivas siendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Obtener la distancia d de la recta 1 a la cual se anula el campo electrostático.

Solución: $d = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a$

2.16) Una placa infinita de espesor D está cargada con una densidad volumétrica de carga dada por: $\rho(z) = \rho_0 \left(\dfrac{z}{D}\right)^2$, donde z es la coordenada que se muestra en la figura. Situada a una distancia a respecto de la cara superior de la placa anterior se sitúa ahora otra placa metálica de carga nula e igual espesor D (véase la figura). Calcular la densidad de carga inducida sobre esta placa metálica.

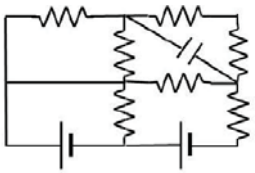


Solución: $\sigma_1 = -\dfrac{1}{24}\rho_0 D; \quad \sigma_2 = \dfrac{1}{24}\rho_0 D$

4.3) En el circuito mostrado en la figura todas las resistencias tienen igual valor R; las dos pilas son iguales, de fem ε y resistencia interna nula; el condensador tiene una capacidad C. Una vez alcanzado el régimen estacionario, se pide:

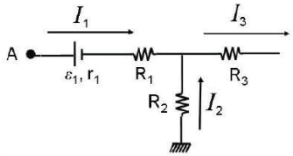
1) la intensidad que recorre la pila situada a la izquierda.

2) la carga almacenada en el condensador.



1) $I_1 = \dfrac{13}{6}\dfrac{\varepsilon}{R}$

2) $Q = \dfrac{2}{3} C\varepsilon$



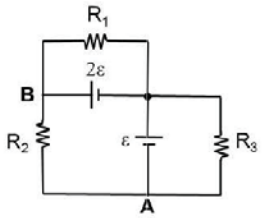
4.14) En la figura se muestra una parte de un circuito. Ésta consta de una pila de fuerza electromotriz ε_1 y resistencia interna r_1; tres resistencias R_1, R_2 y R_3, por las que circulan intensidades I_1, I_2, I_3, respectivamente, en los sentidos indicados en la figura; y una toma de tierra. Calcular el potencial V_A en el punto A de la figura.

Solución: $I_1 = 3A$

4.19) El circuito de la figura consta de tres resistencias del mismo valor $R_1 = R_2 = R_3 = R$, y dos pilas de f.e.m. 2ε y ε sin resistencia interna. Se pide:

1) El valor absoluto de la intensidad de corriente I que circula por la resistencia R_1.

2) La diferencia de potencial entre los nodos B y A, V_B-V_A.

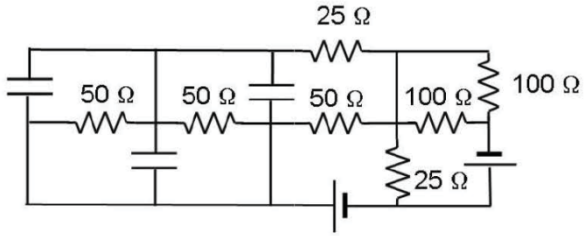


Solución:

1) $I = 2\varepsilon / R$

2) $V_B - V_A = 3\varepsilon$

El circuito mostrado en la figura funciona en régimen estacionario. Los dos generadores tienen igual fuerza electromotriz ε = 50 V y resistencia interna nula r = 0. Los tres condensadores son iguales, de capacidad C = 10 pF. Se pide:



1) La intensidad de corriente que circula por el generador inferior.

2) La intensidad de corriente que recorre la resistencia R = 25 Ω situada junto a los generadores.

3) La intensidad de corriente que recorre cada resistencia R = 100 Ω.

4) La capacidad total del circuito.

5) La carga almacenada en cada uno de los condensadores.

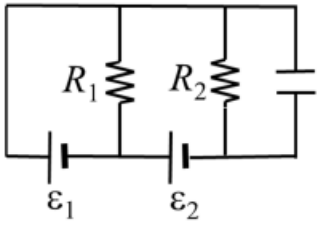
1) I = 8/5 A
2) I = 2/5 A;
3) I = 3/5 A
4) C = 30 pF
5) Q = 200 pC

(II)

VERSIÓN 1 Física II – Examen final extraordinario Curso: 16/17 Fecha: 5/07/17

Para cada cuestión indique la respuesta en el recuadro en función de las variables que se solicita, si bien alguna de las variables puede ser innecesaria, entregue en una hoja adjunta todos los cálculos que justifiquen dicha respuesta.

P2. Se tiene un circuito con dos baterías de f.e.m. $\varepsilon_1 = \mathscr{e}$ y $\varepsilon_2 = 2\mathscr{e}$ sin resistencia interna, dos resistencias $R_1 = R$ y $R_2 = 2R$, y un condensador plano-paralelo ideal, de placas en forma circular de diámetro $D = 10\,d$ y separación d. En su interior hay un disco dieléctrico de permitividad eléctrica relativa $\varepsilon_r = 2$ que encaja perfectamente en el espacio entre placas. Una vez alcanzado el régimen estacionario, se pide:



1) Intensidad que circula por la batería ε_1 en valor absoluto:

(Exprese el resultado en función de $\mathscr{e}$ y R)

$|I_1| =$

2) Potencia disipada en la resistencia R_1:

(Exprese el resultado en función de $\mathscr{e}$ y R)

$P_{R_1} =$

3) La carga que adquiere el condensador:

(Exprese el resultado en función de la permitividad del vacío ε_0, $\mathscr{e}$ y d)

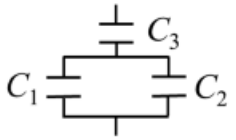
$Q =$

Se sustituye el condensador anterior por la red de condensadores que se muestra en la figura formada por tres condensadores de valor: $C_1 = C_3 = C$ y $C_2 = 2C$ y se espera a alcanzar nuevamente el estado estacionario. Se pide:

4) La energía electrostática almacenada en la red de condensadores es:

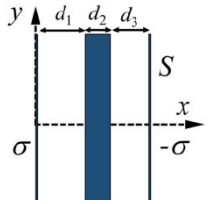
(Exprese el resultado en función de C y $\mathscr{e}$)

$U_e =$



5) La carga que adquiere el condensador C_1 es:

Se tiene un **condensador** formado por dos placas plano-paralelas, de sección S, separadas una distancia d, desconectadas de la batería y cargadas con densidades superficiales opuestas de valor $\sigma\,(>0)$. En el interior, y de forma paralela a dichas placas, hay un conductor sin carga neta en forma de lámina de la misma sección y espesor d_2. Por tanto, el espacio entre placas se encuentra dividido en tres regiones de izquierda a derecha (véase Fig.): una de anchura $d_1 = d/2$ ocupada por el vacío, otra de anchura $d_2 = d/3$ ocupada por el conductor, y otra de anchura d_3 ocupada por el vacío ($d_1 + d_2 + d_3 = d$). (Nota: Despréciense efectos de borde, considere nulo el campo fuera de las placas).



4) La diferencia de potencial entre placas en valor absoluto es:

A) $|\Delta V| = (\sigma/\varepsilon_0)d$ C) $|\Delta V| = (\sigma/\varepsilon_0)(d/3)$

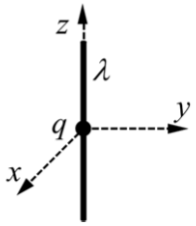
B) $|\Delta V| = (\sigma/\varepsilon_0)(2d/3)$ D) $|\Delta V| = (\sigma/\varepsilon_0)(d/2)$

E) Ninguna de las anteriores.

VERSIÓN 1 Física II – Control nº 2 Curso: 16/17 Fecha: 24/04/17

Para cada cuestión se dan 5 respuestas. Marcar en la plantilla adjunta sólo la que se considere correcta.

En el espacio se tiene la siguiente configuración de carga (véase Fig.): una carga puntual q en el origen de un sistema cartesiano y un hilo indefinido de densidad lineal de carga $\lambda = q/a$, siendo a una longitud, en el eje Oz. Se verifica que:



1) La componente x del campo electrostático, E_x, en el punto $P=(a, 2a, 0)$ es:

A) $E_x(P) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\dfrac{(1+2\sqrt{10})}{10^{3/2}}$ C) $E_x(P) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\dfrac{(1+2\sqrt{26})}{26^{3/2}}$

B) $E_x(P) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\dfrac{(1+2\sqrt{5})}{5^{3/2}}$ D) $E_x(P) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\dfrac{(1+2\sqrt{17})}{17^{3/2}}$

E) Ninguna de las anteriores.

2) El potencial V creado **únicamente** por el hilo indefinido en el punto P tomando como referencia el punto $Q=(a, a, 0)$, $V(Q)=0$, es:

A) $V(P) = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln(\sqrt{5})$ C) $V(P) = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln(\sqrt{17/2})$

B) $V(P) = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln(\sqrt{5/2})$ D) $V(P) = -\dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}\ln(\sqrt{13})$

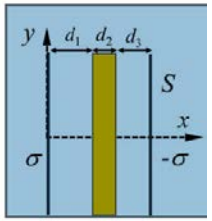
E) Ninguna de las anteriores.

3) El trabajo W que realiza el campo para mover una carga q desde el punto P al punto Q es:

A) $W = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + 2\ln(\sqrt{2/5})\right]$ C) $W = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{10}} + 2\ln(\sqrt{1/5})\right]$

B) $W = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{17}} + 2\ln(\sqrt{2/17})\right]$ D) $W = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{26}} + 2\ln(\sqrt{1/13})\right]$

Sustituya el conductor del problema anterior por un dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$ con las misma dimensiones. Ahora se verifica que:



6) La densidad superficial de carga de polarización en la cara del dieléctrico más cercana a la placa positiva σ_p es:

A) $\sigma_p = \sigma$ C) $\sigma_p = -\sigma$

B) $\sigma_p = -2\sigma/3$ D) $\sigma_p = -\sigma/2$

E) Ninguna de las anteriores.

7) Si la capacidad del condensador cuando no existe el dieléctrico interior es C_0, la capacidad C del condensador con dieléctrico es:

A) $C = 9C_0/7$ C) $C = 6C_0/5$

B) $C = 8C_0/5$ D) $C = 8C_0/7$