

ELECTROSTÁTICA DE CONDUCTORES

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

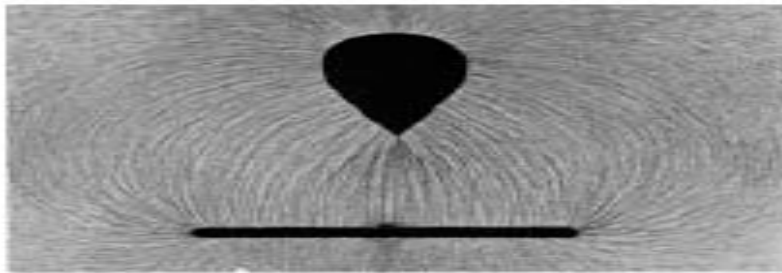
Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Conductores en equilibrio, Condensadores, Capacidad, Energía electrostática de una distribución

| | | | |
|-------------------|------------------|-----------------------|---------------------|
| <i>Elc. Vacío</i> | <i>12-febre.</i> | <i>23-febre.</i> | <i>4+5</i> |
| <i>Elc. Condc</i> | <i>26-febre.</i> | <u><i>1-marzo</i></u> | <i>2+(2+1prob)*</i> |
| <i>Elc. Diele</i> | <i>4-marzo</i> | <i>8-marzo</i> | <i>4+1</i> |
| <i>Elc. Diele</i> | <i>11-marzo</i> | <i>15-marzo</i> | <i>0+5prob*</i> |

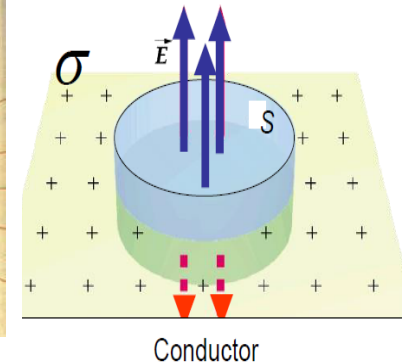
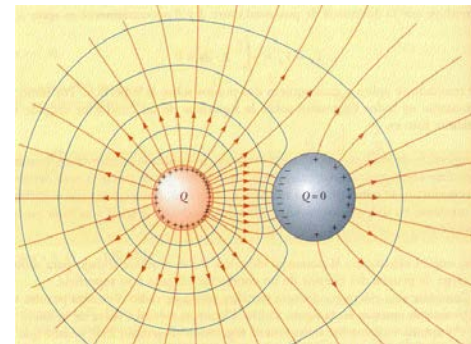
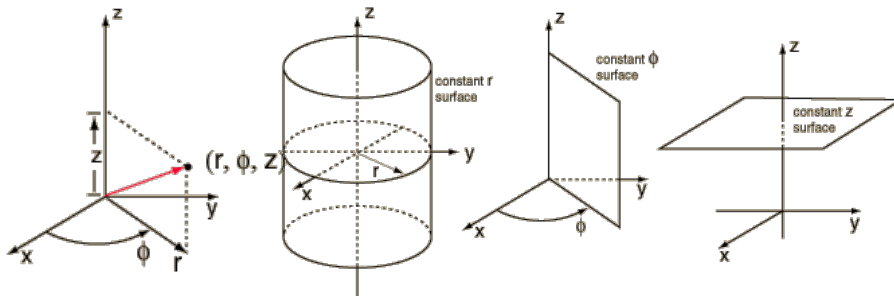
Tema 4. ELECTROSTÁTICA DE CONDUCTORES

4.1 Distribución de Cargas. 4.2 Campo en la Superficie. 4.3 Capacidad. 4.4 Condensadores. Asociación. 4.5 Energía Electrostática.



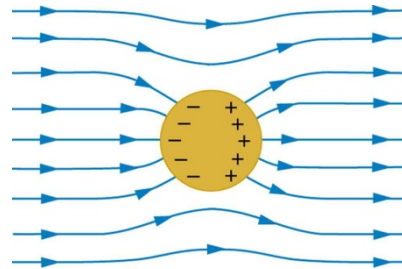
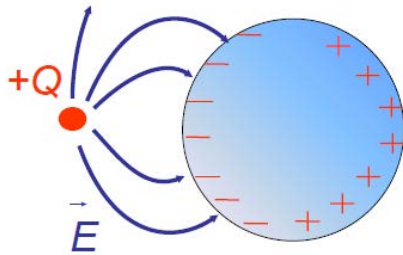
$$\vec{E}|_{\text{cond. equi.}} = -\nabla V = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ V = \text{cte, en volumen } v \end{cases}$$

$$U_e = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$



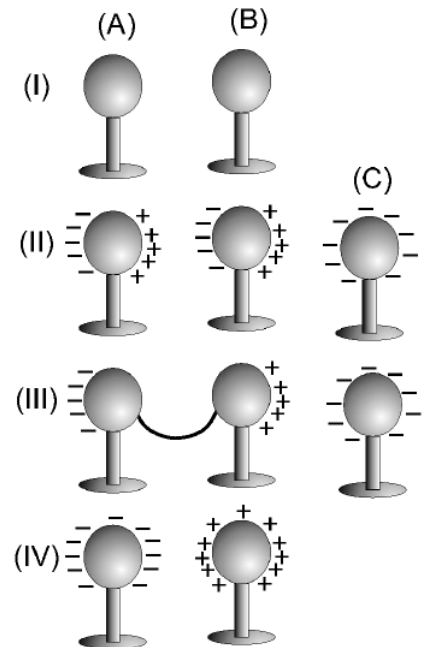
Conductor en equilibrio electrostático

- **Conductor:** Medio en el que los portadores de carga (electrones, iones) pueden desplazarse libremente ante acción de campos.
- Un conductor en **equilibrio electrostático** se halla en mínimo de energía electrostática U_e .
- En tal equilibrio no hay movimiento de cargas (corriente $\mathbf{J} = 0$) ni en su volumen ni en superficie.
- La **carga** no puede salir del conductor (salvo procesos de *ruptura*) : Q se **distribuye** estática **en la superficie**, aun siendo (neta) nula como en conductor inicialmente descargado, la acción de campo externo reorganiza la carga en superficie y modifica el campo exterior.



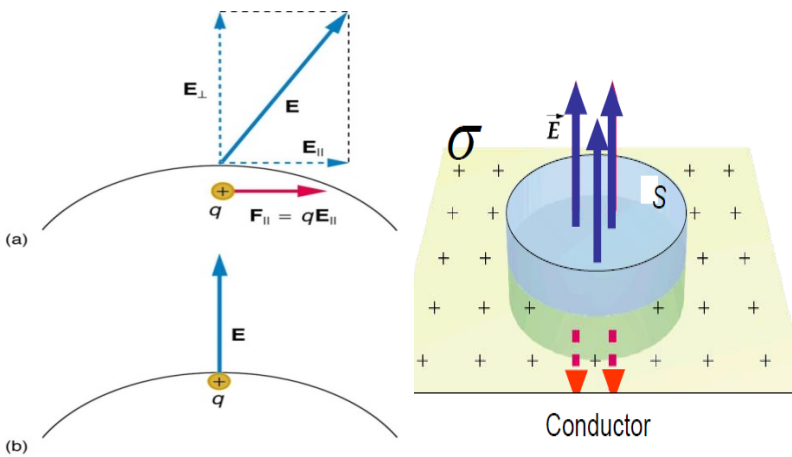
- Configuración de carga se hace estable casi instantáneamente.
- En equilibrio electrostático **no hay campo en el interior** (provocaría movimiento de carga, contra hipótesis de equilibrio) ni tampoco carga neta dentro, siendo el volumen (y superficie) una región equipotencial:

$$\vec{E}|_{cond.equi.} = -\nabla V = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ V = cte, \text{ en volumen } v \end{cases}$$



Conductor en equilibrio electrostático

- La **carga**, nula o en exceso, **en la superficie** se distribuye con densidad superficial $\sigma(\mathbf{r})$
- El campo \mathbf{E} inmediato en superficie del conductor no tiene componente tangente a la superficie (daría movimiento de carga), es normal a ella:



$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\text{int.}} = 0 \\ \mathbf{E}_{\parallel} = 0 \\ \mathbf{E}_{\perp} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{n}S + 0(-\mathbf{n}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S \\ \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} = -\nabla V \end{cases}$$

$$\frac{F}{S} \simeq \frac{qE}{S} = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \equiv T \text{ (tensión, presión negativa, sobre } q \text{ en } S)$$

- La energía electrostática de un conjunto de conductores y el potencial en todo \mathbf{r} creado por la distribución serían (V es constante en cada uno):

$$U_e = \frac{1}{2} \int dqV(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} dS_i \sigma_i V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i ; \quad V(\mathbf{r}) = \sum_i \int_{S_i} \frac{dS_i' \sigma_i(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \sigma_i = -\epsilon_0 \mathbf{n}_i \cdot \nabla V(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{r} \in S_i)$$

- **Pero** σ no se conoce sin tener $V(\mathbf{r})$, que debe calcularse por otros medios, p.e. con **ecuación de Laplace**, conocidos V y/o cargas en superficies (son problemas de contorno, con solución única)

Sugerencia: Una excelente web para texto y visualización de campos

<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/>

Conductor en equilibrio electrostático

- Ejm: La densidad de carga σ es mayor a menor curvatura de superficie: *efecto punta* (ver apuntes). Modelo simple de esferas equipotenciales:



$$\sigma_1 = \frac{R_1}{R_2} \sigma_2 \gg \sigma_2$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

$$\frac{q_1}{4\pi R_1^2} R_1 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2^2} R_2 \Rightarrow \sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2$$

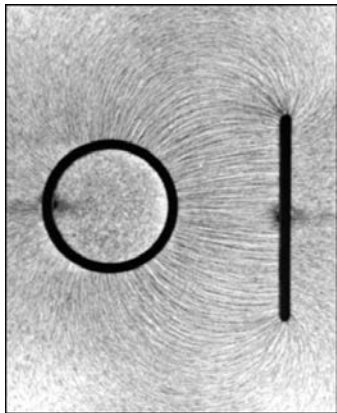
$$\mathbf{E}(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n}$$

Cálculo de σ en S del conductor :

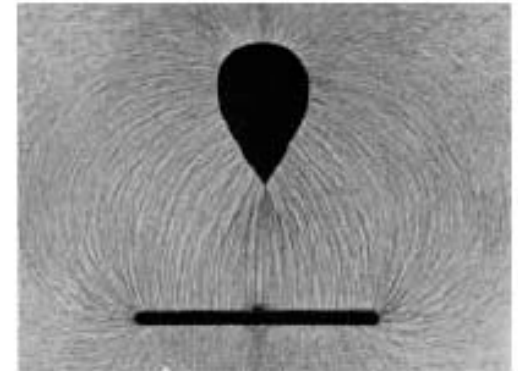
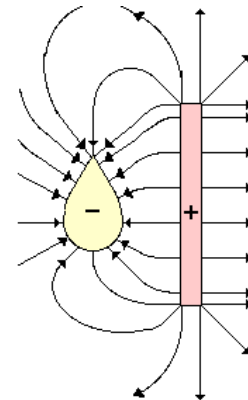
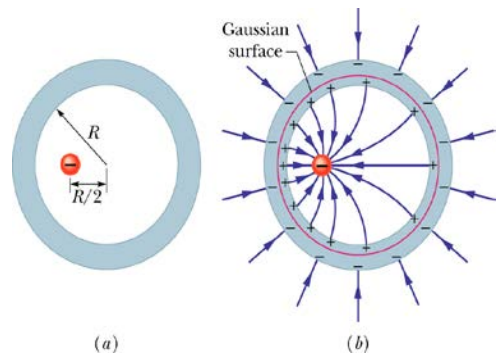
$$\mathbf{E}(S) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{n} \Rightarrow \sigma = \epsilon_0 \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}$$

\mathbf{n} : normal del material al exterior

- La líneas de campo son perpendiculares a cada conductor, no entran en su volumen. El Teorema de Gauss, en su forma de **Ley de Gauss** en Electrostática, ayuda a comprender comportamiento del campo en situaciones comunes:



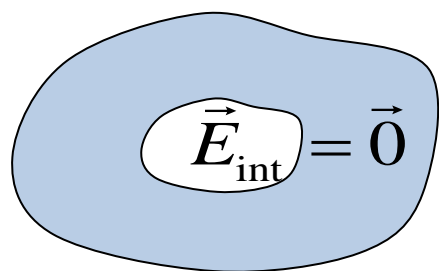
© 2004 Thomson - Brooks/Cole



Apantallamiento del campo. Conservación de la carga.

- Conductor aislado con una cavidad: dentro de la cavidad sin carga no hay campo (la cavidad es un *blindaje* contra campos externos, Jaula o cubeta de Faraday).

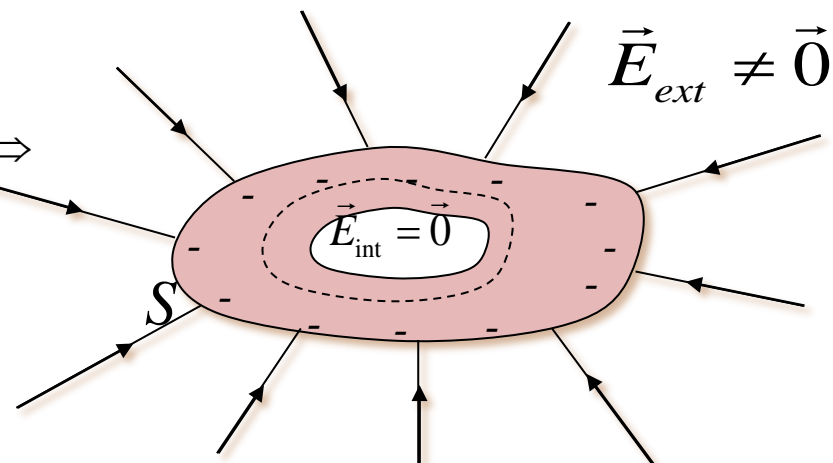
- Sin carga ni campo externo:



$$\vec{E}_{ext} = \vec{0}$$

$$0 = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0} \Rightarrow Q_{interior} = 0$$

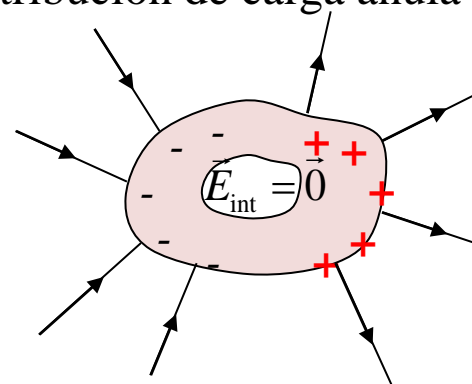
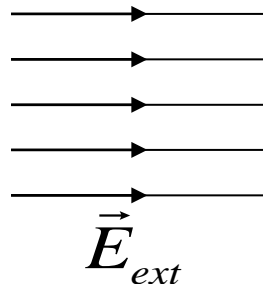
- Con carga neta negativa p.ejm. (aparece distribuida solo en superficie externa):



- La carga se redistribuye en la superficie (haya o no carga inicial en ella) ante acción de campo exterior. En la cavidad no hay campo, la distribución de carga anula (**apantalla**) el campo en el conductor .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{cavidad}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{cavidad} = 0$$

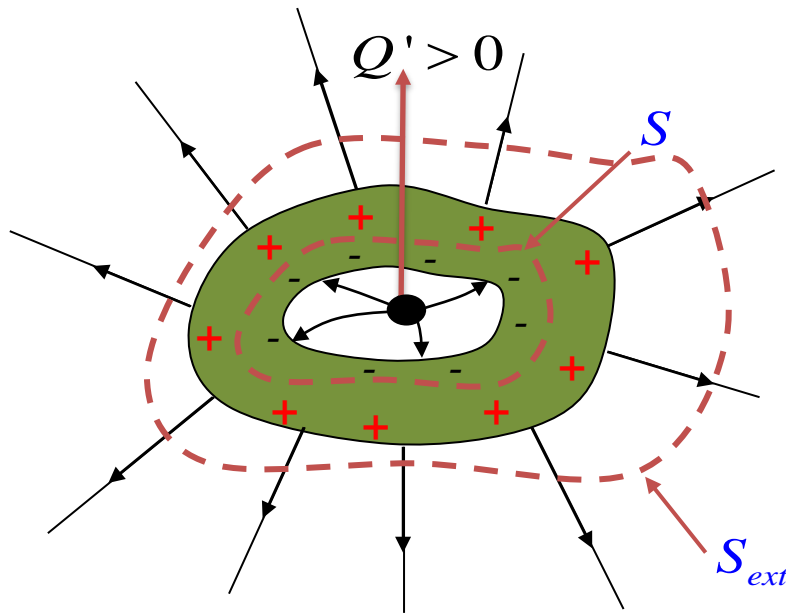


Conductor con carga en cavidad (ver prob. 4.1)

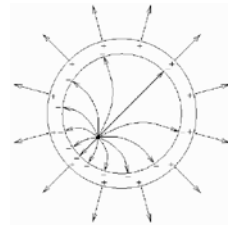
- Conductor descargado inicialmente pero con carga Q' (+) en la cavidad: en la cara interna se induce carga (distribuida) total $Q_i = -Q'$ (aplicando **Ley de Gauss** a S cerrada en conductor **y** el principio de **conservación de la carga**):

$$0 = \oint_{S_{\text{conduct.}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q' + Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow Q_i = -Q'$$



- Aplicando Th. Gauss a superficie externa S_{ext} cerrada, el flujo del campo exterior por ella será proporcional a la carga Q' , luego en superficie exterior se distribuye la carga $Q_e = -Q_i = Q'$



$$\oint_{S_{\text{ext}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{Q' + Q_i + Q_e}{\epsilon_0}$$

$$Q_i = -Q' \Rightarrow Q_e = Q' = -Q_i$$

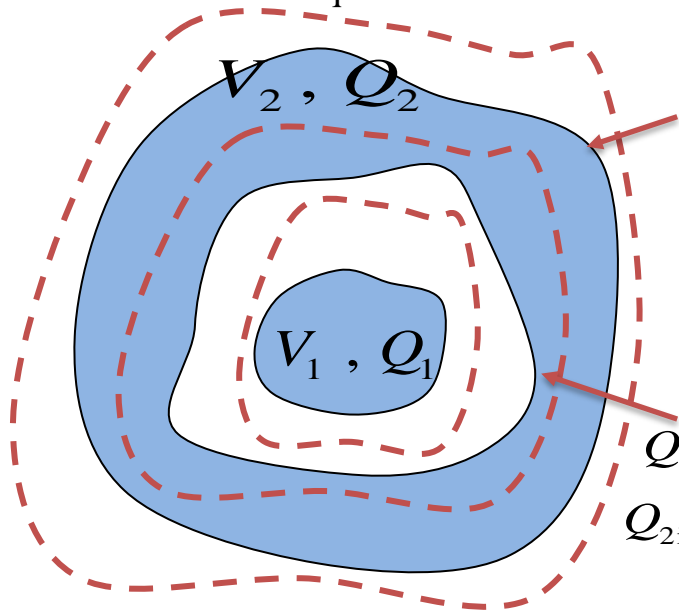
- Análogamente, si el conductor ya tuviera carga Q inicial, en la *superficie interna* del hueco se distribuye carga Q_i y en la *superficie exterior* del conductor Q_e , originado (en general) campo, y por **conservación de carga** en el conductor $Q_e + Q_i = Q$:

$$Q_i = -Q' ; \quad Q' + Q_i + Q_e = Q' + Q \Rightarrow Q_e = Q' + Q \rightarrow \mathbf{E}_{\text{ext}} \neq 0$$

1) Aplicarlo al caso particular $Q = -Q'$. 2) Si Q' se sustituye por un dipolo de cargas q y $-q$, y la carga del conductor es $Q=0$ ¿habrá campo en el hueco? ¿y en el exterior? ¿será $\sigma = 0$ en la superficie interna?

Aplicación: Condensador

- Condensador: cavidad limitada por dos conductores 1 y 2 a potenciales V_1 y V_2 , estando el conjunto asilado,
- Cada conductor (armadura) alberga carga, siendo $Q_1 + Q_2 = 0$, ambos están en **influencia mutua total**: Todas las líneas de campo nacen de una armadura y mueren en la otra (no hay campo fuera, si bien no es necesario que las armaduras se enfrenten totalmente y sean cerradas... surge "efectos de borde")



$$Q_{2ext} = Q_2 + Q_1 = 0 \quad \oint_{S_{ext}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_{total}}{\epsilon_0} = 0$$

$$\rightarrow Q_1 + Q_2 = 0; \quad Q \equiv |Q_1|$$

Resolver:

$$\text{Ec. Poisson/Laplace : } \begin{cases} \nabla^2 V = -\rho / \epsilon_0 = 0 \\ V(S_1) = V_1, V(S_2) = V_2 \end{cases}$$

$$Q_{2int} = -Q_1$$

$$Q_{2int} + Q_{2ext} = Q_2$$

$$U_e = \frac{1}{2} Q_1 V_1 + \frac{1}{2} Q_2 V_2 = \frac{1}{2} Q \Delta V$$

- El sistema alberga energía electrostática dada por
- donde Q es la carga del condensador (valor de la **carga positiva** del conductor, en la **placa a mayor potencial**). Nota: Se deriva al aplicar resultados del caso anterior con las sustituciones siguientes (para obtener carga en caras interior y exterior del conductor 2):

$$Q \rightarrow Q_2, Q' \rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_i = -Q' \text{ y } Q_e = Q + Q' = 0$$

Capacidad

- Ya que V y Q son proporcionales para un conductor aislado (a mayor carga en superficie mayor potencial) conviene definir la magnitud Q/V , o capacidad C del conductor:

$$C = \frac{Q}{V} \text{ (en F) ejm. Esfera de radio } R : C = Q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)^{-1} = 4\pi\epsilon_0 R$$

- Esto sugiere para un conjunto de n conductores cada uno a potencial V_j y con carga Q_j las n relaciones lineales siguientes, en términos de coeficientes de capacidad C_{ji} (o de potencial P)

$$Q_j = \sum_i C_{ji} V_i \quad \Leftrightarrow \quad V_j = \sum_i P_{ji} Q_i \quad ; \quad C_{ji} = C_{ij} \text{ etc.}$$

- Para un condensador se tiene el coeficiente de capacidad y la energía como:

$$Q_1 = CV_1 - CV_2 = Q \Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V}, \quad U_e = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \geq 0$$

- La energía electrostática U_e almacenada es positiva (va como cuadrado del campo E) luego C es positiva y depende de la **geometría del sistema**.

$$U_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{v(\text{cavidad})} E^2 dv > 0 \Rightarrow C > 0$$

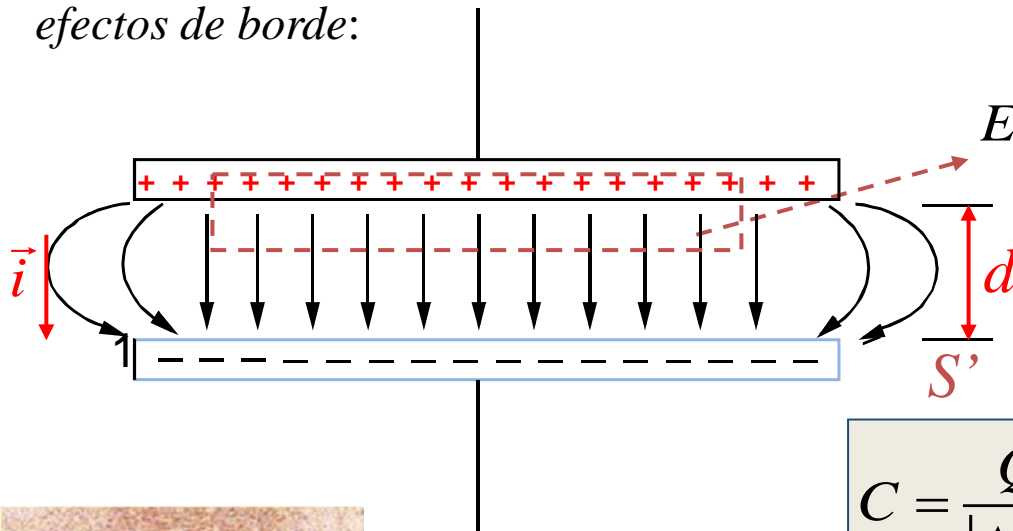
Definir F (Faradio o Faraday) y determinar el radio de una esfera metálica de capacidad 1F ¿Por qué se mide en F/m la ϵ_0 ?

Ejemplos condensadores:

CONDENSADOR PLANO-paralelo infinito:

Separación entre placas: d , Superficie (*enfrentada*) de las placas: S ($S \gg d^2$).

Carga del condensador: Q , densidad $\sigma = Q/S$. Por Ley de Gauss, *despreciando efectos de borde*:



$$E \cdot S' = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma S') \Rightarrow E = \frac{Q}{S \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

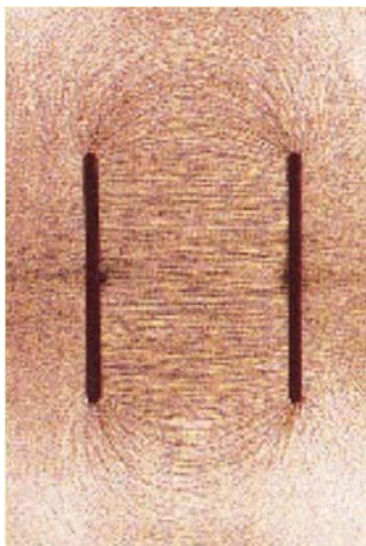
$$\Delta V = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_1^2 \frac{Q}{S \epsilon_0} dx = - \frac{Q}{S \epsilon_0} d$$

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \epsilon_0 \frac{S}{d} \quad ; \quad U_e = \epsilon_0 \frac{\Delta V^2 S}{2d}$$

- También puede hallarse el campo **por superposición** de campos creados por láminas de carga **o resolviendo** la ecuación de **Laplace**:

$$E = E_+ + (-E_-) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \left(-\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}; \int_{V_1}^{V_2} dV = \Delta V = - \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx' = - \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = \frac{d^2}{dx^2} V = 0 \rightarrow V = ax + b, \mathbf{E} = -a\mathbf{i}, \begin{cases} V(0) = V_1 \\ V(d) = V_2 \end{cases} \rightarrow V = \frac{\Delta V}{d} x + V_1 \dots$$

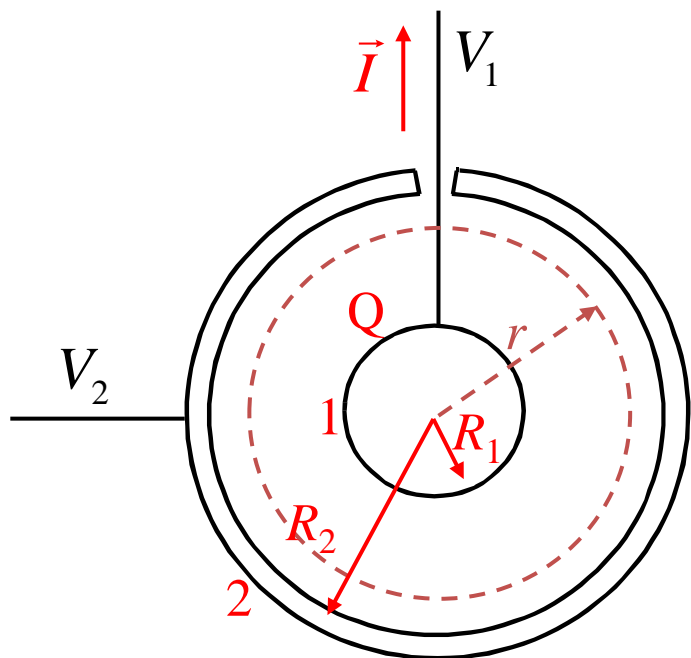


Condensador esférico

- CONDENSADOR ESFÉRICO de Radios: R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$) y Carga Q

$$E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} E dr = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 R_1}{(R_2 - R_1)}$$



Caso límite: Si $R_1 \approx R_2 = R \rightarrow 4\pi R_2 R_1 \approx 4\pi R^2 = S$

y $R_2 - R_1 = d \ll R \Rightarrow C = \frac{S\epsilon_0}{d}$ como la del condensador plano.

- También puede resolverse la **ecuación de Laplace** (laplaciano en simetría esférica) entre las armaduras con las condiciones de contorno dadas, de V en R_1 y R_2 :

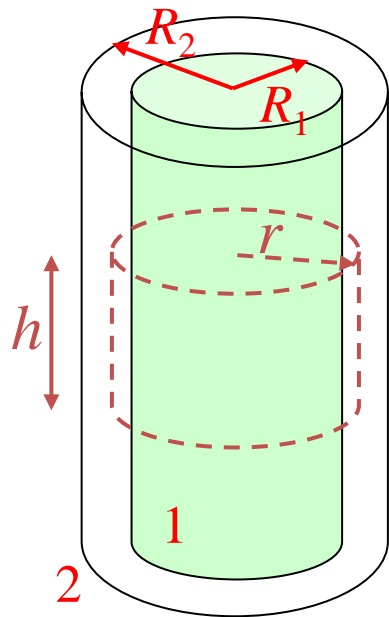
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = cte. \Rightarrow V = \frac{A}{r} + B, \text{ A y B salen de: } V(R_1) = V_1, V(R_2) = V_2$$

Condensador cilíndrico:

- CONDENSADOR CILÍNDRICO de Radios: R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), Altura H ($H \gg R_1$ y R_2) y carga Q (densidad por unidad de longitud $\lambda = Q/H$) . Por Gauss:

$$E 2\pi r h = \frac{Q_d}{\epsilon_0} = \frac{Q h}{H \epsilon_0} \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi r H \epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$V_2 - V_1 = - \int_{R_1}^{R_2} E dr = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r H \epsilon_0} dr = - \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



- Caso límite: condensador plano entre armaduras de pequeña separación:

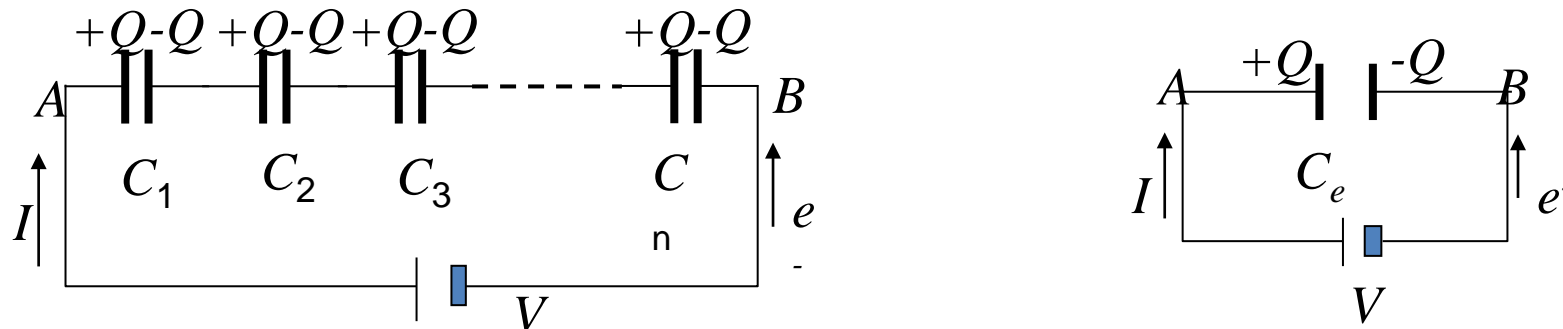
$$C = \frac{2\pi H \epsilon_0}{\ln(R_2 / R_1)}, c = \frac{C}{H} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(R_2 / R_1)} ; \text{ y si } R_2 = R_1 + d$$

$$C \approx \frac{2\pi H \epsilon_0}{(d / R_1)} = \frac{S \epsilon_0}{d} \quad \text{si } 0 < d \ll R_1$$

$$\text{Por Laplace: } \nabla^2 V = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dV}{d\rho} \right) = 0 \text{ etc.}$$

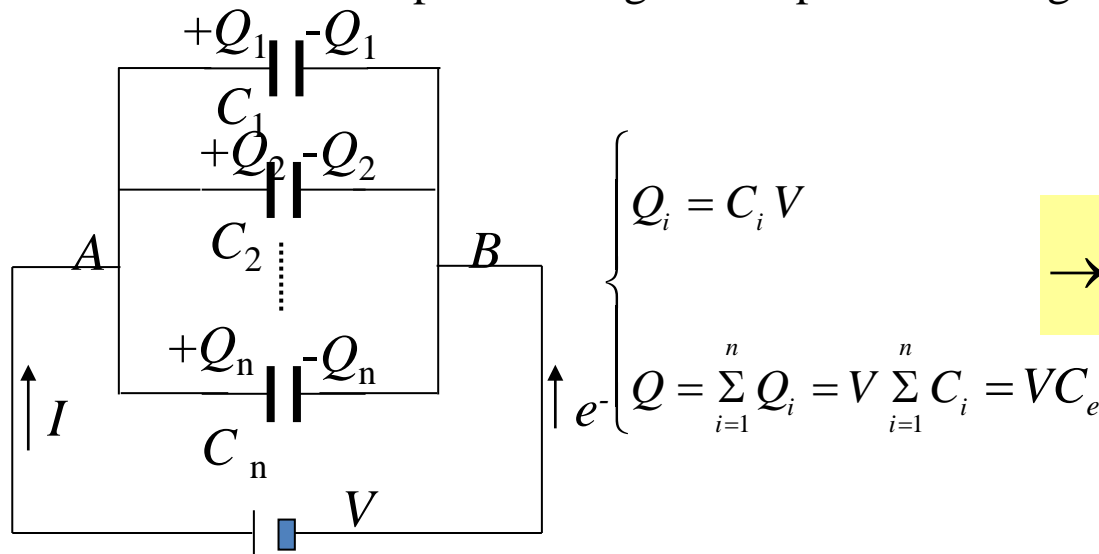
Asociación de condensadores: Capacidad equivalente C_e

SERIE: Si una armadura se carga con $+Q$ en la otra se induce $-Q$, siendo la diferencia de potencial la suma de las diferencias de potencial en cada componente:



$$V = V_A - V_B = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} = Q \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} = \frac{Q}{C_e} \rightarrow \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

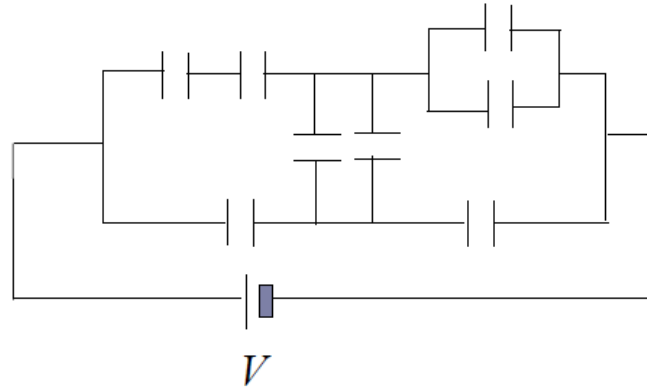
PARALELO: cada componente a igual dif. poten. La carga total es suma de cargas:



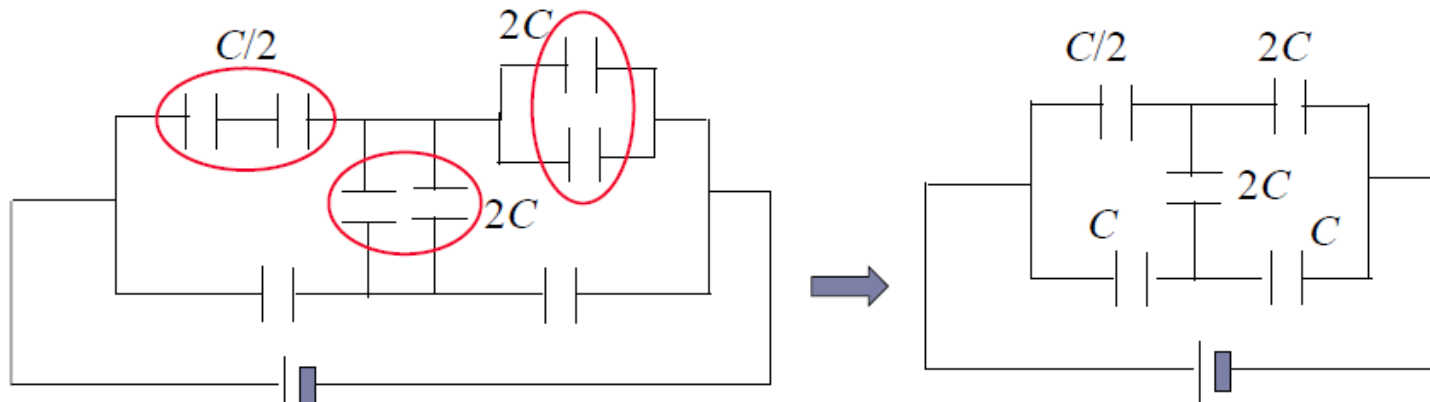
$$\rightarrow C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

Ejemplo de asociación mixta y cálculo de cargas: (ver apuntes)

Todos los condensadores tienen capacidad C



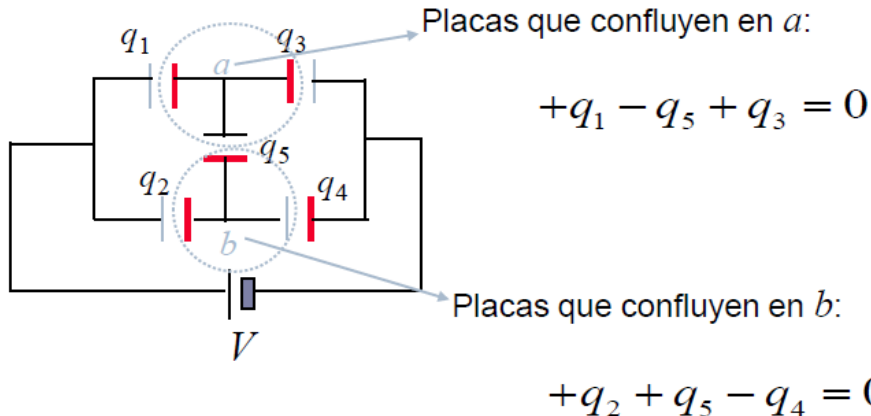
Agrupamos asociaciones en serie y en paralelo



Ejemplo: (ver libro de apuntes y problemas 4.7, 4.8)

Para cada nodo se plantea la conservación de la carga:

(si hay n nodos se necesitan n-1 ecuaciones)



$$+V_1 + V_5 - V_2 = 0 \Leftrightarrow +\frac{q_1}{C/2} + \frac{q_5}{2C} - \frac{q_2}{C} = 0$$

$$+V_5 + V_4 + V_3 = 0 \Leftrightarrow +\frac{q_5}{2C} + \frac{q_4}{C} + \frac{q_3}{2C} = 0$$

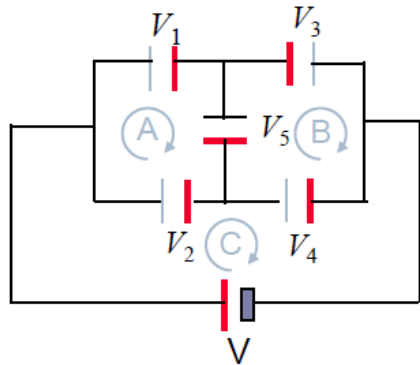
$$+V_2 + V_4 + V = 0 \Leftrightarrow +\frac{q_2}{C} + \frac{q_4}{C} + V = 0$$

$$q_1 = -\frac{5}{14}CV; \quad q_2 = -\frac{17}{28}CV; \quad q_3 = \frac{8}{14}CV$$

$$q_4 = -\frac{11}{28}CV; \quad q_5 = \frac{3}{14}CV$$

Ecuaciones de mallas simples:

(se necesitan tantas como mallas simples hay en el circuito)



Malla A:

$$+V_1 + V_5 - V_2 = 0$$

Malla B:

$$-V_5 - V_4 - V_3 = 0$$

Malla C:

$$+V_2 + V_4 + V = 0$$

Y la **capacidad equivalente**, teniendo en cuenta que las cargas que envía la fuente se reparten entre los condensadores 1 y 2:

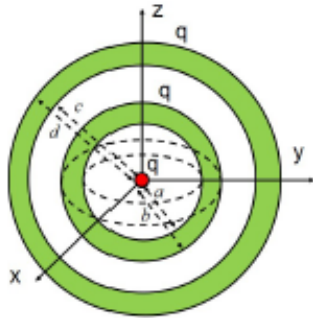
$$C_e = \frac{|q_1| + |q_2|}{V} = \frac{27}{28}C$$

Problemas:

• Problema 4.1

Una carga puntual q está situada en el centro geométrico de dos cortezas esféricas metálicas conductoras que contienen a su vez una carga q como se muestra en la figura. La corteza interior tiene radios a y $b > a$, la exterior $e > b$ y $d > e$. Se pide determinar:

- 1) La distribución de la carga eléctrica en cada corteza esférica.
- 2) El campo y potencial eléctricos en todo punto del espacio.



$$1) \quad \sigma_a = -\frac{q}{4\pi a^2} \quad \sigma_b = \frac{2q}{4\pi b^2} \quad \sigma_e = -\frac{2q}{4\pi e^2} \quad \sigma_d = \frac{3q}{4\pi d^2}$$

2) Coordenadas esféricas:

$$r > d \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{r}$$

$$d > r > e \quad \mathbf{E} = 0 \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3q}{d}$$

$$e > r > b \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q}{d} + \frac{2q}{r} - \frac{2q}{e} \right)$$

$$b > r > a \quad \mathbf{E} = 0 \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q}{d} + \frac{2q}{b} - \frac{2q}{e} \right)$$

$$a > r \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3q}{d} + \frac{2q}{b} - \frac{2q}{e} + \frac{q}{r} - \frac{q}{a} \right)$$

Sugerencia: 3) Repetirlo con cargas q_1, q_2 y q_3 arbitrarias y dar el valor de la carga central q_2 para que E sea nulo fuera de la distribución. 5) Contribución a la energía electrostática U_e de las dos cáscaras conductoras.

• Problema 4.2

Entre dos placas metálicas de espesor d con carga $+q$ y $-q$ se introduce una lámina de carga con densidad superficial σ_0 y espesor despreciable como muestra la figura. La distribución de la carga eléctrica sobre las superficies metálicas uniforme y su superficie $S \gg (a+b)^2$ muy grande. Se pide:

- Determinar las densidades de carga sobre las superficies metálicas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4 de la figura.
- Calcular el campo eléctrico en el espacio entre las placas (puntos P y Q de la figura) empleando el principio de superposición.
- Verificar el resultado anterior empleando la ley de Gauss.
- Calcular el potencial eléctrico $V(x)$ en todo punto del espacio, considerando que en $x = 0$ es nulo.

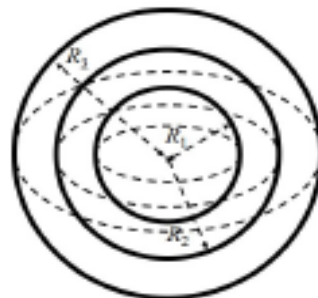
- $\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{u_0}{2} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{q}{S} - \frac{u_0}{2} \quad ; \quad \sigma_3 = -\frac{q}{S} - \frac{u_0}{2}$
- $\mathbf{E}(P) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \mathbf{i} \quad ; \quad \mathbf{E}(Q) = -\frac{\sigma_3}{\epsilon_0} \mathbf{i}$
- $0 < x < b \quad V(x) = \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} x$
 $b \leq x \leq d \quad V(x) = \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} b$
 $(b+d) < x \quad V(x) = \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} b - \frac{\sigma_4}{\epsilon_0} (x - b - d)$
 $-a < x < 0 \quad V(x) = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} x$
 $-(a+d) \leq x \leq -a \quad V(x) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} a$
 $x < -a \quad V(x) = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} a + \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} (x + a + d)$

Problemas:

• Problema 4.3

En el sistema de la figura está formado por tres superficies metálicas esféricas concéntricas de radios $R_3 > R_2 > R_1$ y espesor despreciable. El campo eléctrico para $r > R_3$ es nulo y se pide:

- Calcular la carga eléctrica de cada superficie si valor de del potencial eléctrico de cada una es $V_1 = V(R_1)$, $V_2 = V(R_2)$ y $V_3 = V(R_3)$ respectivamente.
- Calcular la capacidad del sistema formado al conectar mediante un cable conductor la segunda y tercera superficie para formar un condensador esférico.
- Calcular su energía electrostática para diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_3$.

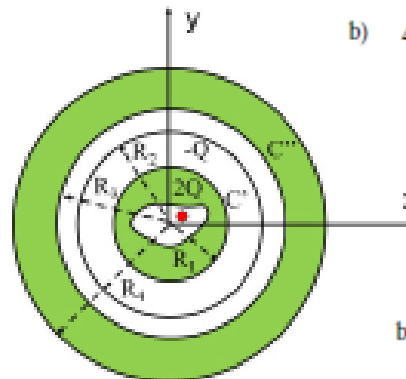


$$\begin{aligned} \text{a) } q_1 &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} (V_2 - V_1) \\ ; \quad q_2 &= -q_1 + \frac{4\pi\epsilon_0 R_3 R_2}{R_3 - R_2} V_2 \quad ; \quad q_3 = -(q_1 + q_2) \\ \text{b) } C &= \frac{4\pi\epsilon_0 R_3 R_1}{R_3 - R_1} \\ \text{c) } U_e &= \frac{C}{2} (V_1 - V_3)^2 \end{aligned}$$

Sugerencia: Repetir el problema si la región entre R_1 y R_2 fuera un conductor. Obtener la energía electrostática almacenada por la distribución en este caso.

• Problema 4.4

Un conductor esférico C' de radio R_1 y con carga $2Q$ tiene un hueco en su interior que contiene una carga puntual Q , no necesariamente en su centro. Está rodeado por una distribución superficial de carga de concéntrica de radio R_2 y carga $-Q$ de espesor despreciable. Otro conductor C'' de radios R_3 y R_4 y carga neta nula se trae desde el infinito hasta alcanzar la disposición de la figura. Se pide calcular:



$$\begin{aligned} \text{a) } V_{C'} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{2}{R_3} + \frac{2}{R_4} \right) \\ \text{b) } \Delta E &= -U_e = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3} \right) \\ V_{C''} &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 R_4} \\ \text{b) } \Delta E &= -U_e = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3} \right) \end{aligned}$$

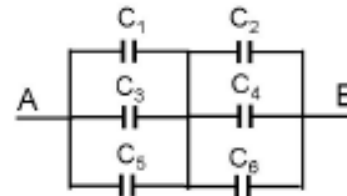
- El valor del potencial eléctrico de los conductores C' y C'' .
- La energía necesario aportar para que el conductor C'' alcance la disposición indicada.

Problemas:

- **Problema 4.5**

Para la red de condensadores de la figura de pide determinar:

- a) La capacidad equivalente entre los puntos A y B .
- b) La carga en el estado estacionario de cada condensador si se establece una diferencia de potencial $V_{AB} = V_o$ entre dichos puntos.
- c) La energía electrostática del sistema en el supuesto del apartado anterior.



Solución :

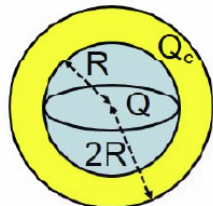
$$\text{a) } C_{AB} = \frac{(C_1 + C_3 + C_5)(C_2 + C_4 + C_6)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6}$$

$$\text{b) } U_e = \frac{1}{2} C_{AB} V_o^2$$

Problemas:

Problemas (ejm. de examen):

2.28) Una distribución esférica uniforme de carga Q y radio R se rodea de un conductor en forma de corteza esférica. Los radios interior y exterior del conductor son R y $2R$, respectivamente, y su carga $Q_c = 2Q$. Calcular la densidad superficial de carga σ en la superficie de radio $2R$.



Solución: $\sigma = \frac{3Q}{16\pi R^2}$

2.7) Dos superficies esféricas concéntricas, 1 y 2, de radios R_1 y R_2 , con $R_1 < R_2$, tienen cargas $+q$, la 1, y $-q$, la 2, uniformemente distribuidas. Calcular la energía electrostática del sistema descrito.

Solución: $U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

2.8) Dado el potencial electrostático $V = A(x^2 + y^2 + z^2)$, para $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, donde A es constante con dimensiones. Se verifica, para todos los puntos de esta región del espacio, que:

- 1) El campo electrostático es: $\vec{E} = 2A(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$.
- 2) La densidad de carga es: $\rho = 3A\epsilon_0$.
- 3) La densidad de carga es: $\rho = -6A\epsilon_0$.
- 4) La densidad de carga es: $\rho = A\epsilon_0$.
- 5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

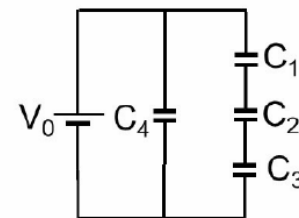
Solución: 3)

2.9) En el circuito de la figura $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$. Se pide:

- 1) La capacidad equivalente total.
- 2) La energía electrostática almacenada en el condensador C_3 .

Solución:

- 1) $4C/3$
- 2) $\frac{1}{18} V_0^2 C$



2.10) Una esfera conductora de radio R_1 se encuentra rodeada por una corteza esférica también conductora de radios interior R_2 y exterior R_3 , concéntrica con aquella. La corteza conductora está conectada a tierra ($V_{\text{tierra}} = 0$) mientras que la esfera está conectada a un potencial V_0 . Se pide:

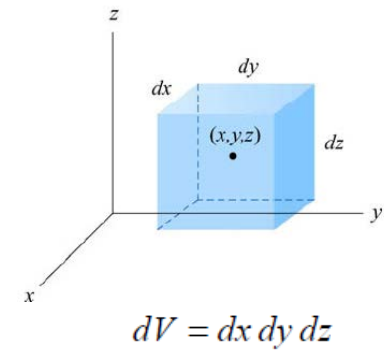
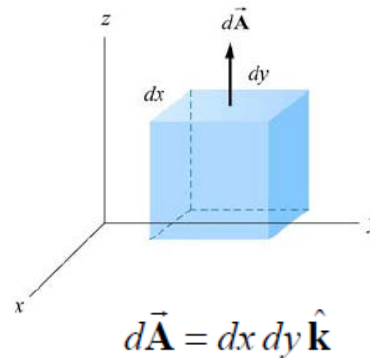
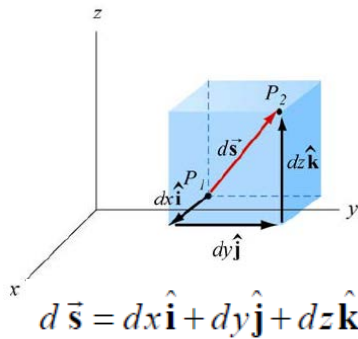
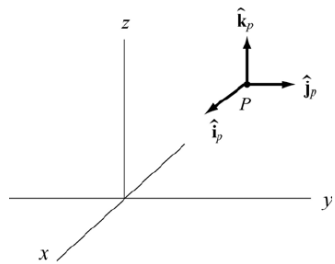
- 1) La carga almacenada por la esfera q_1 .
- 2) La densidad de carga σ en la superficie exterior de la corteza.

Solución:

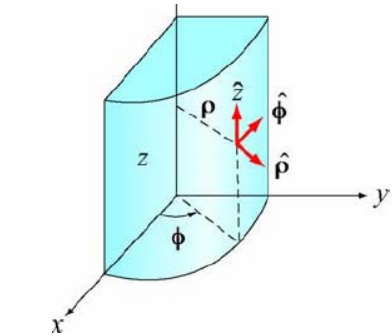
1) $q_1 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V_0$

2) $\sigma = 0$

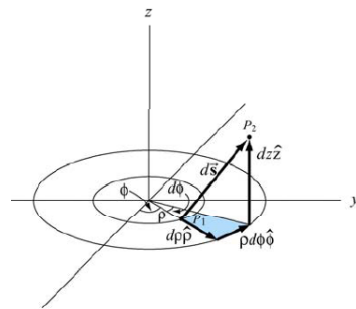
Coordinates. Line, surface and volume Elements.



$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi$$

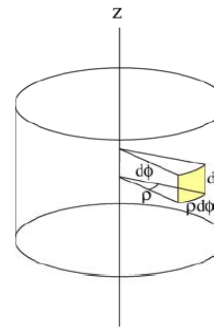


$$\hat{\rho} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

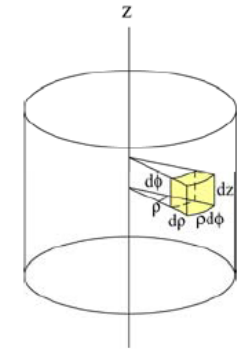


$$d\vec{s} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k}$$

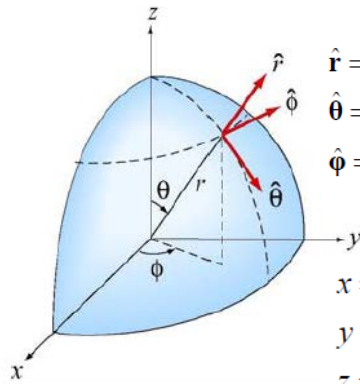
$$d\vec{A} = \rho d\phi d\rho \hat{k}$$



$$dA = \rho d\phi dz$$



$$dV = \rho d\phi d\rho dz$$



$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}$$

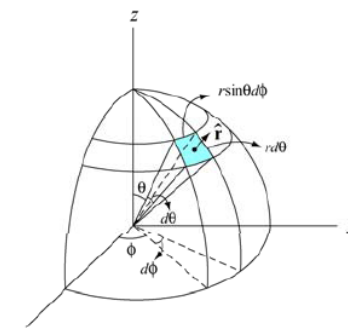
$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

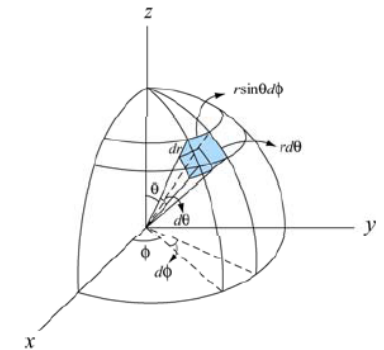
$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



$$d\vec{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}$$



$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$$