UPM PlasmaLab

etsiae UPM

POLITÉCNICA "Ingeniamos el futuro"

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Dr. José Manuel Donoso

http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Ley de Coulomb, Campo creado por distribuciones de carga, Teorema de Gauss y aplicaciones, Energía electrostática de una distribución

Programa (ver apuntes de FII de ETSIAE)

Vectores	3-febrero	12-febre.	4+5
Elcts.Vacío	14-febre.	26-febre.	4+5
Elcts.Condc	26-febre.	5-marzo	2+(2+1prob)
Elcts.Dielc	5-marzo	19-marzo	4+4
Elcts.Dielc	19-marzo	21-marzo	+2 (o repaso)

Tema 3. ELECTROSTÁTICA DEL VACÍO

3.1 Carga Eléctrica. 3.2 Ley de Coulomb. 3.3 Campo Electrostático. 3.4 Teorema de Gauss y Aplicaciones. 3.5 Ecuaciones de la Electrostática. 3.6 Potencial Electrostático. 3.7 Trabajo. 3.8 Energía Electrostática.

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_{q_i \text{ interior a } V} q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

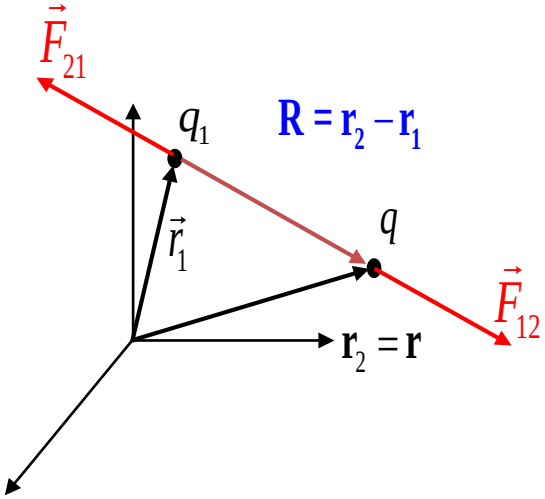
$$\oint_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{E}\, dv = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dv \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dv \\ \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0,\ \forall\Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\nabla V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 V = 0 \ , \text{ donde } \rho = 0 \end{cases}$$

$$U_e = \tfrac{1}{2}\int_{vol\to\mathbb{R}^3} V\rho\, dv = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_A V\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}_{\to 0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2 dv = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{v\to\infty} E^2 dv$$

Ley de Coulomb: interacción electrostática en el vacío.

- La fuerza de interacción entre dos cargas en reposo, separadas una distancia R en el vacío, viene dada por la conocida ***Ley de Coulomb***:



$$\mathbf{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q}{R^2}\mathbf{u}_R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\right|^2}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\right|} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1\, q \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\right|^3} = -\mathbf{F}_{21}$$

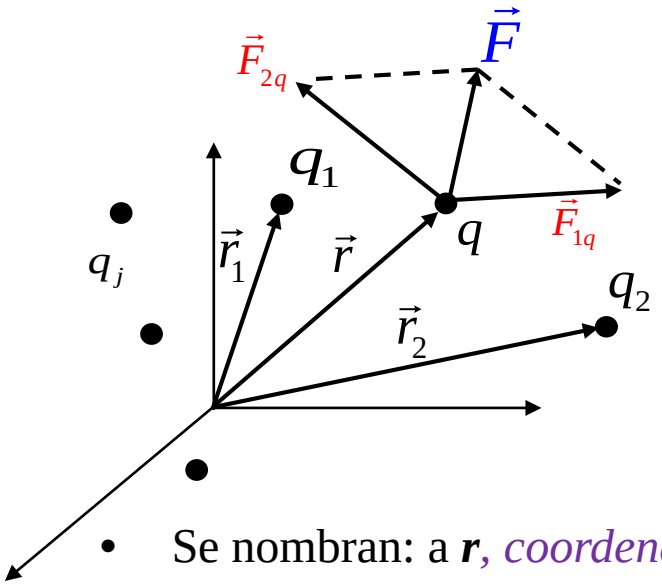
$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 9\cdot 10^9\ N\cdot m^2\cdot C^{-2} \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\ N^{-1}\cdot m^{-2}\cdot C^2 = 8{,}854\cdot 10^{-12}\ Fm^{-1}$$

- La fuerza por cada unidad de carga en el punto P ocupado por la carga de prueba q puede medirse por el vector intensidad de campo electrostático, o campo creado por q_1 en el punto P:

$$\mathbf{E}_1(\vec{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1\right|^3} \quad (en\ NC^{-1})$$

Superposición:

- Si la carga q está sometida interacción con *n* cargas puntuales, la fuerza sobre *q* es la superposición:



$$\mathrm{F} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_{j0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j q \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\right|^3}$$

y

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; \{q_j\}) = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\right|^3}$$

- Se nombran: a ***r***, *coordenadas de campo,* las $\boldsymbol{r}_j$ (o ***r´***) *son coordenadas de fuente*

- La fuerza por unidad de carga en el punto P ocupado por *q* daría el campo **E** (vector intensidad de campo electrostático) creado por la distribución de cargas puntuales en el punto.
- Esta magnitud vectorial caracteriza el campo electrostático en cada punto del espacio (propiedad del espacio por estar la distribución de carga) y al poner en P una carga *q* de prueba, la fuerza sobre ella sería:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{E}$$

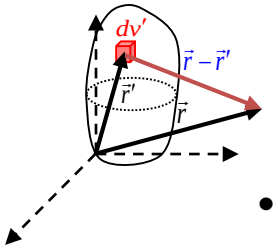
Trabajo en un campo E. Potencial: derivación física. Concepto.

- Dado que:

$$\nabla \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \Rightarrow$$

- **El vector campo deriva del gradiente de un potencial electrostático escalar *V***

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} \right) = -\nabla V \xrightarrow{Define.Potencial}$$



$$V(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} V_i(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \right] \quad , \quad V(\infty) = 0,$$

- El **trabajo realizado** por el campo para llevar la carga puntual de prueba *q* del punto de campo *A* al *B* por la curva Γ es: (resulta independiente de la curva)

$$W_{AB} = \int_{A,\Gamma}^{B} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = q\int_{A,\Gamma}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_{A,\Gamma}^{B} \left[q(-\nabla V)\right]\bullet d\vec{l} = -q\int_{A}^{B} dV = -\,q(V(B)-V(A)), \quad \forall\,\Gamma$$

- La carga *q* en el punto de potencial *V* tiene **energía potencial electrostática** $E_p = qV + cte$:

$$W_{AB} = -q(V(B)-V(A)) = -\Delta E_p \;;\; E_p = qV(\mathbf{r}) \Rightarrow \mathbf{F} = -\nabla E_p = q\mathbf{E}$$

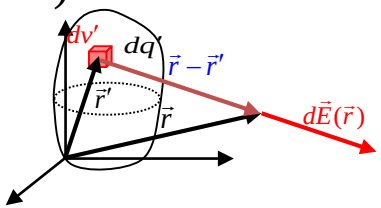
El potencial en un punto coincide con el trabajo necesario para llevar la unidad de carga desde el infinito a dicho punto.

***Definición de voltio**: …completar … discutir el **signo de W** (del campo) y W' (a realizar).*

***Si el trabajo es positivo, lo realiza el campo:** En general, la carga q tiende a ir hacia donde su E_p disminuye*

Aproximación del continuo: distribuciones continuas de carga

- A gran distancia de una distribución que ocupe volumen *V* *(o sobre una lámina de área S o en hilo de longitud L)* la carga "aparece" como continua: definimos **densidad** (volumétrica, superficial o lineal) **de carga.**
- En un volumen pequeño δv que tenga δN partículas con carga, de posición promedio **r'** , se puede definir la densidad de carga como: (carga por cada unidad de volumen, área o longitud)



$$\rho(\mathbf{r}') = \left.\frac{\sum_{j\ en\ \delta V} q_j}{\delta v}\right|_{\delta v << v} \equiv \frac{dq'}{dv'}\ (Cm^{-3}) \begin{cases} \text{en superficie: } \sigma(\vec{r}') = \dfrac{dq'}{dS'}\ \ en\ \ C/m^2 \\ \text{en un hilo: } \quad \lambda(\vec{r}') = \dfrac{dq'}{dl'}\ \ en\ \ C/m \end{cases}$$

- Si cada elemento de volumen (superficie o longitud) se supone pequeño, la posición **r***j* pasa a una posición promedio **r'** (coordenadas de fuente), y la suma en *j* se transforma en integral (paso al continuo) dando el vector campo (y el potencial) como:

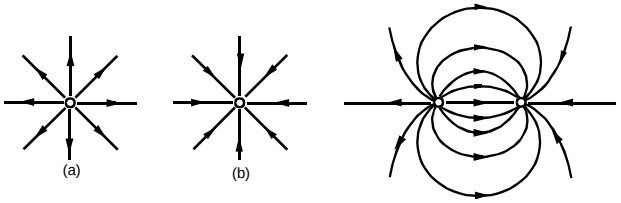
$$\left.\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int_{\vec{E}} d\vec{E} = \int_v \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \overbrace{\rho(\vec{r}')dv'}^{dq'}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ V(\vec{r}) &= \int_V dV = \int_{Dom} \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')dv'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ ,\ etc, V(\infty)=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_S \frac{\overbrace{\sigma(\vec{r}')dS'}^{dq'}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \\ \vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_\Gamma \frac{\overbrace{\lambda(\vec{r}')dl'}^{dq'}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{cases}$$

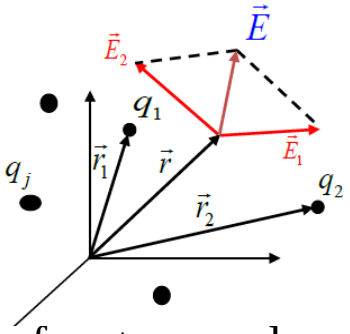
Observad que las distribuciones de carga en superficie o en hilos representan, como las cargas puntuales, ***singularidades*** *(o sea, el campo tiende a infinito al evaluarlo en puntos cercanos a los ocupados por las cargas).*

Líneas de campo. Flujo del campo creado por cargas puntuales.

- Las líneas de **E**, creado una distribución de cargas, son curvas que nacen de cargas positivas (fuentes) y mueren en las negativas (sumideros).



$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{n} \vec{E}_j = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{n} q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\right|^3}$$



- Matemáticamente, según significado del flujo de un vector, **E** lo crean fuentes escalares, así, la divergencia (flujo por cada unidad de volumen, en torno a un punto, ver tema Operadores) de **E** será nula en todo punto P que no albergue carga.

- En efecto, como *div*($\mathbf{E}_j$)=0 fuera del punto ocupado por q_j donde el campo no está definido(tiende a infinito) se da:

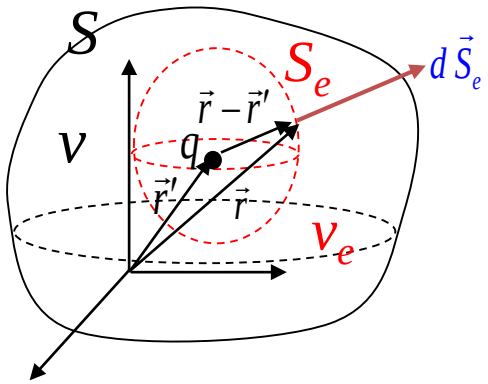
$$\nabla \cdot \left(\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\right|^3} \right) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{j=1}^{n} \nabla \cdot \mathbf{E}_j = 0 \quad . \; donde\, no\, hay\; q_j \rightarrow si \quad \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j\right| \neq 0, \;\; \forall j.$$

- ***Sin embargo,*** en los puntos donde están las cargas puntuales esta divergencia no está definida (es singular, 'infinita'). En general , si **la distribución es regular** (densidad de carga espacial como función regular) esta divergencia puede no ser nula: hay fuentes de campo (sin carga puntual, o en lámina o hilo)

Sugerencia: Una excelente web para texto y *visualizer* campos http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/

Flujo del campo. Teorema de Gauss en electrostática

•El flujo del campo creado por una única carga puntual a través de una esfera de radio *R* arbitrario que la rodee es:



$$\oint_{S_e} \vec{E}\cdot d\vec{S}_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{S_e}\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}dS_e =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{\substack{S_e=4\pi R^2\\ |\vec{r}-\vec{r}'|=R}}\frac{dS_e}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2} = \frac{q\ S_e}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

•**Como** div**(E)**=0 en los puntos donde no hay carga (no se crean ni destruyen líneas de campo) lo mismo vale para toda superficie cerrada S que rodee a la carga, los puntos sin carga no suman flujo.

•Si $q=q_j$ está fuera de S (cerrada) en todo punto de su volumen , para el campo creado por esa carga, div($\mathbf{E}_j$)=0 , luego no hay flujo por S exterior a la carga (no se crea campo dentro de S)

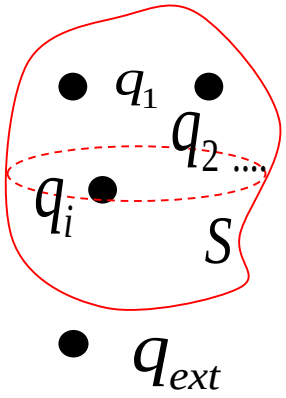
$$\oint_{S_{exterior\ a\ q_j}} \vec{E}_j\cdot d\vec{S} = \int_{Volumen} \nabla\cdot\mathbf{E}_j\, dv = 0$$

- Para el campo **E** creado por una distribución de cargas $\{q_n\}$ su flujo a través de S cerrada será suma de flujos debidos a cada campo $\mathbf{E}_j$ (superposición)

Flujo del campo. Teorema de Gauss en electrostática

- El **flujo del campo resultante** a través de S cerrada será suma de flujos de cada campo $\mathbf{E}_j$ por separado, que será nulo si es debido al campo creado por carga exterior a S.

- Como antes, dado que la divergencia de **E** es nula donde no hay carga (no se crean ni destruyen líneas de campo) al flujo del campo **creado por TODA la distribución** a través de cualquier superficie cerrada S sólo contribuirán las cargas interiores a S:



$$\phi = \sum_{j=1}^{N} \phi_j = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_{q_i \text{ interior a } S} \phi_i + \sum_{q_k \text{ exterior a } S} \phi_k = \frac{\sum_{q_i \text{ interior a } S} q_i}{\varepsilon_0} + 0 \Rightarrow$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- Luego: El **flujo del campo *E* creado por una distribución** a través de S cerrada es proporcional a la carga neta Q_{int} contenida en el interior de la superficie.
- En cada punto de S , el campo es el resultante creado por toda la distribución.

- Ejm: *el flujo del E de carga +q positiva aislada a través de superficie S cerrada que la contenga es el mismo que el flujo del campo E_{dip} de un dipolo (–q,+q) a través de una superficie S cerrada que envuelva sólo a +q, pero ambos campos son muy distintos (ver sus líneas)*

Teorema (Ley) de Gauss en Electrostática

- En general: El flujo del campo creado por la distribución es proporcional a la carga neta dentro de la superficie **cerrada**.

- OJO¡¡ Las cargas exteriores q_{ext} **no contribuyen al flujo** a través de la superficie cerrada, **pero sí al campo** en cada punto de ella: **E** es el repito, campo creado por toda la carga.
- En general, como la carga en la suma (integral) de cargas distribuidas con densidad dada:

$$\phi = \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{vol.(S)} dq = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{vol.} \rho(\vec{r})\, dv$$

•Formulación diferencial: Por el *Teorema de la Divergencia*, la divergencia del campo es proporcional a la densidad de volumétrica de carga en cada punto del espacio. Ley o **Ecuación de Poisson**: (las fuentes de E son las cargas).

$$\oint_S E(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dv = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} dv \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

expresión diferencial válida para todo punto del espacio, pues $\rho = 0$ donde no hay carga (si hay carga puntual en el punto, ρ diverge (infinita) y debe considerarse la forma integral de la Ley de Gauss

- Por esta razón *div*(**E**)) diverge si en el punto hay cargas puntuales q_i (o en puntos ocupados por hilos o láminas de carga) porque la densidad de carga no es regular. Recordad la *extensión del problema 2.9.*

•EJEMPLO: ESFERA Y CILINDRO DE CARGA. ComplementoS

Ecuaciones de Maxwell para Electrostática.

• El rotacional de ***E*** (*q*,***r***) es nulo **en todo punto**, incluso en *r=0*, luego **E** de una distribución deriva de un potencial escalar *V*. Es campo conservativo.

•Para la electrostática las ecuaciones de Maxwell (*en formas integral y diferencial*) quedan:

$$\begin{cases} \oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dv \\ \oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 0,\ \forall\Gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\mathbf{E} = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbf{E} = -\nabla V \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \nabla^2 V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \overbrace{\nabla^2 V = 0}^{Ecu.de\,Laplace}\ , \text{ donde } \rho = 0 \end{cases}$$

• Por ser E campo derivable de un potencial *V*. Lo que lleva a: (resumen)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\overbrace{\rho(\mathbf{r}')dv'}^{dq'} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \rho(\mathbf{r}')dv'\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\rho(\mathbf{r}')dv'\right) = -\nabla V = -grad(V)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{dq'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad \text{(Ejm. carga puntual en } \vec{r}_1\text{: } V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}$$

Energía electrostática *U* de una distribución de carga

- La energía electrostática de una distribución espacial de carga: energía necesaria para formar esa configuración. Coincide con el trabajo realizado para disponer las cargas trayéndolas desde el infinito. Razonando por inducción:

- Para situar la carga 1 en el punto $\boldsymbol{r_1}$ libre de campo no se requiere energía $U_e(1)=0$
- Sumando la energía necesaria para situar la carga 2, trayéndola desde el infinito, en punto $\boldsymbol{r_2}$ del campo creado por la carga 1 :

$$U_e(2)=U_e(1)+q_2V_1(\vec{r}_2)=q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_1}{r_{2,1}}$$

- Sumando la energía necesaria para situar la carga 3 en el punto $\boldsymbol{r_3}$ del campo creado por las cargas 1 y 2 :

$$U_e(3)=U_e(2)+q_3V_{1,2}(\vec{r}_3)=$$

$$=\left(q_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}\right)+q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2q_1}{r_{2,1}}+\frac{q_3q_1}{r_{3,1}}+\frac{q_3q_2}{r_{3,2}}\right)$$

$$=\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}=\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}$$

U para distribución regular de carga:

- Pero la suma en pares también se puede expresar como:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_2q_1}{r_{2,1}}+\frac{q_3q_1}{r_{3,1}}+\frac{q_3q_2}{r_{3,2}}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{1,2}}+\frac{q_1q_3}{r_{1,3}}+\frac{q_2q_1}{r_{2,1}}+\frac{q_2q_3}{r_{2,3}}+\frac{q_3q_1}{r_{3,1}}+\frac{q_3q_2}{r_{3,2}}\right)\rightarrow$$

$$\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{i,j}}\right)$$

- Para introducir la carga 4, la 5 … y la *n-ésima* en el campo creado por las *n-1* restantes:

$$\begin{cases}U_e(4)=U_e(3)+q_4V_{1,2,3}(\vec{r}_4)=\displaystyle\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{\left|\vec{r}_i-\vec{r}_j\right|} & \cdots\\ U_e(n)=U_e(n-1)+q_nV_{1,\ldots,n-1}(\vec{r}_n)=\displaystyle\sum_{pares(i,j)}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}U_e=\displaystyle\sum_{pares(i,j)}^{n,n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}\\ U_e=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}q_i\left(\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1\ldots n}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_j}{r_{i,j}}\right)\end{cases}$$

- notando por V_{qi} el potencial creado en la posición de q_i por las (*n-1*) cargas restantes:

$$U_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{i,j}}\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\;V_{qi}(\mathbf{r}_i)$$

U para distribución regular de carga:

• Si la **distribución no tiene singularidades** (cargas puntuales) la densidad de carga es una función **suave (regular)** y la energía U_e se puede evaluar por integración directa según:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{q\,total} dqV(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{vol} \rho\, dvV \\ \frac{1}{2}\int_{s} \sigma\, dsV = \frac{1}{2}QV \ , \ Ejm. \text{ si S es superficie equipotencial} \end{cases}$$

Que puede calcularse en función del campo, exendiendo la integral al infinio , si ni hay carga en el infinito , con :

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\cdot(V\mathbf{E}) = V\nabla\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\nabla V \\ con\ \mathbf{E} = -\nabla V \ \ y \ \ \nabla\cdot\mathbf{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \nabla\cdot(V\mathbf{E}) = V\nabla\cdot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \dfrac{V\rho}{\varepsilon_0} - E^2 \\ \int_v dv\nabla\cdot(V\mathbf{E}) = \oint_A V\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \end{cases}$$

$$U_e = \overbrace{\frac{1}{2}\int_{vol\to\mathbb{R}^3} V\rho\, dv}^{\text{Ener. almacenada por la distribuc.}} = \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\oint_A V\ \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}}_{\to 0} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_v E^2 dv = \overbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{v\to\infty} E^2 dv}^{\text{Ener. del campo}}$$

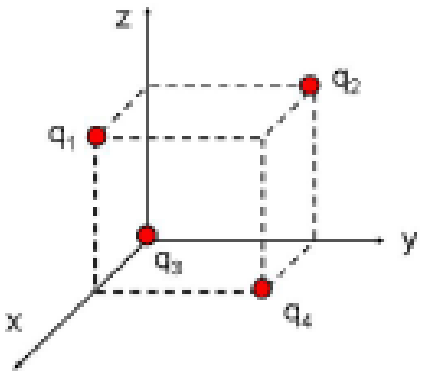
• La integral de superficie es cero: si el volumen de integración *v se extiende a todo el espacio* (con una distribución regular *sin carga en el infinito*) para *r* **grande**, sobre una superficie S esférica de radio *r* se dan los comportamientos asintóticos:

V~1/r, E~1/r² y S ~r² => V E S ~ 1/r ~ 0

Ejemplos.

- **Problema 3.1**

Cuatro cargas eléctricas puntuales de valores $q_1 = q_2 = 1\,\mu\,\mathrm{C}$ y $q_3 = q_4 = -1\,\mu\,\mathrm{C}$, se sitúan en cuatro de los vértices de un cubo de arista $a = 3m$ como se muestra en la figura. Determínese:



a) El valor del campo electrostático creado por las cargas q_1, q_2 y q_4 en el origen de coordenadas.

b) La fuerza electrostática que actúa sobre la carga q_3.

Solución :

a) $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{k}\,10^3\,\mathrm{V/m}$.

b) $\boldsymbol{F} = 5\sqrt{2}\,10^{-4}\,\boldsymbol{k}\,\mathrm{N}$.

Sugerencias:

3) Evaluar el potencial electrostático *V* del campo que crean las cargas 1,2 y 4 en el origen.

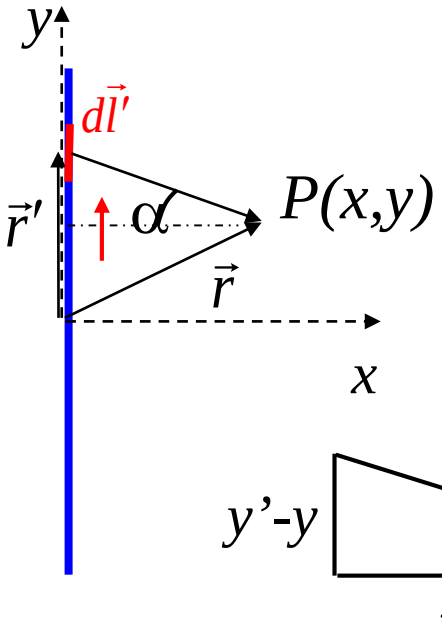
4) Energía potencial electrostática de q_3 en el campo que crean las demás cargas y trabajo necesario para llevar ésta del origen al infinito.

5) *Energía electrostática* U de la distribución de todas las cargas.

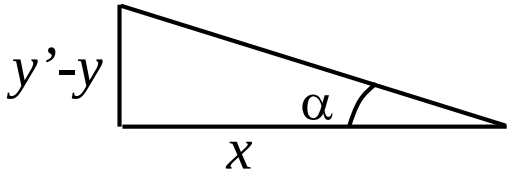
Campos de distribuciones de carga simples (Ver Problema 3.2)

Campo de hilo de carga λ=*cte* y longitud *L en un punto del plano*

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}; \quad \vec{r}' = y'\,\vec{j}; \quad dl' = dy' \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}$$



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{y'=Y\min}^{y'=Y\max} dy'\,\frac{\lambda(x\vec{i}+(y-y')\,\vec{j})}{(x^2+(y-y')^2)^{3/2}}$$



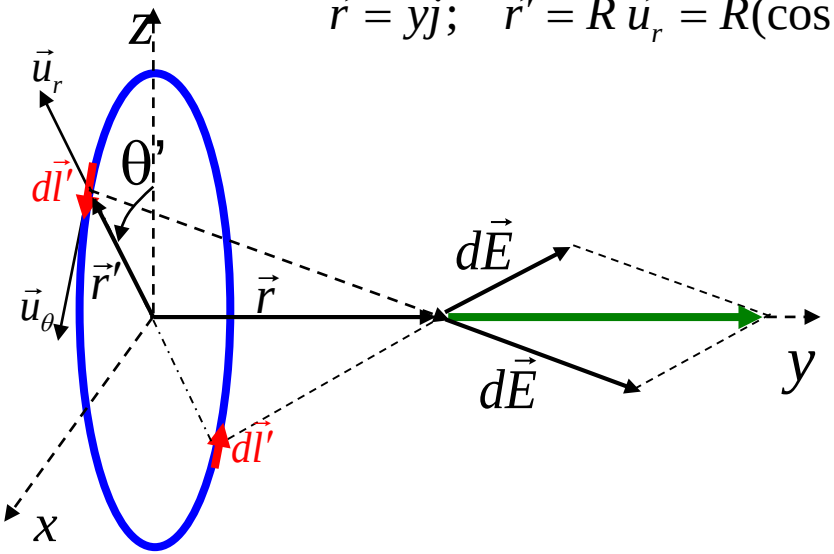
$$tg\,\alpha = \frac{y'-y}{x} \Rightarrow dy' = x\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{x^2+(y-y')^2}{x}d\alpha$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\cos\alpha d\alpha\;\vec{i} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x}\int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\sin\alpha d\alpha\;\vec{j}$$

Anillo de carga (problema 3.3)

Carga en aro de $\lambda=cte$ y radio R en un punto de su eje

$$\vec{r} = y\vec{j}; \quad \vec{r}' = R\,\vec{u}_r = R(\cos\theta'\vec{k} + \sin\theta'\vec{i}) \qquad dl' = Rd\theta'$$



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl'(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d\theta'(y\vec{j} - R(\sin\theta'\vec{i} + \cos\theta'\vec{k}))}{\left(y^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{Rd\theta'\, y\,\vec{j}}{(y^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ry}{(y^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta'\vec{j}$$

También $\vec{E} = \int\left|d\vec{E}\right|\cos\alpha\,\vec{j}$

cambio $\cos\alpha = \dfrac{y}{(y^2+R^2)^{1/2}}$ $\qquad \vec{E} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{Rd\theta'}{(y^2+R^2)}\cos\alpha\;\vec{j} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ry}{(y^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta'\,\vec{j}$

Pág. 138 de apuntes. Problema 3.4

Campo creado por disco de densidad superficial de carga $\sigma = cte$ y radio R en un punto de eje OY

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma r' d\theta' dr' (y\vec{j} - r'(\sin\theta'\vec{i} + \cos\theta'\vec{k}))}{\left(y^2 + r'^2\right)^{3/2}}$$

Integrando para toda la superficie del disco (ver problema 3.4)

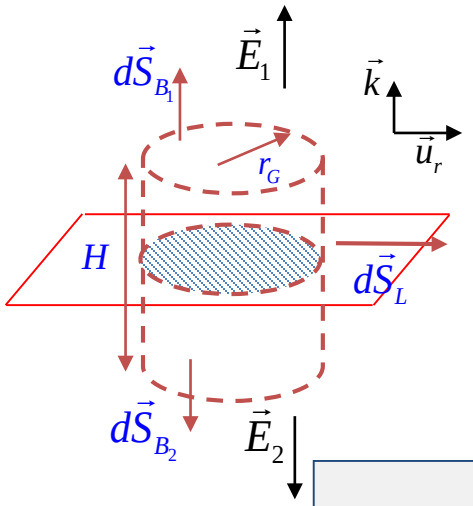
$$\vec{E}(y) = \frac{\sigma y}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r'dr'}{(y^2 + r'^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta'\vec{j}$$

Si se procede a hacer el radio R infinito (límite) se obtiene el campo de una lámina plana de carga sobre el plano z=0, que resulta perpendicular a la lámina (dirección del eje OZ con cambio de sentido en la lámina):

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} sign(z)\mathbf{k}$$

Plano infinito de carga (comparar con problema 3.4 con radio R infinito)

- Distribución superficial de carga uniforme en ***plano infinito*** tomando superficie gaussiana tipo "caja de píldoras"



$$\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 = E\,\vec{k}\,; \quad d\vec{S}_L = dS_L\,\vec{u}_r \qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$d\vec{S}_{B_1} = -d\vec{S}_{B_2} = dS\,\vec{k}; \qquad \oint_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_2}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2E(Z_G)\pi r_G^2 \;\; ; \;\; q_{dentro} = \int_0^{r_G} \sigma 2\pi r dr = \sigma\pi r_G{}^2$$

$$E(z) = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,sign(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}; & z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}; & z<0 \end{cases}$$

$$V(z) = \begin{cases} -\int_0^z \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}dz' = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z, & z\geq 0 \\ -\int_z^0 \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}dz' = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}z, & z\leq 0 \end{cases}$$

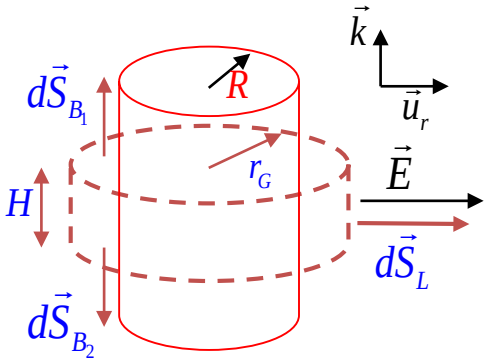
$$(si\;\; V(0)=0 \Rightarrow V(z) = -\sigma\,|\,z\,|\,/2\varepsilon_0)$$

- Si la densidad superficial de carga varía radialmente como se indica, calcula la carga total *Q* del plano e indica cómo calcular **E** en un punto del eje OZ.

$$\sigma = \sigma_0\, e^{-\frac{r}{R_0}} \quad (\sigma_0 \;\text{ y }\; R_0 \;\text{ constantes}) \qquad sol.\;\; Q = 2\pi\sigma_0 R_0{}^2\,, \vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0} z\,\vec{k}\int_0^\infty \frac{r'\exp(-r'/R_0)}{(r'^2+z^2)^{3/2}}dr'\;(como\,3.4)$$

Método de superficies de Gauss , cilindro infinto de carga Prob. 3.8

Cilindro de longitud infinita, de carga homogénea y potencial de referencia nulo a la distancia R del eje:



$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = E\,\vec{u}_r\,; \quad d\vec{S}_L = dS_L\,\vec{u}_r \qquad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} =$$

$$d\vec{S}_{B_1} = -d\vec{S}_{B_2} = dS\,\vec{k}; \qquad \oint_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_{S_{B_2}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r_G)2\pi r_G H$$

$$q_{\text{int}} = \int_0^r \rho dv = \int_0^r \rho\; 2\pi r H dr = \begin{cases} \rho\pi r^2 H\,; & r \le R \\ \rho\pi R^2 H\,; & r > R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} & si \quad r \le R \\ \dfrac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0} & si \quad r > R \end{cases}$$

$$\int_R^r dV = V(r) = -\int_R^r E(r')\,dr' \Rightarrow V = \begin{cases} \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(R^2 - r^2\right), & r \le R \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\dfrac{R}{r}\,, & r \ge R \end{cases}$$

- ¿Cómo se comportan E y V en el límite de r tendiendo a infinito? Indica cómo resolver el problema si al densidad variara con z según (evalúa la carga total) :

Sol. Por integración directa como 3.5, basta indicarlo

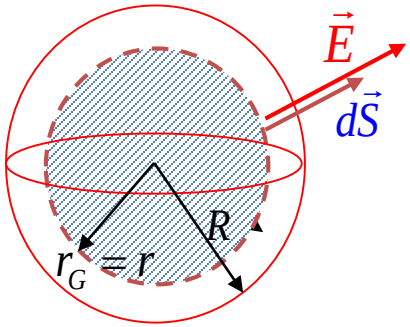
$$\rho(z) = \rho_0 \frac{R^2}{z^2 + R^2} \quad (si\ 0 \le r \le R, \forall z;\ \rho = 0\ si\ \ r > R\ )$$

Esfera de carga. Método de superficies de Gauss (Problema 3.7)

Tomando superficies gaussianas esféricas concéntricas dentro y fuera de la distribución:

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = E\,\vec{u}_r\,; \quad d\vec{S} = dS\,\vec{u}_r$$

$$\vec{u}_r \rightarrow \quad \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\,\vec{u}_r\cdot dS\,\vec{u}_r = \oint_S E(r_G)\,dS = E(r_G)\,S = E(r_G)4\pi r_G^{\,2}$$



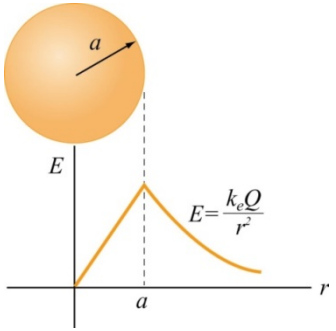
$$q_{\text{int}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}Q = \frac{r^3}{R^3}Q \quad (si\ \rho\ uniforme)$$

$$q_{\text{int}} = \begin{cases} \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr = \rho\frac{4}{3}\pi r_G^{\,3}; & r \le R \\ \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr = \rho\frac{4}{3}\pi R^3; & r > R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3} = E_i; & r \le R \\ \dfrac{\rho R^3}{3r^2\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} = E_e; & r > R \end{cases}$$

Atención a los límites de integración para V :

$$Potencial: dV = -E\,dr \rightarrow \int_{V(a)}^{V} dV = -\int_{r=a}^{r} E(r')dr'$$



$$\int_0^V dV = -\int_\infty^{r\ge R} E(r')dr' \rightarrow V - 0 = -\int_\infty^{r\ge R} E_e(r')dr' \rightarrow V = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}; \qquad r \ge R$$

$$\int_{V(R)}^{V} dV = -\int_R^{r\le R} E(r')dr' \rightarrow V - V(R) = -\int_R^{r\le R} E_i(r')dr' \rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right); \; r \le R$$

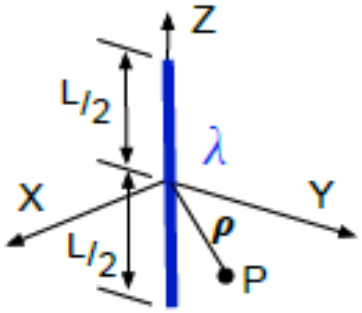
Ver el ejemplo de esfera de carga con hueco excéntrico, Prob. 3.8, en mis Complementos a la clase.

Problemas

- **Problema 3.2**

Un hilo rectilíneo de longitud L, situado sobre el eje OZ como muestra la figura, se encuentra cargado uniformemente con una carga total Q.

a) Calcular el potencial y el campo electrostáticos en un punto P del espacio a una distancia $\rho = r$ del centro del hilo.
b) Obtener el potencial V si el punto P es un punto cualquiera del espacio (úsense coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) tomando el centro geométrico del hilo en el origen del sistema de referencia). ¿Puede obtenerse del potencial V el campo electrostático en todo punto del espacio?



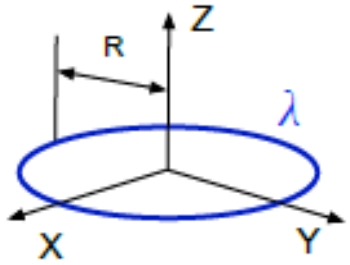
a) $\boldsymbol{E} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o \rho\sqrt{L^2+4\rho^2}}\boldsymbol{u}_\rho \;;\; V(\rho) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_o L}\ln\dfrac{L+\sqrt{L^2+4\rho^2}}{2\rho}$

b) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\ln\left[\dfrac{\sqrt{\rho^2+(z-L/2)^2}-(z-L/2)}{\sqrt{\rho^2+(z+L/2)^2}-(z+L/2)}\right]$

c) Si, porque hay simetría cilíndrica $\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{u}_\rho - \dfrac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}$

- **Problema 3.3**

El anillo de radio R de la figura está sobre el plano $z = 0$ con centro en el origen, almacena una carga neta Q uniformemente distribuida. Hallar el potencial y el campo electrostáticos creados por el anillo de carga en un punto cualquiera P del eje Z.



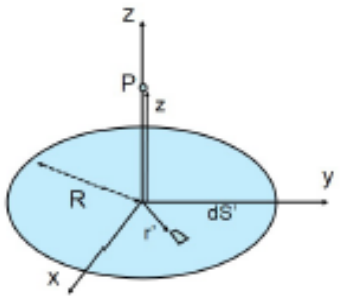
Solución :

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q\,z\,\boldsymbol{k}}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}} \quad ; \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o(R^2+z^2)^{1/2}}$$

- **Problema 3.4**

Un disco circular de radio R se halla cargado con distribución superficial de carga uniforme de densidad σ. El disco de carga tiene su centro en el origen de coordenadas y está situado en el plano $z = 0$ como se muestra. Se pide:

a) El valor del campo y potencial electrostáticos en todo punto del eje Z.
b) El trabajo realizado por el campo creado por esta distribución para llevar una carga puntual q desde el punto $(0, 0, -b)$ hasta el punto $(0, 0, b)$.



Solución :

a) $E(z) = -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - \dfrac{z}{|z|}\right)$; $V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$

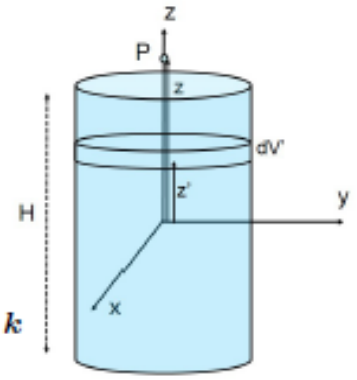
b) $W = 0$

- **Problema 3.5**

El cilindro de radio R y altura H que muestra la figura alberga la carga estática Q distribuida uniformemente por todo su volumen. Hállese el campo electrostático creado por este volumen de carga en un punto genérico del eje Z exterior al cilindro.

Solución :

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2 H}\left(H + \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{H}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{H}{2}\right)^2}\right)\boldsymbol{k}$$



Problemas

- **Problema 3.6**

La figura adjunta muestra el esquema de una distribución infinita de carga que ocupa todo el volumen comprendido entre los planos $x = -D/2$ y $x = D/2$ del espacio. La carga está almacenada con distribución volumétrica de carga dada por la relación

$$\rho = 2\rho_0 \frac{|x|}{D} \qquad \left(-\frac{D}{2} < x < \frac{D}{2}\right)$$

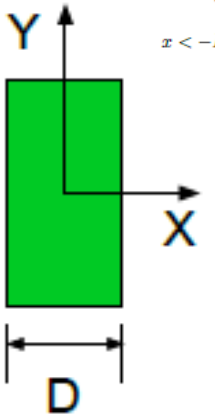
Hállese el campo y el potencial electrostáticos en todo punto del espacio en función de x, considerando que el potencial en nulo para $x = 0$.

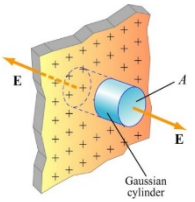
$0 < x < D/2 \quad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o x^2}{D\,\varepsilon_o}\boldsymbol{i} \quad ; \quad V = -\frac{\rho_o x^3}{3\varepsilon_o D}$

$D/2 < x < 0 \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\rho_o x^2}{D\,\varepsilon_o}\boldsymbol{i} \quad ; \quad V = \frac{\rho_o x^3}{3\varepsilon_o D}$

$x > D/2 \quad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o D}{4\varepsilon_o}\boldsymbol{i} \quad ; \quad V = \frac{\rho_o D}{4\varepsilon_o}\left(\frac{D}{3} - x\right)$

$x < -D/2 \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\rho_o D}{4\varepsilon_o}\boldsymbol{i} \quad ; \quad V = \frac{\rho_o D}{4\varepsilon_o}\left(\frac{D}{3} + x\right)$





Sugerencia: Repetir el problema añadiendo en los planos x=D/2 y x= - D/2 láminas infinitas de carga de densidades superficiales σ y -σ ¿cuánto vale *E* en *x=0* entonces?

- **Problema 3.7**

Determinar en todas las regiones del espacio el campo y potencial electrostáticos creados por una esfera de radio R y carga neta Q que se distribuye como en los tres casos siguientes:

a) Uniformemente sólo sobre la *superficie* de la esfera.
b) De modo uniforme por todo el *volumen* de la esfera.
c) Con distribución densidad volumétrica $\rho = k\,r$, donde k es una constante a determinar en función de Q y R.

a) Esfera de carga con densidad superficial $\sigma_o = \frac{Q}{4\pi R^2}$

$r < R \quad \boldsymbol{E} = 0 \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R} = \frac{\sigma_o R}{\varepsilon_o}$

$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\boldsymbol{e}_r \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$

b) Esfera de carga con densidad constante $\rho_o = \frac{3Q}{4\pi R^3}$

$r < R \quad \boldsymbol{E} = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_o R^3}\boldsymbol{e}_r = \frac{\rho_o}{3\varepsilon_o}\boldsymbol{r} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right)$

$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}\boldsymbol{e}_r = \frac{\rho_o R^3}{3\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad ; \quad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}$

Sugerencia:
3) Evaluar la energía U electrostática de la distribución.
4) Repetir el problema si $\rho = \rho_0(1 - c\,r)$ calculando primero c para que Q sea nula y verificar que el campo es superposición del campo de la esfera homogénea de carga ρ_0 y del anterior para k= - cρ_0

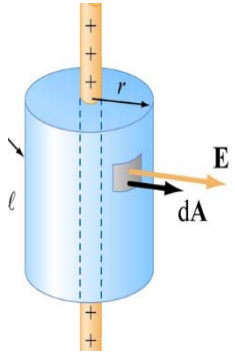
c) Esfera de carga con densidad variable y carga neta $Q = \pi\,k\,R^4$

$r < R \quad \boldsymbol{E} = \frac{k\,r^2}{4\,\varepsilon_o}\boldsymbol{e}_r \quad ; \qquad V = \frac{k}{12\,\varepsilon_o}(4R^3 - r^3)$

$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{k\,R^4}{4\,\varepsilon_o\,r^2}\boldsymbol{e}_r \quad ; \qquad V = \frac{k\,R^4}{4\,\varepsilon_o\,r}$

- **Problema 3.8**

Hállese el campo y el potencial electrostáticos debidos a la carga almacenada en un cilindro de radio R y suficientemente largo para considerar su altura infinita, cuyo eje yace sobre el eje Z. La carga se distribuye con densidad volumétrica de carga contante ρ_o. Considérese nulo el potencial para $r = R$, siendo r la variable radial ρ de las coordenadas cilíndricas.

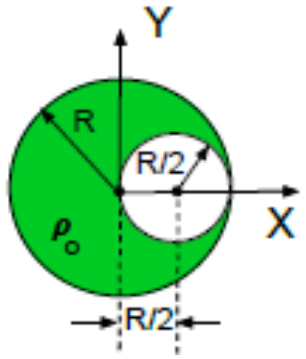


Solución :

$$r < R \quad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o\, r}{2\,\varepsilon_o}\,\boldsymbol{u}_r \quad ; \quad V = \frac{\rho_o}{4\,\varepsilon_o}\,(R^2 - r^2)$$

$$r > R \quad \boldsymbol{E} = \frac{\rho_o\, R^2}{2\,\varepsilon_o\, r}\,\boldsymbol{u}_r \quad ; \quad V = \frac{\rho_o\, R^2}{2\,\varepsilon_o}\,\ln\frac{R}{r}$$

- **Problema 3.9** Una esfera de radio R con centro en el origen está cargada uniformemente con densidad de carga volumétrica ρ_o, excepto en el hueco excéntrico de radio $R/2$ que muestra la figura. Calcular el campo electrostático $\boldsymbol{E}$ creado por la distribución de carga en todos los puntos del espacio.



Solución :

Siendo $\boldsymbol{r}_h = \boldsymbol{r} - \frac{R}{2}\boldsymbol{i}$, y $r_h = |\boldsymbol{r}_h| = \sqrt{(x - R/2)^2 + y^2 + z^2}$, se tiene

En interior del hueco: $\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o}{3\,\varepsilon_o}\boldsymbol{r} - \frac{\rho_o}{3\,\varepsilon_o}\boldsymbol{r}_h = \frac{\rho_o R}{6\,\varepsilon_o}\boldsymbol{i}$

En la zona con carga: $\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o}{3\,\varepsilon_o}\boldsymbol{r} - \frac{\rho_o (R/2)^3}{3\,\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{r}_h}{r_h^3}$

En la zona exterior: $\boldsymbol{E} = \frac{\rho_o R^3}{3\,\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{\rho_o (R/2)^3}{3\,\varepsilon_o}\frac{\boldsymbol{r}_h}{r_h^3}$

Energía electróstatica almacenada:

- **Problema 3.10**

Tres cargas puntuales de valores $q, 2q$ y $3q$ se encuentran situadas en los puntos $P_1(0,0,a)$, $P_2(0,a,0)$ y $P_3(a,0,0)$, respectivamente. Se pide:

a) Calcular la energía electrostática U_e del sistema.
b) Energía potencial electrostática E_p, debida al campo creado por las tres cargas, de una carga carga puntual Q que se situara en el origen.
c) Energía electrostática U'_e de la nueva distribución creada al añadir Q.

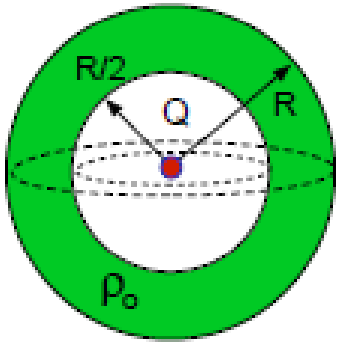
a) $U_e = \dfrac{11\sqrt{2}\,q^2}{8\pi\,\varepsilon_o\,a}$

b) $E_p = Q\dfrac{3q}{2\pi\,\varepsilon_o\,a}$

a) $U'_e = U_e + E_p$

- **Problema 3.11**

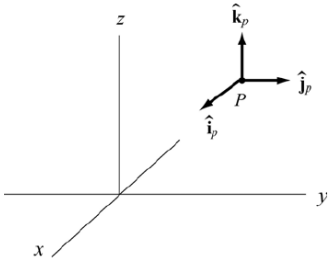
La distribución de carga de la figura consta de una carga puntual Q en el origen y una corteza esférica con densidad volumétrica de carga ρ_o uniforme de radios interior $R/2$ y exterior R. Calcular la energía electrostática U_e del sistema. (Sugerencia: *puede ser útil determinar el potencial electrostático del campo creado por la distribución continua de carga de la corteza*).

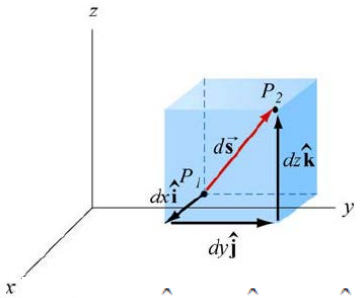


Solución :

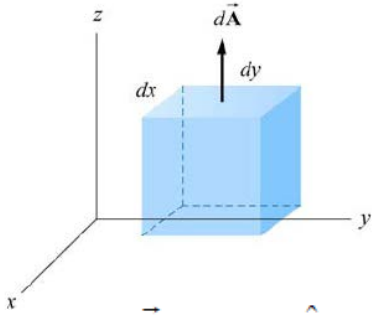
$$U_e = \frac{3\,Q\,\rho_o\,R^2}{8\,\varepsilon_o} + \frac{47\,\pi\,\rho_o^2\,R^5}{240\,\varepsilon_o}$$

Coordinates. Line, surface and volume Elements.

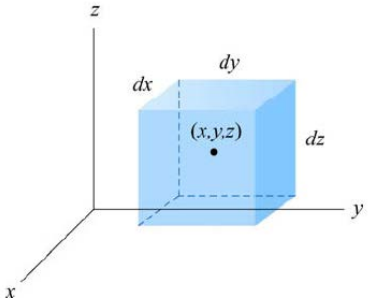




$$d\vec{s} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$

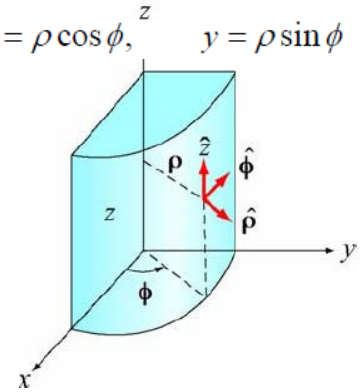


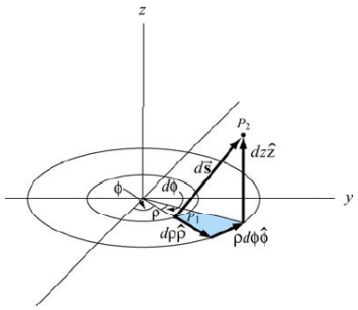
$$d\vec{\mathbf{A}} = dx\,dy\,\hat{\mathbf{k}}$$



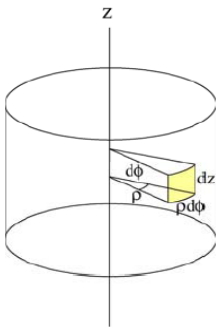
$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$x = \rho\cos\phi, \qquad y = \rho\sin\phi$$

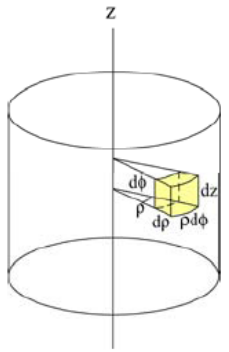




$$d\vec{s} = d\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\,\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\,\hat{\mathbf{k}}$$



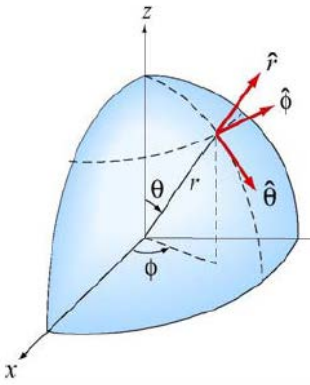
$$dA = \rho\,d\phi\,dz$$



$$dV = \rho d\phi\, d\rho\, dz$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{j}}, \qquad \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$d\vec{\mathbf{A}} = \rho d\phi\, d\rho\,\hat{\mathbf{k}}$$



$$\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

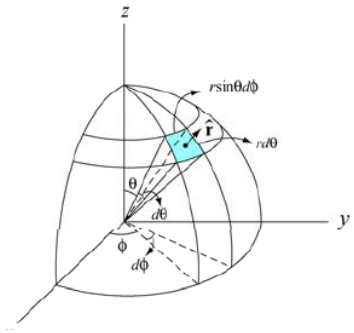
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

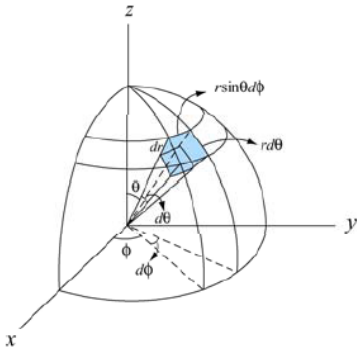
$$x = r\sin\theta\cos\phi$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi$$

$$z = r\cos\theta$$



$$d\vec{\mathbf{A}} = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{\mathbf{r}}$$



$$dV = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,dr$$

CONTROL 2010-11

2.1) Un sistema está formado por cuatro cargas eléctricas puntuales fijas en los vértices de un cuadrado de lado a, en el vacío. Las cuatro cargas tienen el mismo valor absoluto, q, siendo tres de ellas positivas y la otra negativa. Considerando V = 0 en el infinito, se puede afirmar que en el centro del cuadrado:

1) El potencial es nulo.

2) $V = \sqrt{2}q/(2\pi\varepsilon_0 a)$

3) El campo electrostático es nulo $\vec{E} = 0$.

4) $|\vec{E}| = q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

Solución: 2)

2.2) Un sistema está formado por cuatro cargas eléctricas puntuales fijas en los vértices de un cuadrado de lado a, en el vacío. Las cuatro cargas tienen el mismo valor absoluto, q, siendo tres de ellas positivas y la otra negativa. Calcular la energía electrostática del sistema.

Solución: 0

2.3) Una espira circular de radio R está contenida en el plano z = 0 con su centro en el origen y tiene una densidad longitudinal de carga λ constante. Calcular el potencial que crea en un punto P(0,0,z).

Solución: $V(0,0,z) = \lambda R/(2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2})$

2.4) Una espira circular de radio R está contenida en el plano z = 0 con su centro en el origen y tiene una densidad longitudinal de carga λ constante. Calcular el campo electrostático en el punto P(0,0,z).

Solución: $\vec{E} = \dfrac{\lambda R z}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{3/2}}\vec{k}$

2.5) Se tienen dos rectas infinitas, paralelas y separadas una distancia a con densidades lineales de carga λ_1 y λ_2 positivas siendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Obtener la distancia d de la recta 1 a la cual se anula el campo electrostático.

Solución: $d = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}a$

2.8) Dado el potencial electrostático $V = A(x^2+y^2+z^2)$, para $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, donde A es constante con dimensiones. Se verifica, para todos los puntos de esta región del espacio, que:

1) El campo electrostático es: $\vec{E} = 2A(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

2) La densidad de carga es: $\rho = 3A\varepsilon_0$.

3) La densidad de carga es: $\rho = -6A\varepsilon_0$.

4) La densidad de carga es: $\rho = A\varepsilon_0$.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

CONTROL 2011-12

2.13) Tres cargas puntuales del mismo valor q se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. Considerando $V(\infty) = 0$ y llamando $\vec{E}$ y V al campo y al potencial eléctricos generados por las cargas en el centro del triángulo, se verifica:

1) $|\vec{E}| = 0;\quad V = 0$.

2) $|\vec{E}| = \dfrac{3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^2};\quad V = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a}$.

3) $|\vec{E}| = 0;\quad V = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a}$.

4) $|\vec{E}| = \dfrac{3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a^2};\quad V = \dfrac{3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{a}$.

5) Ninguna de las otras respuestas es correcta

Solución: 3)

2.14) Tres cargas puntuales del mismo valor q se sitúan en los vértices de un triángulo equilatero de lado a. Calcular la energía electrostática del sistema.

Solución: $U_e = \dfrac{3}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{a}$

2.15) Una placa infinita de espesor D está cargada con una densidad volumétrica de carga dada por: $\rho(z) = \rho_0\left(\dfrac{z}{D}\right)^2$, donde z es la coordenada que se muestra en la figura. Se pide:

1) El campo eléctrico en un punto exterior a la placa.

2) El campo eléctrico en un punto interior a la placa.

3) El potencial eléctrico en puntos exteriores a la placa tomando potencial nulo en z = 0.

4) El potencial eléctrico en puntos interiores a la placa tomando potencial nulo en z = 0.

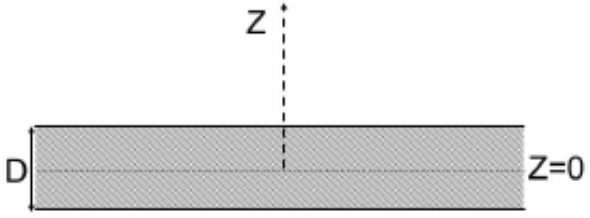
Solución:

1) $|\vec{E}| = \dfrac{1}{24}\dfrac{\rho_0 D}{\varepsilon_0}$

2) $|\vec{E}| = \dfrac{1}{3}\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 D^2}|z|^3$

3) $V = \dfrac{\rho_0 D}{8\varepsilon_0}\left(\dfrac{D}{8}-\dfrac{z}{3}\right)$

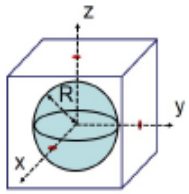
4) $V = -\dfrac{1}{12}\dfrac{\rho_0}{D^2}z^4$



etsiae UPM

CONTROL 2013-14

2.27) Se tiene una esfera, de radio *R* y densidad de carga $\rho(r) = ar^2\varepsilon_0$, centrada en el origen de coordenadas O siendo *r* la distancia al origen, *a* una constante y ε_0 la constante dieléctrica del vacío. Calcular el flujo ϕ del campo eléctrico a través de un cubo de centro geométrico *O* y arista *d = 6R*.

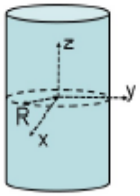


Solución: $\phi = \dfrac{a4\pi R^5}{5}$

2.28) Una distribución esférica uniforme de carga Q y radio *R* se rodea de un conductor en forma de corteza esférica. Los radios interior y exterior del conductor son *R* y *2R*, respectivamente, y su carga $Q_c = 2Q$. Calcular la densidad superficial de carga σ en la superficie de radio 2R.

Solución: $\sigma = \dfrac{3Q}{16\pi R^2}$

2.29) Se tiene un cilindro de longitud infinita, radio R y densidad de carga $\rho(r) = ar\varepsilon_0$ siendo *r* la distancia al eje del cilindro, *a* una constante y ε_0 la constante dieléctrica del vacío. Tomando como referencia V(r=R)=0, el potencial V(r) en un punto interior del cilindro es:



Solución: $V(r) = -\dfrac{a}{9}(r^3 - R^3)$

CONTROL 2012-13

2.19) En una distribución estacionaria de cargas, ¿para qué valor de *a* el campo vectorial definido por $\vec{W} = c(x^2 y\,\vec{i} + ax^3\vec{j})$, donde *c* y *a* son constantes, podrá ser un campo eléctrico?

Solución: *a* = 1/3

2.20) Tres cargas puntuales de valor *q* cada una están situadas en los puntos *A(0,0,0)*, *B(d,0,0)* y *C(2d,0,0)* de un sistema de referencia *OXYZ*. Se pide:

1) El flujo ϕ del campo eléctrico creado por las cargas a través de una esfera de radio *R=3d/2* centrada en el origen O.

2) La energía electrostática U_e del sistema de tres cargas puntuales.

Solución:

1) $\phi = 2q / \varepsilon_0$

2) $U_e = \dfrac{5q^2}{8\pi\varepsilon_0 d}$

2.21) Sea una espira circular de radio R y centro el origen de coordenadas O situada en el plano OXY. La espira tiene una carga uniformemente distribuida, siendo λ la densidad lineal de carga. Calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto de coordenadas *(0,0,z)*.

Solución: $\vec{E}(0,0,z) = \dfrac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\dfrac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}\vec{k}$

2.22) Se tiene una distribución volumétrica de carga en la región del espacio definida por $-a \le x \le a$. La densidad de carga es constante e igual a ρ. Calcular el potencial *V(x)* en la región $0 \le x \le a$. [tómese *V(x=0)=0*]

Solución: $V(x) = -\dfrac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$