UPM PlasmaLab

etsiae UPM

POLITÉCNICA "Ingeniamos el futuro"

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

INDUCCIÓN MAGNÉTICA. ECUACIONES DE MAXWELL

TEMA 10: ***ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS***

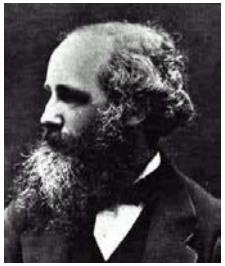
http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Inducción de corriente, Campos variables con el tiempo, Ley de Faraday-Henry-Lenz, energía magnética, Ecuaciones de Maxwell

Programa (Ondas no entra en examen.)

Mag. Vacío II	8-abril	10-abril	
Mag. Vacío II	10-abril	12-abril	
Mag.Matrl	15-abril	22-abril	
Inducc.	22-abril	10-mayo	
Repasos/Termo	13-mayo	17-mayo	
Termo/repasos	20-may(PEI)	24-may	



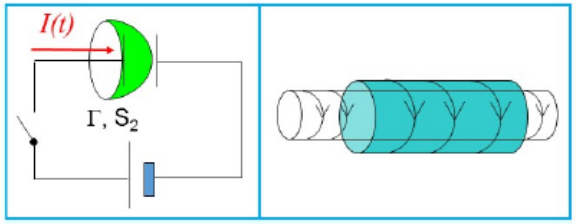
$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Tema 9. ELECTRODINÁMICA

9.1 El fenómeno de la inducción electromagnética.
9.2 Ley de Faraday-Henry en formas diferencial e integral.
9.3 FEM inducida en un conductor que se mueve en el seno de un campo magnético.
9.4 Autoinducción. FEM inducida en un circuito recorrido por un corriente variable.
9.5 Coeficiente de autoinducción o autoinductancia.
9.6 Asociación de inductancias.
9.7 Inducción mutua entre circuitos. FEM inducida mutuamente entre circuitos acoplados.
9.8 Coeficiente de inducción mutua. Teorema de reciprocidad.
9.9 Ecuaciones fundamentales de la electrodinámica. Ecuación de Ampère-Maxwell. Corriente de desplazamiento. Ecuaciones de Maxwell.
9.10 Circuito LR. Energía magnética. Densidad de energía magnética.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Gamma} + \frac{d}{dt}\int_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S}$$



Tema 10. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS
(No entra para examen)
10.1 Ecuación de Ondas en el Vacío. 10.2 Ondas Planas Transversales. 10.3 Ondas Monocromáticas. 10.4 Polarización. 10.5 Ecuación de Ondas en Medios Homogéneos. 10.6 Índice de Refracción

James Clerk Maxwell (1831-1879) formuló las cuatro leyes del electromagnetismo en 1865 que resumen fenómenos vistos experimentalmente por :
Coulomb (1736-1806), Oersted(Ørsted) (1777-1851), Ampere (1775-1836), Biot (1774-1862), Savart (1791-1841) y Faraday (1791-1867)
Maxwell añadió una contribución a la Ley de Ampere.

Resumen:

- Si una corriente (transporte de carga) genera campo B, ¿un campo **B** generaría corriente? en general, NO

- Antecedentes: experimentos de **Ampere** (corrientes estacionarias), **Faraday y Oersted** (corrientes variables con **el tiempo** t)

- ***Faraday*** prueba (*1831) que **B variable** con el tiempo **genera un campo eléctrico y corrientes** en conductores. Más aún: Es **el cambio del flujo magnético** variable en el tiempo a través del área definida por el circuito el que genera una **fuerza electromotriz efectiva** sobre él, una corriente inducida.*

- *La ley de Faraday evidencia que el **campo magnético** creado por la corriente en un circuito **almacena energía** Um.*

- *Por **simetría con Ley de Faraday Maxwell postula** campos eléctricos variables con t deben generar campos magnéticos. Desde la ecuación de continuidad, conservación de la carga eléctrica, propone su "corriente de desplazamiento" **ampliando la ley de Ampere**.*

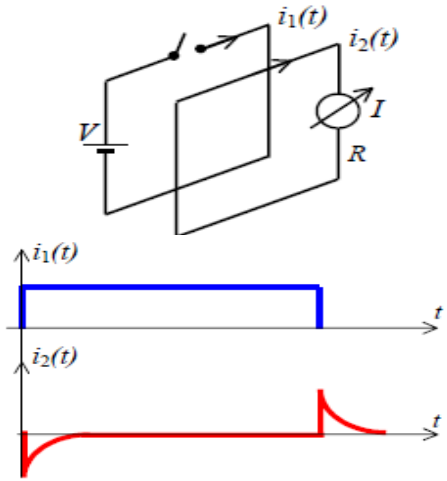
- *Las **ecuaciones de Maxwell** (con la Fuerza de Lorentz) unifican **E y B como elemento**s de un mismo campo, el **electromagnético** y dan sentido a propagación de ondas (energía) y justifica la Relatividad de Einstein.*

- *Luego: el campo eléctrico y el campo magnético son sólo **manifestaciones del campo electromagnétic**o, interrelacionados, propician intercambio de energía del campo electromagnético a otras manifestaciones (energía cinética, etc.).*

Hechos experiemtales. Ley de (inducción de) Faraday

Experimentos de Oersted y Ampère probaron **que corrientes de carga** (campo E) estacionarias producían **campo magnético** (orientación de brújulas) entre otros.

Faraday busca **relación opuesta por simetría** natural, creía que un campo **B** crearía otro **E**. Encuentra que sólo campos **B** variables con el tiempo pueden producirlo.



Ensayando con varios materiales, circuitos y geometría **observa** esencialmente:

- Si por un circuito 1 con generador fluye corriente $\mathbf{I_1}$ **estacionaria**, (circuito cerrado) en otro cercano (espira), **no fluye** corriente, $I_2=0$.
- Al **cerrar o abrir** el circuito 1 aparece en la espira corriente inducida **transitoria,** $I_2(t)$ que va en tal sentido que **induce un campo magnético** que **tiende a oponerse** al generado por el circuito primero
- También, ante un **campo externo constante** en el tiempo, la variación de la geometría de la espira puede dar lugar a I_2. Observación sutil: no es el campo B exterior en sí, lo que interviene en el fenómeno de inducir I_2. (campo eléctrico) y no es soló B variable en t, si no el **que el flujo** ϕ del campo magnético a través de una superficie abrazada por la espira **cambie con el tiempo**.

Admitiendo que la corriente se induce por aparición de una **fuerza electromotriz** *fem*, matemáticamente las serie de experimentos se resumen en la **Ley de Faraday-Henry:**

$$fem = \varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}, \phi = \int_{S_\Gamma} \vec{B} \bullet d\vec{S}$$

La fem y el flujo (por ser B=B') **son escalares, invariantes**, para los triedros inerciales S y S', luego la ley es valida en todo referencial inercial.

Consecuencias

El **cambio temporal del flujo magnético** encerrado por el circuito (curva cerrada simple) **produce una fuerza electromotriz** tal que crea una **corriente** que circula por el circuito que tiende a producir un campo magnético **que se oponga a los cambios del flujo**, o sea, que tienda a mantener el flujo magnético original constante (**Ley de Lenz**, signo negativo: la corriente debida a la fem inducida se opone al cambio de flujo)

- Este cambio temporal de flujo **puede provocarlo o un campo B variable en el tiempo** (inducción electromagnética), **o la variación de la geometría del circuito** (deformación) en el tiempo (fem de movimiento) **o bien ambos** procesos simultáneamente superponiéndose aditivamente al ser lineal la ecuación de la Ley de Faraday.

- El **campo E** en el interior del material **ya no es conservativo**, la *fem* es su circulación, ya no nula. Es un campo eléctrico que **tiene contribución no electrostática**, una parte del mismo actúa como *campo electromotor* (bombea carga) como el que se trató en la Ley de Ohm para un circuito en el tema 6 (pag. 10 del Resumen).

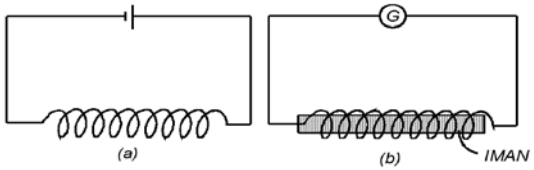


Fig. 9.1. Circuitos experimentales uno con bobina y batería, y otro con bobina, imán y galvanómetro.

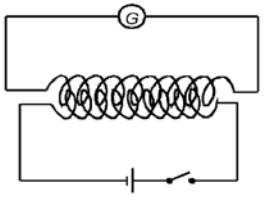


Fig. 9.2. Circuito experimental con bobinas acopladas, galvanómetro, batería e interruptor.

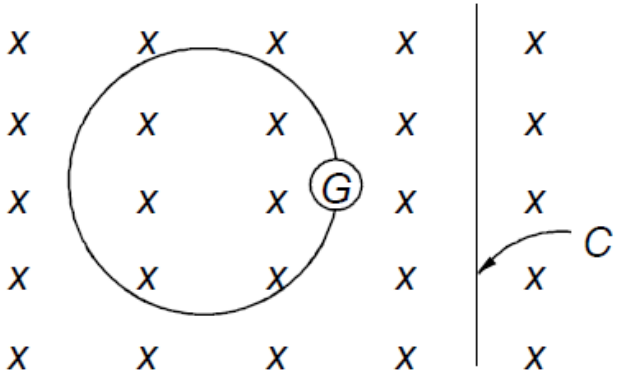


Fig. 9.3. Circuito con galvanómetro y conductor C en un campo magnético.

Fuerza de Lorentz, movimiento relativo y transformación de campos.

- Dos sistemas **de referencia** S y S' **inerciales**, S' a velocidad v_o (<< c) constante, deben medir la misma fuerza sobre la carga, luego los campos medidos en S y en S' deben transformarse, como la velocidad (transformación de Galileo) según: (no relativista, B es pseudovector pues resulta invariante, como si fuera escalar ¡¡)

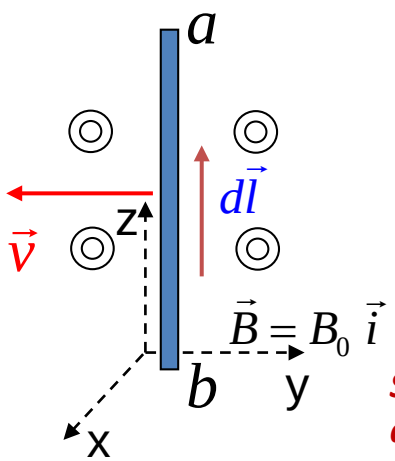
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,\vec{v}\times\vec{B} = q\vec{E}^* = \vec{F}\,' = q(\vec{E}\,' + \vec{v}\,'\times\vec{B}\,') \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}\,' = \vec{B} \quad (con \quad \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0) \\ \vec{E}\,' = \vec{E} + \vec{v}_0 \times \vec{B} \end{cases}$$

- Con **E**' y **B**' medidos en S', el campo efectivo sobre q es **E***, donde ***v*** es la velocidad local de q. Para un volumen conductor con cargas q_j transportadas a velocidad v_j, cada una, la densidad de **corriente eléctrica óhmica** será (ver tema 6, resumen 10) :

$$\boxed{\vec{J} = \sigma_c \vec{E}^* = \sigma_c(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})}$$

$$\begin{cases} \oint \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0 \\ \int_{a\,\Gamma_1}^{b} \vec{E}_e \cdot d\vec{l}_{ab} + \int_{b\,\Gamma_2}^{a} \left(\frac{\vec{J}}{\sigma_c} - \vec{E}\,' \right) \cdot d\vec{l}_{ba} = 0 \\ (V_a - V_b) + Ir - \varepsilon = 0 \end{cases}$$

- Contando ya con la fuerza magnética sobre cargas en el conductor. *Ejemplo*, sobre **barra móvil**



Los **electrones van** hacia **b** por fuerza magnética, en **a** hay exceso de carga positiva dando campo eléctrico de a hacia b y ***equilibrio*** de fuerzas, en estado estacionario, sobre una carga:

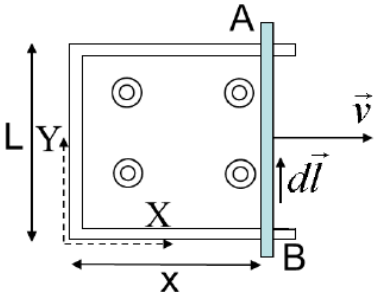
$$q\vec{E} = -q\,\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{J} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

$$V_a - V_b = -\int_0^L E\,dz = vBL$$

Si se cerrara el conductor, formando un circuito o espira cerrada, podría fluir corriente al haber diferencia de potencial entre dos puntos del hilo conductor: Corriente inducida en circuito sin pila.

Casos de variación de flujo magnético y fem en circuitos:

- **Caso 1:** espira móvil o deformable respecto a campo **B(r)** estacionario (velocidad ***v*** de AB no nula). De la Ley de OHM:



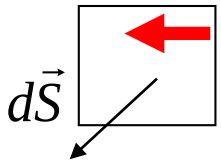
$$\varepsilon = RI = \oint_\Gamma \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma \frac{\vec{J}\cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \overbrace{\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l}}^{=0,\,E\ electrostático} + \oint_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt};\ usando:$$

$$d\phi = d\vec{S}\cdot\vec{B} = (dx\vec{i}\times d\vec{l})\cdot\vec{B} = (dt\,\vec{v}\times d\vec{l})\cdot\vec{B} = dt(\vec{B}\times\vec{v})\cdot d\vec{l}$$

admitiendo que aparece una *fem*, como se hizo en circuito de resistencia *R* con pilas: El conductor ve un campo $E' = v \times B$ **no electrostático**. Puede probarse que el segundo miembro da *la variación temporal del flujo* de **B** a través de *una superficie cualquiera* apoyada en el contorno del circuito (sec. 9.9 apuntes y apuntes de Luis Conde en su web).

- Convenio: El sentido positivo atribuido a la corriente I (realmente a ***J*** , dado el sentido desplazamiento ***dl***) y el del versor normal de la superficie, deben formar triedro a derechas .

La diferencia de potencial entre dos puntos a y b del circuito (tema 6)



$$R_{ab}I = V_a - V_b + \int_a^b (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$$

- Multiplicando por la intensidad I se ve que la potencia suministrada por la *fem* , disipada por efecto Joule (calor) viene de pérdida de energía cinética *Ec*, según:

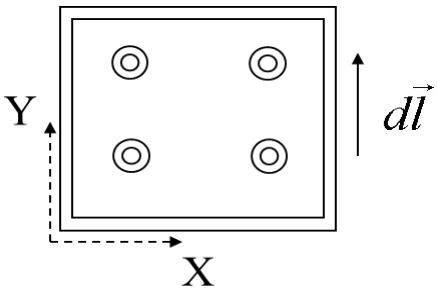
$$I\varepsilon = RI^2 = \oint_\Gamma I(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -\overbrace{\oint_\Gamma (Id\vec{l}\times\vec{B})\cdot\vec{v}}^{producto\ mixto,\ \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}=potencia} = -\frac{dEc}{dt} + P_a$$

Donde P_a es una potencia añadida por **acción, fuerza, externa, aplicada, por ejemplo,** si se quiere mantener la energía cinética constante (**v** cte.) **B** no hace trabajo pero sí E inducido, P_a pasa a energía interna a calentamiento óhmico (efecto Joule disipativo). **Sin potencia P_a la varilla se frenaría hasta reposo**. (ver prob. 9.5)

Ley de OHM en circuito inducido. Casos.

- **Caso 2:** Campo ***B*** variable con *t* y circuito fijo (no se deforma, v = 0 y el *contorno permanece constante*). Por la Ley de Faraday, combinada con la Ley de Ohm en el conductor, de las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}\cdot d\vec{S} \\ \varepsilon &= RI = \oint_\Gamma \frac{\vec{J}\cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t} \propto \nabla\times\vec{E}$$



Se observa que ahora la ***variación temporal*** de **B** *produce un* ***campo*** **E,** no irrotacional, de circulación no nula, *no electrostático*, no conservativo, responsable de realizar trabajo para mover la carga en el conductor (*fem*).

- **Caso 3:** Campo ***B*** variable con *t* y varilla móvil o (circuito) deformable. Este caso, por la **linealidad de la Ley de Faraday**, se puede ver como superposición de los dos casos anteriores.

Ahora el flujo de B se da a través de superficie que también cambia con el tiempo. El cálculo combina derivada total d/dt y local (derivada parcial en *t*), cambian con t tanto **B** como S

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= -\left(\int_S \frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \overbrace{\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}d\vec{S}}^{caso1}\right) = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + \oint_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \\ &= \oint_\Gamma \frac{\vec{J}\cdot d\vec{l}}{\sigma_c} = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} + \oint_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{S} + \oint_\Gamma (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \propto \nabla\times\mathbf{E}$$

Ahora el campo **E tiene parte electrostática** ,debida a diferencia de potencial, **y parte no electrostática** debida a la variación temporal de **B** (*fem*).

En general, E es no conservativo, no electrostático si aparecen cambios con t

Ecuación de Maxwell correspondiente (forma diferencial)

- *En general, el campo eléctrico inducido* ***E*** *es* ***no conservativo****, no electrostático y no derivará de un potencial electrostático escalar.*

- Dado que la **Ley de Faraday es general**, por los casos anteriores, y los campos se extienden **más allá de los hilos** de corriente o de carga, se propagan en el espacio más allá de las fronteras de los medios, se tendrá, de

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} \underbrace{=}_{Stokes} \int_{S} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt} = -\int_{S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

es una ley **válida para cualquier contorno** Γ ,imaginario incluso, en el que se apoye una superficie S, es decir, **se verificará en cualquier zona del espacio**, y por tanto, identificando los integrandos se tiene la Ley de Faraday-Henry, otra *ecuación de Maxwell*, en forma diferencial:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

que indica **que el campo eléctrico *E* es. en general. no conservativo, pudiendo tener fuentes vectoriales que lo generan, que son las variaciones temporales del campo B.**

- Nota: Usando el potencial vector, ***B***=rot***(A)***, se tiene que E deriva de un potencial escalar *V* más el vector derivada temporal local del potencial vector magnético (no único):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{A} \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\nabla V \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Corriente de Desplazamiento. Ley de Ampere generalizada.

- Por **simetría con la ecuación** de Faraday, si ***B*** *va*riable con t genera **E**, es de esperar que un **E** variable con t genere **B** . Observando que para corrientes no estacionarias debía cumplirse **la ecuación de continuidad** o conservación de la carga (viene de Ley Ampere tema 7-8):

$$\oint_s \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \nabla\bullet\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla\bullet\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\bullet\vec{D} = \nabla\cdot\left(\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) = 0$$

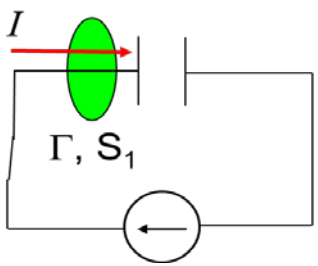
Con la ecuación de Poisson para el vector **D**, pero **no se cumple desde** la Ley de Ampére si se mantuviese como en el caso magnetostático, pues daría que : $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H} = \vec{J}\right) \rightarrow 0 = \nabla\cdot\vec{J}$

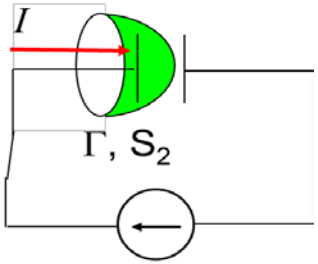
- Maxwell propone **modificar esta ley** postulando una **corriente añadida** a la de conducción **J** , que es la derivada temporal local del vector ***D***, llamada corriente de desplazamiento ***Jd***, es decir :

$$\boxed{\nabla\times\mathbf{H} = \left(\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right) = \mathbf{J} + \mathbf{J}_d \Rightarrow \nabla\cdot\left(\mathbf{J} + \mathbf{J}_d\right) = 0}$$

en la que, al tomar la divergencia en ambos miembros de obtiene la ecuación de continuidad de la carga.

Resuelve la paradoja de que la Ley de Ampere aplicada sobre S1 , atravesada por hilo, daría corriente I, mientras que por la S2 (entre armaduras de condensador) sería cero, aun habiendo corriente efectiva durante la carga del C. Sin embargo en interior del condensador surge densidad de **corriente de desplazamiento** J_d ,que no es debida a cargas móviles (transporte de carga) (Los experimentos posteriores de Hertz confirmaron la hipótesis de Maxwell)





$$\int_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_1} \vec{J}\cdot d\vec{S} = I \qquad \int_\Gamma \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_{S_2} \vec{J}_d\cdot d\vec{S} = I$$

Leyes de Maxwell definitivas: E y B definen campo único, el electromagnético

Ley de Gauss para **E**: fuentes escalares de campo (desde ley de Coulomb) Las líneas de campo nacen y mueren en las cargas

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \Leftrightarrow \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{int}}$$

Ley de Gauss para **B** : no lo generan fuentes escalares. Las líneas de campo son cerradas, o … se anclan en el finito.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Ley de Faraday-Henry: **E** no es conservativo, el origen de su fuente vectorial es la variación temporal de B.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Ley de Ampère-Maxwell: fuentes de H, las corrientes de conducción y de desplazamiento

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Leftrightarrow \oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_\Gamma + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Las *leyes constitutivas* ($D=\varepsilon E$, $B=\mu H$, $J=\sigma E$) de los medios (lineales y óhmicos) para relaciones de campos con polarización, magnetización y J de conducción , *NO son leyes de* Maxwell. Para el vacío :

$$D=\varepsilon_0 E,\ B=\mu_0 H \quad \text{y} \quad \varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$$

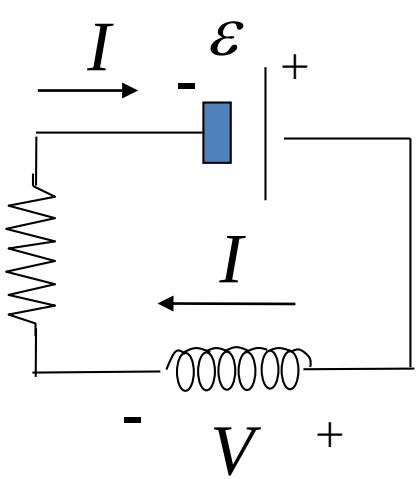
La Fuerza de Lorentz complementa a las Ec. Maxw. Y todas son invariantes ante transformaciones galileanas (aprox.) y relativistas (respecto a dos triedros inerciales en movimiento relativo MRU).

Ley de OHM. autoinducción. Energía manética

- En un circuito aislado, indeformable, de **corriente variable** I, **induce flujo** variable debido a su propia *I*. Como el campo **B** y la corriente **J** son *proporcionales* (Ampere) el *flujo magnético y la intensidad* de corriente serán también *proporcionales* a través de un coeficiente *L* *llamado de autoinducción, dependiente de la geometría del circuito,* (recordad proporción Q=C V en conductores)

$$\phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \overset{\vec{B}=\nabla\wedge\vec{A},Stokes}{=} \oint_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{l} = L\,I \quad , [L]=[\phi]/[I]=Tm^2/A=\Omega\cdot s=1H \ (henrio)$$

- La *fem inducida* será proporcional al *cambio* de *I* con t, y la potencia suministrada (*I* por *fem*) produce cambio de *Um* asociable a energía magnética de **B**, manifestada por el trabajo realizado por el campo **E** inducido:



$$\begin{cases} \varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}IL = -L\dfrac{dI}{dt} = IR \\ I\varepsilon = -LI\dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\underbrace{\left(\dfrac{1}{2}I^2L\right)}_{U_m} = -\dfrac{d}{dt}U_m = \underbrace{I^2R}_{disipac.Joule} \end{cases}$$

$$Compara: \phi = IL, y\ U_m = I^2L/2\ con\ elect.Capacidad\ V = Q\frac{1}{C}, y\ U_e = Q^2\frac{1}{C}/2$$

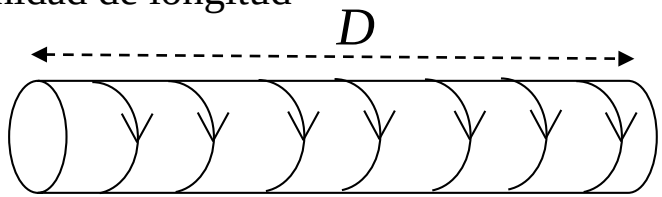
$$circuito\ LR\,(con\ fem\ nula): \quad L\frac{dI}{dt} + RI = \varepsilon = 0 \rightarrow I = I(0)\exp(-Rt/L) \underbrace{\rightarrow}_{t\to\infty} 0$$

$$con\ \varepsilon\ adicional: I - \varepsilon/R = \left(I(0) - \varepsilon/R\right)\exp(-Rt/L).\ I \rightarrow \varepsilon/R$$

Ejemplo de L. Energía electromagnética del campo.

Ejm. COEFICIENTE DE AUTOINDUCCIÓN SOLENOIDE ESTRECHO Y LARGO

n = número de espiras por unidad de longitud
D = longitud
S = área espira
V= volumen (DS)



$$D^2 \gg S$$

$$B = \mu_0 n\, I \Rightarrow \textit{flujo sobre una espira}: \quad \phi_1 = \mu_0 n I\, S$$

$$\phi = \phi_1 \underbrace{n\, D}_{N\,espiras} = \mu_0 n^2 I \quad S\, D \Rightarrow L = \frac{\phi}{I} = \mu_0 n^2 V$$

Expresando la energía del solenoide, asociada al campo ***B***, en función de este campo,C

$$U_m = \frac{1}{2} I^2 L = \frac{1}{2\mu_0} B^2\, V = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dv = \int_V u_m dv$$

Que da la densidad de energía magnética almacenada en el campo, u_m, **que es, además general** , y se expresa en función de ***H B***: (y la densidad de energía electromagnética u_{em} del campo electromagnético)

$$u_{em} = \tfrac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \tfrac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

$$(\text{en vacío} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} E^2)$$

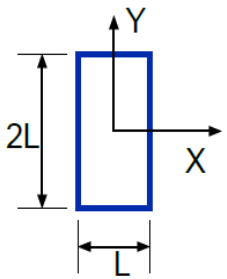
$$\boxed{U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 dv = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\; dv \;\; ; \;\; u_m = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\; (en\;\; J/m^3)}$$

Problemas

- **Problema 9.1**

La espira rectangular de la figura que está construida con un cable conductor, de conductividad σ_c y sección constante A. Calcular la intensidad de corriente inducida $I(t)$ por el campo $\boldsymbol{B} = B(x,t)\,\boldsymbol{k}$ en los siguientes casos:

a) $B(x,t) = C\,t^n$ (n es entero positivo).
b) $B(x,t) = C\,x\,t$
c) $B(x,t) = C\,|x|\,t$



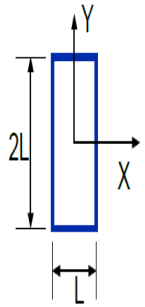
Solución :

a) $|I(t)| = \dfrac{n\,C\,L^2\,\sigma_c\,A}{3}\,t^{n-1}$ b) $I = 0$ c) $|I(t)| = \dfrac{C\,L^2\,\sigma_c\,A}{12}$

- **Problema 9.2**

La espira rectangular de la figura está construida con un cable de conductividad σ_c y sección constante A, se mueve con velocidad v constante respecto de los ejes indicados en el campo $B = B_0(x/L)\,k$ no uniforme ($B_0 > 0$). Calcular la intensidad de la corriente inducida $I(t)$ (indicando el sentido de esa corriente) en los siguientes casos:

a) $v = v_0\,i$
b) $v = v_0\,j$
c) $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(i+j)$

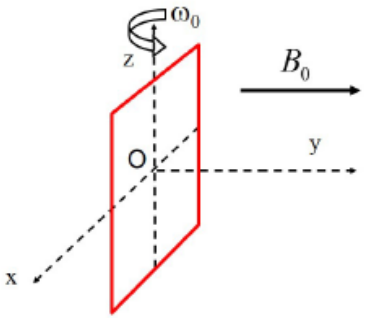


Solución :

a) $|I(t)| = \dfrac{v_0\,B_0\,\sigma_c\,A}{3}$ b) $I = 0$ c) $|I(t)| = \dfrac{v_0\,B_0\,\sigma_c\,A}{3\sqrt{2}}$

- **Problema 9.3**

La espira cuadrada de la figura de lado L está construida con un cable de conductividad σ_c y sección uniforme A. Rota con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}_o = \omega_o\,\boldsymbol{k}$ respecto de los ejes indicados en un campo $\boldsymbol{B}_o = B_o\,\boldsymbol{j}$ uniforme. Si en el instante inicial yace sobre el plano $y = 0$, calcular la corriente inducida $I(t)$ en función del tiempo.



Solución :

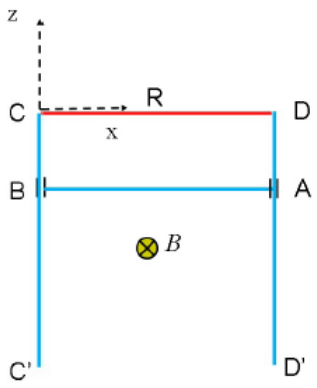
$$I(t) = \frac{B_o L\,\omega_o\,\sigma_c\,A}{4}\,\mathrm{sen}(\omega_o\,t)$$

Problemas:

- **Problema 9.4**

La figura representa dos guías metálicas CC' y DD' verticales y paralelas con resistencia eléctrica despreciable, que están unidas por otro conductor DC, con resistencia R, paralelo al eje X. La varilla AB tiene masa M, longitud L, resistencia eléctrica despreciable y puede deslizar verticalmente sin rozamiento a lo largo de las guías manteniendo el contacto eléctrico. Inicialmente la varilla AB se encuentra en la posición $z = 0$, se deja caer en el campo uniforme $\boldsymbol{B}_o = B_o\,\boldsymbol{j}$ y se pide calcular:

a) La corriente inducida en el circuito $ABCD$ cerrado en función de la velocidad $v_z(t)$ de la varilla.
b) La velocidad límite v_∞ que alcanza la varilla al caer.



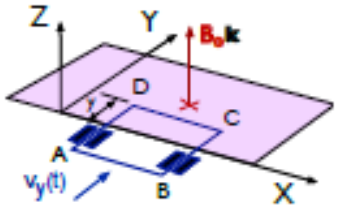
Solución :

a) $$I(t) = \frac{B_o L}{R}\, v_z(t)$$

b) $$v_\infty = \frac{M\,g\,R}{B_o^2\,L^2}$$

- **Problema 9.5**

La espira cuadrada $ABCD$ de la figura tiene lado nL, resistencia R, masa m y se mueve sin rozamiento paralela al eje Y a lo largo de unas guías horizontales sobre el plano (X, Y), como muestra la figura. En el semiplano $Y > 0$ existe un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B} = B_o\,\boldsymbol{k}$ y en el instante inicial el tramo CD está sobre el eje X. Se le comunica a la espira una velocidad inicial $\boldsymbol{v} = v_o\,\boldsymbol{j}$. Despreciando el campo magnético producido por la corriente inducida se pide:



a) La fuerza sobre la espira en un instante genérico ($y > 0$).
b) La velocidad $v_y(t)$ de la espira.
c) La corriente inducida $I(t)$

a) $F_{sp} = \dfrac{B_0^2 L^2 v_y(t)}{R}\, j$

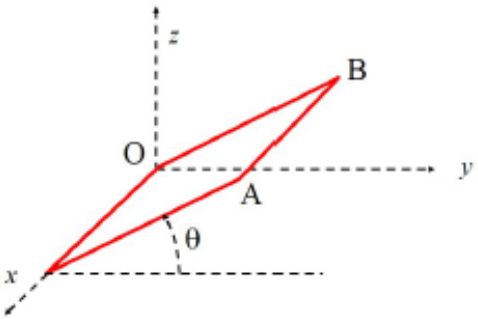
b) $v_y(t) = v_0 \exp(-t/\tau_0)$ donde, $\tau_0 = \dfrac{m R}{B_0^2 L^2}$

c) $|I(t)| = \dfrac{B_0 L}{R}\, v_0 \exp(-t/\tau_0)$ (corriente en sentido horario).

Problemas:

- **Problema 9.6**

Se hace girar alrededor del eje OX con velocidad angular constante $\omega_o = \omega_o\, i$ una espira cuadrada de lado L y resistencia R_L por unidad de longitud como se muestra en la figura. En el instante inicial $\theta = 0$. Si existe un campo $\boldsymbol{B} = (B_o/L)\,(z\,\boldsymbol{j} + y\,\boldsymbol{k})$ en dicha región del espacio se pide calcular:



a) El valor máximo I_{mx} de la intensidad de corriente inducida $I(t)$ que circula por la espira.
b) La energía disipada en una vuelta.

Solución :

$$\text{a)} \quad I_{mx} = \frac{B_o\, L\, \omega_o}{4\, R_L}$$

$$\text{b)} \quad U = \frac{\pi\, B_o^2\, L^3\, \omega_o}{4\, R_L}$$

Sugerencia: repetir éste y 9.5 con campo variable

$$\mathbf{B} = B_o \cos(\omega_o t)\mathbf{k}$$

Autoevaluación:

4.1) La resistencia eléctrica de un hilo conductor cilíndrico de sección de área constante S, longitud L, conductividad σ_c y resistividad ρ_c, vale:

1) $R = \frac{\sigma_c L}{S}$

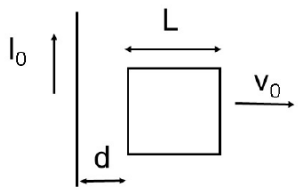
2) $R = \frac{\rho_c L}{S}$

3) $R = \frac{S}{\sigma_c L}$

4) $R = \frac{S}{\rho_c L}$

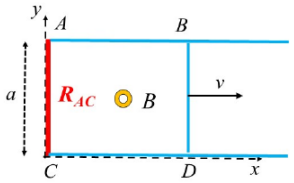
5) Ninguna de las otras respuestas es correcta.

4.6) Se tiene un hilo conductor rectilíneo de longitud infinita recorrido por una corriente eléctrica constante I_0. La espira es cuadrada de lado L y resistencia eléctrica R. Además, se desplaza hacia la derecha con velocidad v_0 constante. En la figura se muestra su posición en el instante inicial t = 0. Calcular la intensidad de corriente inducida en la espira.



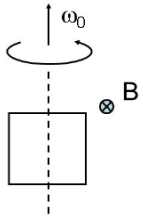
Solución: $I = \frac{\mu_0 I_0 L^2 v_0}{2\pi R(d+v_0 t)(L+d+v_0 t)}$, horaria.

4.24) En una región del espacio existe un campo magnético uniforme perpendicular al plano OXY, $\vec{B} = B\vec{\mathbf{k}}$ (véase figura). En esta región se encuentra un circuito conductor formado por dos barras conductoras paralelas AB y CD de resistencia despreciable, otra barra conductora AC de resistencia $R_{AC} = 2R$, y una barra conductora móvil BD de velocidad $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{i}}$ y resistencia despreciable. Las barras AC y BD tienen una longitud $a = 2L$. Calcular el valor absoluto de la intensidad de corriente que recorre el circuito y su sentido.



Solución: $I = \frac{BvL}{R}$, horario.

4.4) Una espira cuadrada de lado L y resistencia eléctrica R está girando en torno de un eje vertical en sentido antihorario con velocidad ω_0 constante. En esa región del espacio actúa un campo magnético uniforme B_0 que apunta perpendicularmente al plano que contiene a la espira en el instante inicial t = 0 y en sentido entrante. Pata un tiempo t, calcular la intensidad de corriente inducida en la espira.

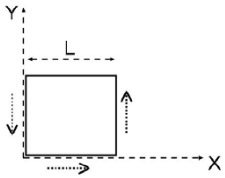


Solución: $I = \frac{B_0 L^2 \omega_0}{R}\sin(\omega_0 t)$

4.10) Sea $\vec{\mathbf{E}} = E_0 \cos(\omega t)\,\vec{\mathbf{i}}$ el campo eléctrico presente en una región del espacio, donde E_0 y ω son constantes y t es el tiempo. Calcular la densidad de corriente de desplazamiento $\vec{\mathbf{J}}_d$.

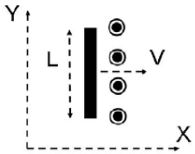
Solución: $\vec{\mathbf{J}}_d = -\varepsilon_0 E_0\, \omega\, \mathrm{sen}(\omega t)\,\vec{\mathbf{i}}$

4.11) Se tiene una espira cuadrada de resistencia total R y lado L = l en un campo de inducción magnética $\vec{\mathbf{B}} = 3at^2\vec{\mathbf{k}}$, donde a es una constante y t el tiempo. Tomando como positivo el sentido antihorario mostrado en la figura, calcular la intensidad I, inducida por el campo anterior, que circula por la espira en el instante t.



Solución: $I = -\frac{6al^2 t}{R}$

4.12) Una varilla conductora de longitud L = 2 m paralela al eje Y y contenida en el plano XY se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{V}} = 3\,\vec{\mathbf{i}}\ ms^{-1}$ en el seno de un campo magnético perpendicular $\vec{\mathbf{B}} = 2\vec{\mathbf{k}}\ T$. Calcular la diferencia de potencial, en valor absoluto, entre sus extremos.



Solución: $\Delta V = 12\,V$

UPM PlasmaLab

etsiae UPM

POLITÉCNICA "Ingeniamos el futuro"

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

APÉNDICES
ENERGÍA Y ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

TEMA 10:***ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS***

http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Inducción de corriente, Campos variables con el tiempo, Ley de Faraday-Henry-Lenz, energía magnética, Ecuaciones de Maxwell

Apéndice: Ley de OHM. Inducción mutua

- Análogamente, dos (o más**) circuitos cercanos sufrirán influencia mutua**; sobre uno de ellos (1) el flujo del campo será debido a su propia corriente y a la del otro (2) se tendrá: (coeficiente de inducción mutua simétricos M , ver. Sec. 9 .4Apuntes

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + \overbrace{\int_{S_1} \vec{B}_2(\vec{r}_1)\cdot d\vec{S}_1}^{flujo\ sobre 1\ por\ camo\ de\ 2} = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

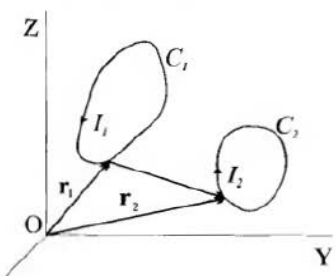
$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = L_2 I_2 + M_{21} I_1 \quad , \quad M_{21} = M_{12} \equiv M_{ij} = \frac{d\phi_{ij}}{dI_j}$$

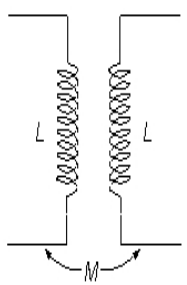
- La ley de Faraday da las dos fem inducidas.

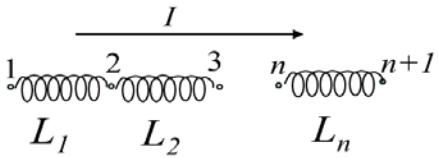
$$\varepsilon_1 = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M\frac{dI_2}{dt} \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 = -M\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{dI_2}{dt}$$

- Las inducciones pueden **asociarse** también en serie y/o en paralelo, la inductancia equivalente se comporta como con las resistencias (ver Sec. 9.4.1)

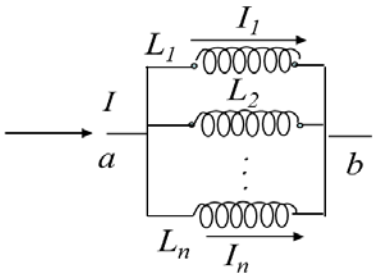
$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$







$$L_{eq} = L_n + \ldots + L_1$$

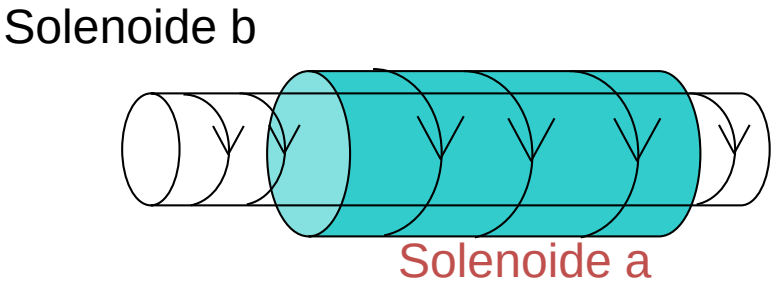


$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}$$

Ecuación 9.25 *para tener M* : $\phi_{12} = \int_{S_1} \nabla \times \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{A}_2 = I_2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) = M_{12} I_2$

Apéndice : Ejemplos de COEFICIENTES DE INDUCCIÓN MUTUA

DOS SOLENOIDES, cada uno con sección pequeña S y gran longitud D y N espiras

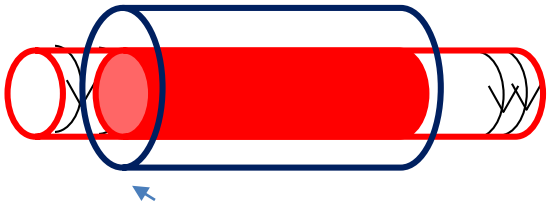


$$B_a = \mu_0 \frac{N_a}{D_a} I_a$$

Flujo que atraviesa una espira del solenoide "b" debida al B producido por "a":

$$\phi_{a\to b\,1espira} = B_a S_b = \mu_0 \frac{N_a}{D_a} I_a S_b$$

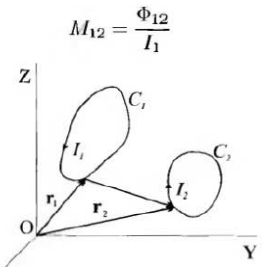
En total el flujo: con el número de espiras: $\frac{N_b}{D_b} D_a$



recíprocamente, flujo total en "*b*" debido a "*a*" y coeficiente M:

$$\phi_{a\to b} = \mu_0 \frac{N_a}{D_a} I_a S_b \frac{N_b}{D_b} D_a = \mu_0 \frac{N_a N_b}{D_b} S_b I_a = M I_a \to M = \mu_0 \frac{N_a N_b}{D_b} S_b$$

Apéndice : Fórmula de Neumann para la inducción mutua (reciprocidad)



$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12} = L_1 I_1 + \int_{S_1} \vec{B}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{S}_1$$

$$\vec{B}_2 = \nabla \times \vec{A}_2 \ con \quad \vec{A}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$\phi_{12} = \int_{S_1} \nabla \times \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_{\Gamma_1} d\vec{l}_1 \cdot \vec{A}_2 = I_2 \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{l}_1 \bullet d\vec{l}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right)}_{M_{12} = M_{21} = M} = I_2 M$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

Nota: ***Corrientes de Foucault***. Movimiento de electrones en círculos en un volumen conductor moviéndose en el seno de un campo B.
Estas corrientes que se oponen al cambio (ley de Lenz) producen una fuerza de frenado (freno de disco magnético) disipando energía por efecto Joule (calentamiento) que se reduce al fragmentar, laminar mejor, el metal.

https://www.youtube.com/watch?v=c6JJMLdsAmo

Aconsejo leer sobre: transformador, levitación magnética, propulsión y frenos magnéticos, etc.
Y un aspecto curioso: la topología del campo electromagnético (helicidad)

https://www.nature.com/articles/nphys1056 , https://www.hindawi.com/journals/tswj/2006/948947/

Apéndice . Derivación de la ENERGÍA MAGNÉTICA (y electromagnética)

- Generalizando la **energía magnética** asociada a la inductancia **para todo el espacio**: se vincula al trabajo realizado sobre la cargas por el campo ***E no electrostático*** inducido y, por tanto, es energía almacenada, depositada en energía magnética, energía del campo ***B*** . (Recordad energía electrostática de una distribución de cargas y energía del campo, ***D·E***/2)

$$\phi = LI \;;\; U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}I\phi = \frac{I}{2}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{I}{2}\int_\Gamma \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{2}\int_\Gamma I\vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$U_m = \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{A}\cdot\left(Id\vec{l}\right) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \vec{A}\cdot\left(\vec{J}\,dv\right),\; \vec{J} = \nabla\times\vec{H}$$

buscando integrales de superficie y volumen (para aplicar Th. Gauss) con:

$$\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right) = \vec{H}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{H} = \vec{H}\cdot\vec{B} - \vec{A}\cdot\vec{J} \Rightarrow$$

$$U_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,dv \equiv \frac{1}{2}\int_{V\to\infty} \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \;;\; u_m = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \quad (J/m^3)$$

$$U_e = \frac{1}{2}\int_V V\rho\,dv \equiv \frac{1}{2}\int_{V\to\infty} \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}\,dv \;;\; u_{em} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} + \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

Apéndice 1 : Ecuación de ondas electromagnéticas (Tema 10 extra)

Para el vacío : $D=\varepsilon_0 E$, $B=\mu_0 H$ y $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ de las ecuaciones de Maxwell se ve:

$$de\ \nabla\times\nabla\times\vec{E} = -\nabla^2\vec{E} + \nabla(\nabla\cdot\vec{E})\quad (y\ a\ \vec{B})$$

$$con\ \nabla\cdot\vec{E}=0,\ \ \nabla\cdot\vec{B}=0\ en\ el\ vacío:$$

$$\nabla\times\begin{cases}\nabla\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\[2ex] \nabla\times\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\nabla^2\vec{E} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\[2ex] \nabla^2\vec{B} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\text{Cada componente cumple la ecuación de ondas}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} \rightarrow con\ \ solución\ general\ \ 1\dim.\\[2ex] f(x,t) = f_1(x-vt) + f_2(x+vt)\end{cases}$$

Los campos (el campo electromagnético) se crean en una región con corrientes y/o cargas **y se propagan como onda (propagan energía electromagnética, del campo) en el vacío** a velocidad c , el campo es el mismo soporte de la propagación de la onda (ejm. la luz, como radiación electromagnética).

Por ejemplo, las ondas (planas, armónicas) siguientes son solución, con vector de ondas **k** y amplitudes $\mathbf{E_0}$ y $\mathbf{B_0}$ constantes:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} \pm \omega t + \alpha\right) y\ \vec{B} = \vec{k}\times\vec{E}/\omega,\ si\ k^2c^2 = \omega^2\ \ con$$

$$\vec{k}\wedge\vec{B} = -\frac{\omega}{c^2}\vec{E}\,,\ \vec{B}_0 = \vec{k}\wedge\vec{E}_0/\omega \rightarrow \vec{k}\cdot\vec{E}=0,\ \ \vec{k}\cdot\vec{B}=0\,,\ \vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{k}$$

Por ejm. basta tomar: $\vec{k} = k\vec{i}\quad y\quad \vec{E}_0 = E_{0y}\vec{j}$

Campos en la frontera entre dos medios

Nota: De las ecuaciones de Maxwell de obtienen las condiciones que cumplen las **componentes normales y tangenciales** *(n y t)* de los campos en la superficie de separación dos medios donde puede haber densidad de carga y de corriente superficiales. Aplicando la Ley de Gauss a superficie tipo "caja de píldoras" a las divergencias (flujo) y el teorema de Stokes sobre rectángulos a los rotacionales (circulación):

Continuidad de componentes normales de **B** y tangenciales de **E** y discontinuidades de las tangenciales de **H** y normales de **D** ,

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \rightarrow (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \cdot \vec{n} = D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = B_{1n} - B_{2n} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{total} \rightarrow (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n} = H_{1t} - H_{2t} = J_s$$

Balance de energía: $-\frac{dU_{em}}{dt} = \int_v \vec{J} \cdot \vec{E}\, dv + \oint_s \vec{N} \cdot \vec{n}\, dS, \quad con \;\; \vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$ (vector de Poynting)

La última expresión da la variación de energía electromagnética por efecto Joule *JE* en un volumen y por intercambios en la superficie por flujo de Poynting (importante en transmisión de señales)

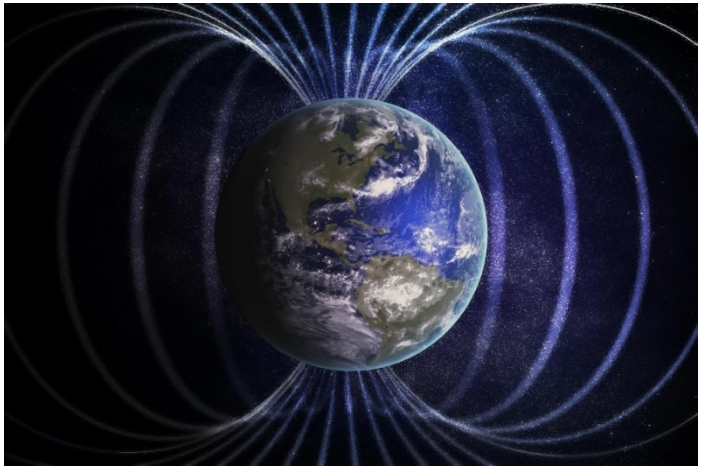
Un texto divulgativo y claro sobre le el ***significado físico de de las Ec. de Mawwell*** *(y de los operadores vectoriales) del Blog de P. Gómez-Esteban González https://eltamiz.com/files/Ecuaciones_Maxwell.pdf*

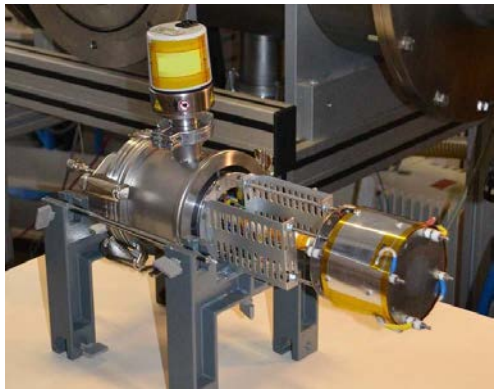
El experimento siguiente no es difícil de hacer en casa, trata de corrientes inducidas (freno magnético) muy bien explicado por compañeros de la UAM:

https://www.youtube.com/watch?v=xNxq_TJMvIk

Mirad los efectos de la temperatura , y la experiencia extra con superconductores ¡¡¡ maravilloso

Notas: Extras.





Sugerencias de la División de Enseñanza y Divulgación de la Física (DEDF)
-Ley de Faraday en el aula y en el laboratorio.
https://www.scienceinschool.org/content/faraday%E2%80%99s-law-induction-classroom-kitchen
https://www.youtube.com/watch?v=Y1MDOerruDU&t=0s

Otras webs , motores de propulsión por plasma UPM, etc:

https://scitechdaily.com/evidence-that-early-magnetic-field-around-earth-was-even-stronger-than-scientists-previously-believed/
https://www.iter.org/

https://www.innovaspain.com/cientificos-de-la-upm-patentan-un-propulsor-mas-eficiente-para-minisatelites/

https://www.lavanguardia.com/tecnologia/20190506/462069654293/univ-politecnica-patenta-motor-de-plasma-para-propulsar-satelites-espaciales.html

Thank you very much for your kind attention

This work is partially supported by the Spanish Ministry of Science and Innovation