

# ***MAGNETOSTÁTICA EN MEDIOS MATERIALES***

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

**TOPICS:** Potencial vector magnético, Campo inducido por espira lejana, Modelo clásico de magnetismo en materia, Para(dia)magnetismo

# Programa. Tema 7 de los apuntes.

Mag. Vacío II	8-abril	10-abril	
Mag. Vacío II	10-abril	12-abril	
Mag. Matrl	15-abril	22-abril	
Inducc.	22-abril	10-mayo	
Repasos/Termo	13-mayo	17-mayo	
Termo/repasos	20-may(PEI)	24-may	

## Tema 8. MAGNETOSTÁTICA DE MATERIALES *(Tema 7 de los Apuntes de FII)*

8.1 Magnetización de la Materia.

8.2 Potencial y Campo de un Dipolo Magnético.

8.3 Vector de Magnetización.

8.4 Densidades de Corriente de Magnetización.

8.5 Campo Magnetizante (Campo H).

8.6 Ecuaciones de la Magnetostática de Materiales.

8.7 Susceptibilidad y Permeabilidad Magnética.

8.8 Noción de: Diamagnetismo, Paramagnetismo y Ferromagnetismo.

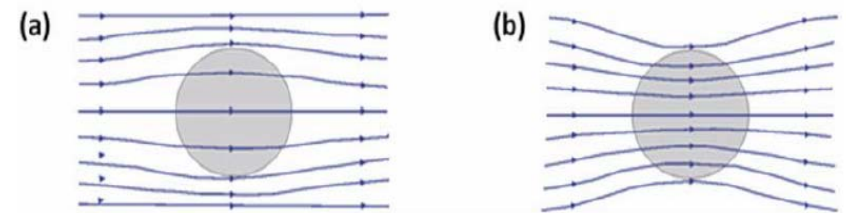


Fig. 7.12. Distribución de las líneas del campo  $\vec{B}$  (a) en una esfera de material diamagnético y (b) en una esfera de material paramagnético.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\nabla \times \vec{M} + \vec{J})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\mu_r \approx 1 \begin{cases} \mu_r > 1 \text{ paramagnetismo} \\ \mu_r < 1 \text{ diamagnetismo} \end{cases}$$

## 7. MAGNETOSTÁTICA DE MEDIOS MATERIALES

En este capítulo se estudia el comportamiento de la materia frente a un campo magnético externo y también el efecto inverso, es decir, como afectan las corrientes inducidas en la materia a dicho campo magnético<sup>7-12</sup>. Nuestro primer objetivo será comprender la respuesta de los materiales a campos externos para, a continuación, obtener las ecuaciones generales de la magnetostática de materiales. Se estudian las propiedades magnéticas de los materiales y se clasifican según su comportamiento en diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos. Estos últimos son importantes porque se utilizan en un amplio rango de aplicaciones. Finalmente, se pone un ejemplo de circuitos magnéticos. De la misma forma que en el capítulo anterior, se recomienda leer el apartado 8.1 referido a la intensidad y densidad de corriente antes de proseguir con este capítulo.

### 7.1. Campo producido por un dipolo magnético. Momento dipolar

Como ya se ha visto en el capítulo anterior, en magnetostática, el potencial vector (y por tanto la inducción magnética) puede obtenerse mediante ecuaciones del tipo *Poisson* en la que las fuentes son las componentes de la densidad de corriente, ec. [ 6.56]. Vamos a aplicar este resultado al cálculo del campo  $\vec{B}$  producido por un dipolo magnético a distancias suficientemente grandes comparadas con su dimensión.

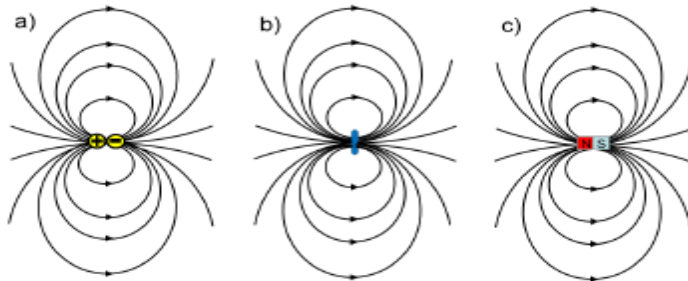
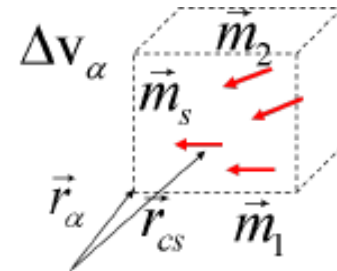


Fig. 7.2. (a) Campo eléctrico producido por un dipolo formado por dos cargas, (b) campo magnético  $\vec{B}$  generado por una corriente circulando por una espira, y (c) campo magnético  $\vec{B}$  producido por un imán. En esta última figura, las líneas de campo van desde el polo norte hasta el polo sur del imán.

### 7.2. Magnetización de la materia



$$\vec{J}_{sm} = \vec{M} \times \vec{n},$$

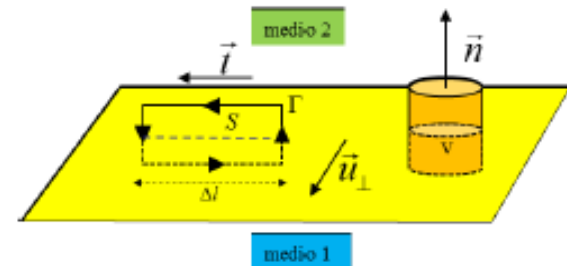
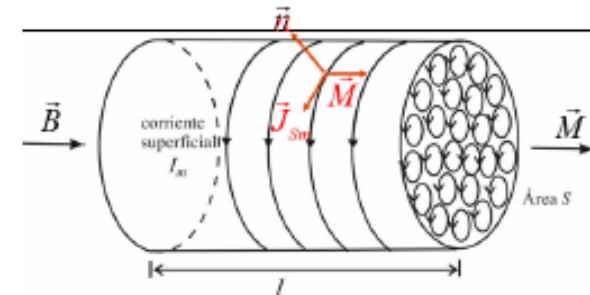


Fig. 7.5. Esquema de la superficie de interfase entre los medios 1 y 2. Se supone una densidad de corriente superficial  $\vec{J}_s$ , a lo largo de dicha superficie. El volumen  $v$  es cilíndrico y el contorno  $\Gamma$  tiene dos lados tangentes a la superficie entre ambos medios.

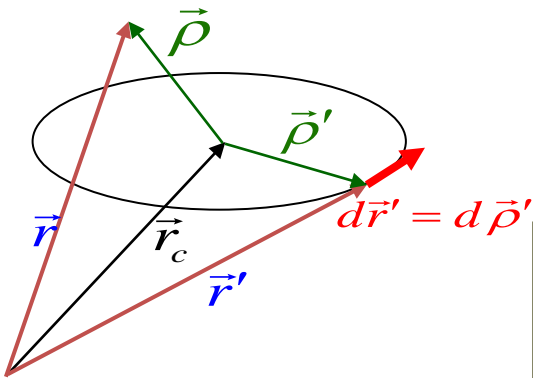
## Modelo clásico. Aproximación dipolar del vector A (repite).

- Para una *pequeña ESPIRA de corriente* (no necesariamente plana ni circular) de radio medio mucho menor que la distancia al punto de campo, el potencial vector magnético creado puede evaluarse hasta su **aproximación dipolar**.
- Permite construir modelo clásico de magnetismo en materia, *formalmente igual al hecho para dieléctricos*:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\rho}'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c \quad \text{y} \quad \vec{\rho}' = \vec{r}' - \vec{r}_c \rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$$

$$\frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \simeq \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|^3} + \dots$$



$$\vec{A}(\vec{\rho}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|} - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \vec{\rho}' \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\vec{\rho}|} \right) d\vec{\rho}' =$$

$$\vec{A}_{dip} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|^3} d\vec{\rho}'$$

# Campo de espira de corriente lejana

- Nota: Con las identidades (diferenciando respecto a variables primadas,  $\alpha$  constante):

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \rightarrow \begin{cases} (\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' - (\vec{\alpha} \cdot d\vec{\rho}') \vec{\rho}' \\ d[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') \vec{\rho}'] = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' + (\vec{\alpha} \cdot d\vec{\rho}') \vec{\rho}' \end{cases}$$

- Sumando ambas y despejando e integrando por curva cerrada:

$$\underbrace{\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}'\right) d\vec{\rho}'}_{\text{en la integral de } \mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3}}_{\text{Área diferencial en espira}} + \frac{1}{2} d\left[\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}'\right) \vec{\rho}'\right]$$

$$\oint_{\Gamma} d\left[\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}'\right) \vec{\rho}'\right] = \oint_{\Gamma} d[u] = 0 \quad ; \text{ con } \vec{\alpha} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = -\nabla \frac{1}{\rho} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|}$$

- Se tienen  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  creados por un circuito lejano *en aproximación dipolar*:

$$\vec{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{donde } \vec{m} = I \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} \vec{\rho}' \times d\vec{\rho}' = I \vec{S} \quad (\text{en } \text{A m}^2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ -\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right]$$

$$(I \text{ por Superficie de la espira, en } \text{A m}^2) \quad \text{y} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_{dip}$$

Notar que el campo  $\mathbf{E}$  de un dipolo electrostático y el campo  $\mathbf{B}$  dipolar tienen la misma expresión (formal)  
¿puede este  $\mathbf{B}$  derivarse de un potencial escalar? ¿y este  $\mathbf{E}$  dipolar de un potencial vector? Sí...

# Momento dipolar de una espira

Donde se ha definido el **momento dipolar magnético** de la espira como  $I$  por área:

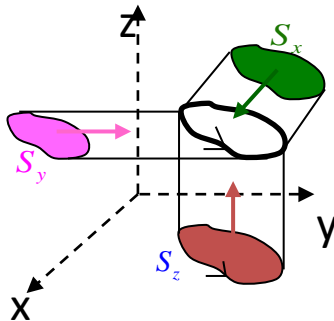
$$dS_{\text{triángulo}} = \left| \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right|$$

$$\vec{m} = I \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right) = I \vec{S}, \text{ (en } A \text{ m}^2 \text{)}$$

$$\vec{S} = \oint_{\Gamma} \left( \frac{\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}'}{2} \right)$$

Área del triángulo elemental

**Comentario:** Es *generalizable* al espacio y a distribuciones de corriente en volumen o en superficies:



$$\vec{m} = I \vec{S} = I(S_x \vec{i} + S_y \vec{j} + S_z \vec{k})$$

$$I d\vec{\rho}' \rightarrow \vec{J}(\vec{\rho}') dv' \Rightarrow$$

$$\vec{m} = \int_v \frac{\vec{\rho}' \times \vec{J}(\vec{\rho}') dv'}{2}$$

# Modelo clásico de magnetization (procedimiento formalmente análogo al de polarización)

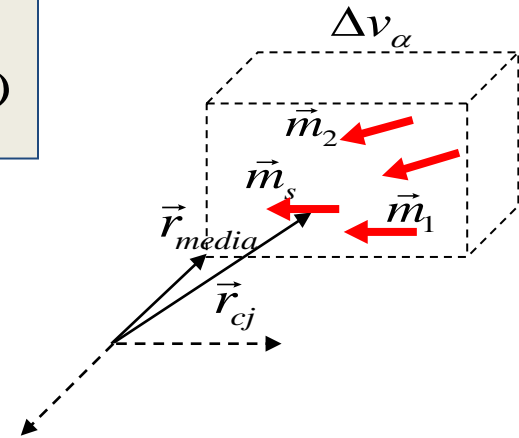
• Suponiendo el medio formado por pequeñas espiras de corriente, modelizando los momentos dipolares de átomos o moléculas en el volumen, darán campo neto  $\vec{A}$ , por superposición y **paso al continuo**, éste se obtendrá como se hizo para potencial dipolar  $V$  en dieléctricos:

• Con la densidad volumétrica de momentos magnéticos se construye el **Vector Magnetización** (Imanación) como en dieléctricos se hizo con la Polarización:

$$\vec{M}(\vec{r}_\alpha) = \frac{\sum_j \vec{m}_j}{\Delta v} \quad (\text{en } A/m, \text{ unidades de } \vec{J}_s)$$

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq -\sum_j \vec{m}_j \times \nabla \left[ \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_j|} \right]$$

$$\vec{r}_j \simeq \vec{r}_{\text{promedia en } dv} = \vec{r}', \quad \sum_j \vec{m}_j \simeq \vec{M}(\vec{r}') \Delta v'$$



$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

# Interpretación: Corrientes superficial y volumétrica de magnetización

- Buscando integrales de superficie y volumen, con :

$$\nabla' \times \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{M}(\vec{r}') \right) = \left( \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{M}(\vec{r}') + \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Llevado a la expresión del potencial:

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \nabla' \times \left[ \frac{\vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

- Aplicando el teorema de Gauss, se **identifican** dos contribuciones de **corrientes de magnetización**, en superficie y en volumen:

$$\vec{A}(\vec{r}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times \vec{n}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S dS' \frac{\vec{J}_{Sm}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \frac{\vec{J}_m}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Insisto, Recordad:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S dS' \frac{\vec{n} \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} +$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v dv' \frac{-\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} =$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_p(\vec{r}') dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} +$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_p(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Comparadlo con la expresión del potencial electrostático en medio dieléctrico, las expresiones son formalmente análogas, la magnetización ahora juega el papel de la polarización, y las corrientes de magnetización en superficie y en volumen el de las densidades de carga de polarización, cambiando divergencia a (-) rotacional , etc.



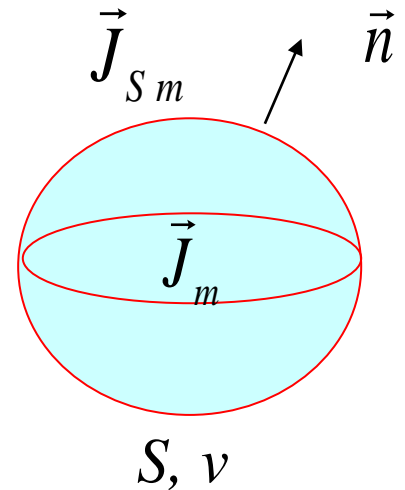
# Corrientes de magnetización

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_{Sm} dS'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J}_m dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Hemos representado el medio magnetizado con dos densidades de corriente efectivas (la imanación en realidad se explica por fundamentos **cuánticos**)

## Densidad volumétrica de corriente de magnetización

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \quad (A / m^2)$$

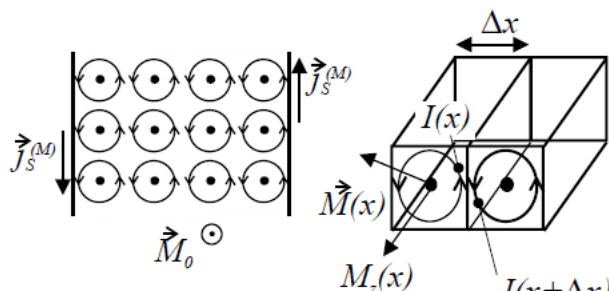


- Y una **Densidad de Corriente Superficial de Magnetización** en la superficie de normal  $\vec{n}$  del material al exterior :

$$\vec{J}_{Sm} = \vec{M} \times \vec{n} \quad (A / m)$$

$$d\vec{S}' = \vec{n} dS'$$

- Siendo la corriente total de magnetización nula : (Comparar con teoría de dieléctricos, tanto interpretación como carga de polarización etc. )



$$\int_{vol+Superf} \vec{v} dq = \oint_S \underbrace{\vec{M} \times \vec{n}}_{J_{ms}} dS + \int_v \underbrace{\nabla \times \vec{M}}_{J_m} dv = \oint_S \vec{M} \times \vec{n} dS + \int_v (\nabla \times \vec{M}) dv = -\oint_S d\vec{S} \times \vec{M} + \int_v dv \nabla \times \vec{M} = -\oint_S d\vec{S} \times \vec{M} + \oint_S d\vec{S} \times \vec{M} = 0 \text{ (Gauss para rot)}$$

# Vector intensidad magnética, magnetizante o campo $H$

- Con corrientes de cargas libres y de magnetización las ecuaciones de Maxwell para la magnetostática son:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\nabla \times \vec{M} + \vec{J}) \rightarrow \nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

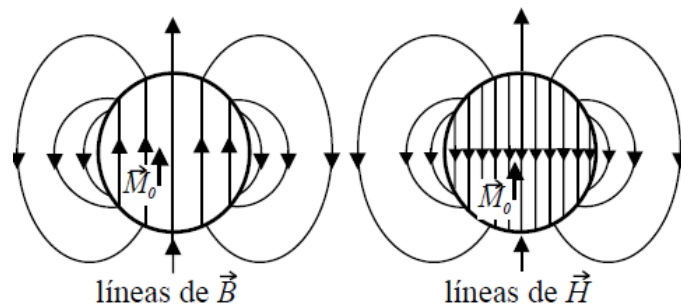
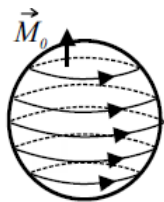
- Se reescriben, definiendo el campo  $\mathbf{H}$  (intensidad de campo magnético):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Leftrightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

*Nota:*  $\nabla \cdot \vec{H} = -\nabla \cdot \vec{M} \neq 0$

- El campo magnetizante  $\mathbf{H}$  (intensidad de campo magnético) depende únicamente de las corrientes de carga libre (de **conducción**) que lo crean, y son medibles en laboratorio) en conductores, juega un papel similar al vector  $\mathbf{D}$  en electrostática de dieléctricos y también tiene fuentes escalares y vectoriales. Ejm. Líneas de campo:

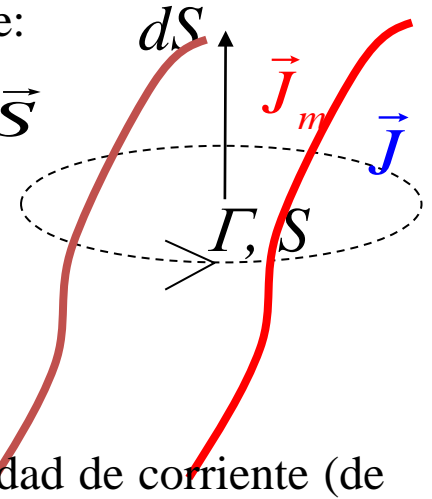


# Ley de Ampere en medios materiales:

• **LEY de AMPÉRE** en presencia de Medios Magnéticos. Dese la Ley de Ampere Para el campo  $\mathbf{H}$  en forma diferencial, se tiene, para una corriente de conducción  $\mathbf{J}$  que fluye por uan superficie apoyada sobre una curva cerrada simple:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \rightarrow \iint_{S_\Gamma} \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I_{\Gamma \text{ libre}}$$



- La circulación del vector excitación magnética  $\mathbf{H}$  es igual a la intensidad de corriente (de conducción) de cargas libres abrazada por la curva cerrada.
- Permite el cálculo del vector  $\mathbf{H}$  en *problemas con simetrías* simples (sobre todo cilindros de corriente) sin conocer a priori las corrientes de magnetización.
- Las *ecuaciones de Maxwell de la Magnetostática de materiales*, en forma diferencial e integral quedan:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= I_{\Gamma} \quad \text{y} \quad \oint_{S_{\text{cerr}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

# Medios lineales sin magnetización permanente:

- Se necesita la relación entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$ , en algunos medios, llamados lineales, la magnetización es lineal con el campo macroscópico, según:

$$\vec{M}(\vec{H}) \simeq \vec{M}(0) + \chi \vec{H} = 0 + (\mu_r - 1) \vec{H}$$

Donde se ha supuesto que no hay magnetización remanente a campo  $H$  nulo (pero en muchos materiales, imanes, sí la hay). **Propiedades del medio:**

$\chi$  = susceptibilidad magnética (un escalar en medios isótropos)

$\mu_r$  = permeabilidad magnética relativa

- El vector  $\vec{B}$  es para estos medios lineal con  $\vec{H}$ , pudiendo ser la permeabilidad mayor o menor que la del vacío. La **ley constitutiva** para estos medios queda:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Recordad:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$$

$$\mu_r \approx 1 \begin{cases} \mu_r > 1 \text{ paramagnetismo} \\ \mu_r < 1 \text{ diamagnetismo} \end{cases}$$

Table 1. Relative Permeability of Materials

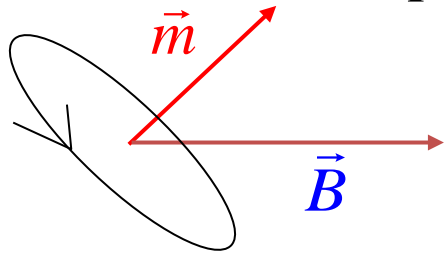
Material	Relative Permeability	Classification
Vacuum	0	Non-magnetic
Silver	0.99998	Diamagnetic
Aluminum	1.00002	Paramagnetic
Cobalt	250	Ferromagnetic
Nickle	600	Ferromagnetic
Iron	50000	Ferromagnetic

- En material paramagnético el momento  $\vec{m}$  se alinea paralelo a  $\vec{B}$ , en material diamagnético, la alineación es antiparalela.

- Un material para(día)magnético es ligeramente atraído(repelido) por campo  $\vec{B}$  variable lejano.

- Si  $\mu$  es mucho mayor que la del vacío, **medios ferromagnéticos**, la linealidad no vale.

# Fuerza y torque sobre un dipolo magnético en $\mathbf{B}$ externo:



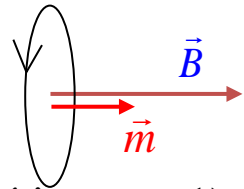
$$\vec{F} = \oint d\vec{F} = I \oint d\vec{r} \times \vec{B} = I (\oint d\vec{r}) \times \vec{B} \simeq (\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B} \simeq \vec{0}$$

$$\tau = \tau_o = \oint \mathbf{r} \times (I d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

El momento no depende del punto si el dipolo está en un  $\mathbf{B}$  uniforme.

- El momento (torque) de la fuerza **tiende a alinear momento magnético y campo  $\mathbf{B}$** , paralela o antiparalelamente (paramagnetismo o diamagnetismo). ( $\mathbf{B}$  externo depende de  $\mathbf{r}$ )
- Puede probarse que sobre un material en un campo  $\mathbf{B}$  *variable* lejano, la fuerza magnética por unidad de volumen es:

$$\vec{F} / \delta v \simeq \sum_j (\vec{m}_j \cdot \nabla) \vec{B} / \delta v \simeq (\vec{M} \cdot \nabla) \vec{B} \sim -(\mu_r - 1) \nabla B^2$$



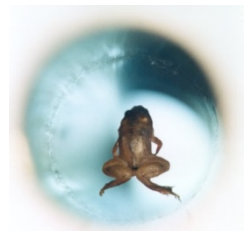
Que es de **atracción** (**repulsión**) si el medio es paramagnético  $\mu_r > 1$  (diamagnético  $\mu_r < 1$ ) si los momentos  $\mathbf{m}$  se alinean paralelos (antiparalelos) al campo aplicado.

Recordad que un conductor en equilibrio electrostático, como un dielectrico es atraído por campo variable exeterno)

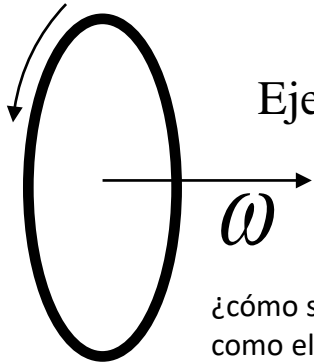
(videos sobre levitación diamagnética: <http://www.physics.ucla.edu/marty/diamag/>

<http://www.ru.nl/hfml/research/levitation/diamagnetic>

<https://www.studysmarter.us/explanations/physics/electricity-and-magnetism/diamagnetic-levitation/>



# Energía magnética en medios materiales:



Ejemplos de generación de corriente: (probl. 8.1)

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dq}{d\theta} \omega = \frac{Q\omega}{2\pi}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dq}{dz} v = \lambda v$$

¿cómo sería la corriente superficial de conducción generada por disco de densidad de carga uniforme que girase como el aro anterior? ¿y la densidad de corriente de una esfera de carga uniforme en volumen girando en torno a su eje?

• **Energía magnética**,  $U_m$  y densidad de energía  $u_m$ : Al igual que en un dieléctrico la energía electrostática es  $(D E/2)$  (por unidad de volumen) para la energía magnética en el medio toma la forma:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dv, \quad \text{en el vacío: } U_m = \frac{1}{2 \mu_0} \int_V B^2 dv, \quad (u_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2 \mu_0} B^2)$$

$$\text{recordad : } U_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dv = \int_V u_e dv$$

**Imanación e histéresis** (ver apuntes Sección 7.5 ) Proceso e magnetización. Temperatura de Curie.

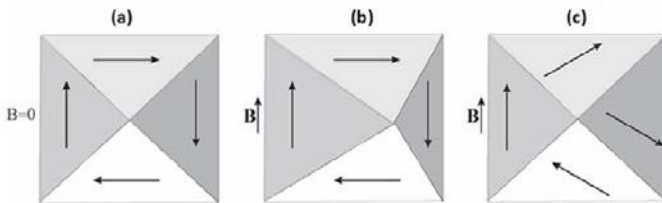
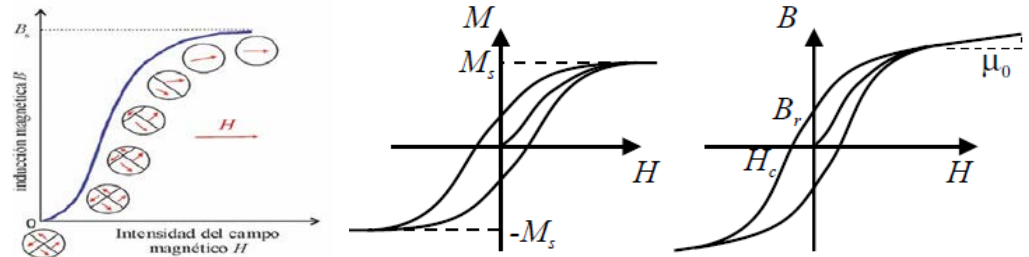


Fig. 7.7. Dominios magnéticos. (a) material ferromagnético sin magnetizar, (b) magnetización por crecimiento de dominios, (c) magnetización por orientación de dominios.



# Materiales magnéticos

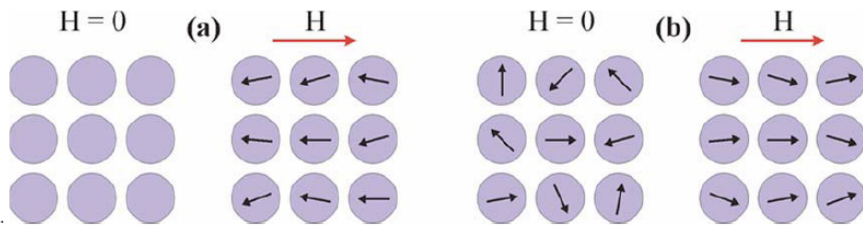


Fig. 7.10. (a) Configuración de los dipolos atómicos para un material diamagnético con y sin campo magnético exterior. En ausencia de campo exterior no existen dipolos. Si se aplica un campo magnético exterior, se inducen dipolos que producen un campo en dirección opuesta al campo exterior. (b) Configuración de los dipolos para un material paramagnético con y sin campo magnético exterior.

Por debajo de la llamada temperatura de Curie  $T_c$  los momentos  $m$  de todos los átomos de un monocristal ferromagnético, están coalineados en equilibrio, incluso sin corrientes externas.  $T_c$  es del orden de 1000K. La magnetización es nula por si  $T > T_c$ . El material ferromagnético se comporta paramagnético

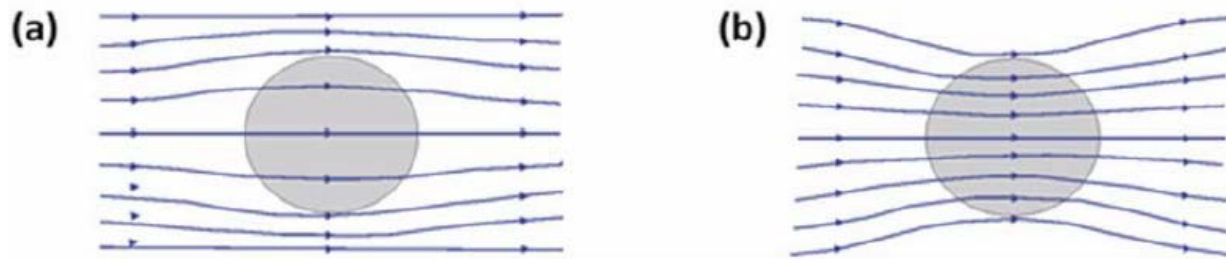


Fig. 7.12. Distribución de las líneas del campo  $\vec{B}$  (a) en una esfera de material diamagnético y (b) en una esfera de material paramagnético.

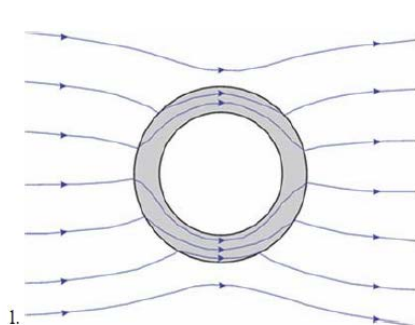
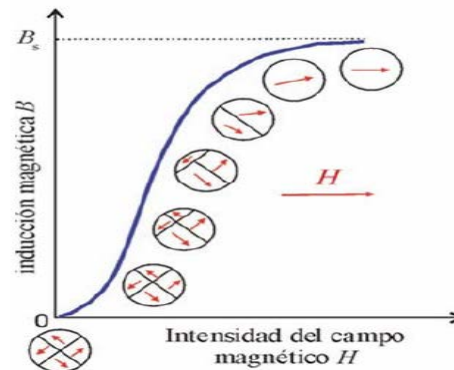


Fig. 7.13. Distribución de las líneas del campo  $\vec{B}$  en una esfera hueca de material ferromagnético.

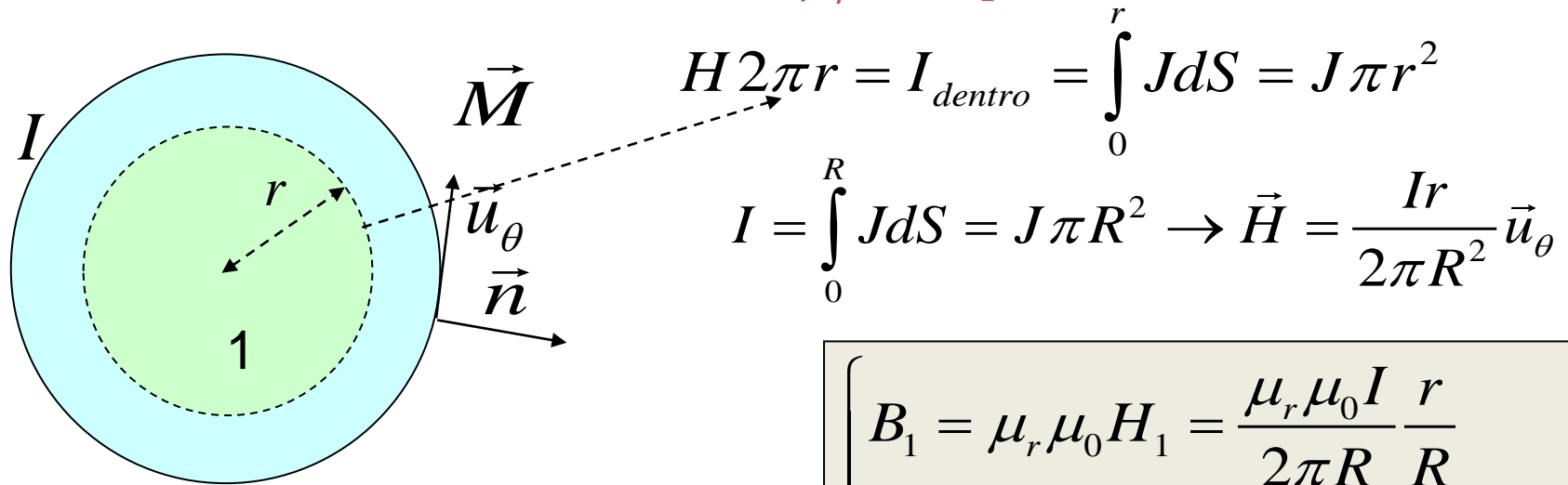


Curie temperatures for some ferromagnetic substances	
iron (Fe)	1,043 K
cobalt (Co)	1,394 K
nickel (Ni)	631 K
gadolinium (Gd)	293 K
manganese arsenide (MnAs)	318 K

# Ejemplos: hilo de corriente en medio magnetizable. (ver Prob. 8.3, 8.4)

## Ejem. DENSIDADES DE CORRIENTE DE MAGNETIZACIÓN

Hilo de corriente de radio  $R$ , densidad libre uniforme y permitividad (independiente de  $H$  exterior) dada  $\mu_r$  (ver problema



Corriente  $J$  axial en OZ ascendente  
 $H$  y  $M$  en dirección acimutal y la corriente superficial de magnetización  $J_{sm}$  va en OZ, por superficie exterior.  
 La corriente  $J_m$  es nula.

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = \mu_r \mu_0 H_1 = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi R} \frac{r}{R} \\ M = (\mu_r - 1) H = \frac{(\mu_r - 1) I r}{2\pi R^2} \\ J_{S m} = \frac{(\mu_r - 1) I R}{2\pi R^2} = \frac{(\mu_r - 1) I}{2\pi R} \end{array} \right.$$



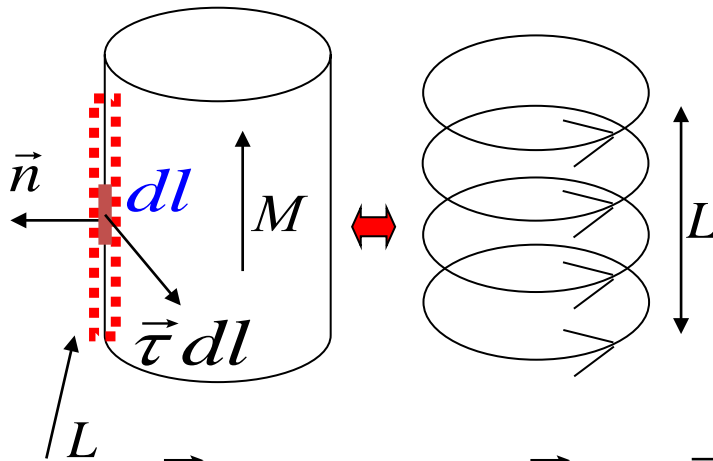
# Ejm. Cilindro imanado: modelo como solenoide prob. 8.4

Cilindro finito uniformemente imanado:  
 material ferromagnético no lineal, la permeabilidad depende de corrientes (o  $\vec{H}$ ) impuesta, el dato ha de ser la magnetización  $\vec{M}$ .

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} \quad ,$$

pero  $\mu_r \neq cte \rightarrow$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \text{ con } \mu = \mu_0 \mu_r(\vec{H})$$



El campo  $\vec{B}$  de un cilindro uniformemente imanado en la dirección de su eje de *simetría* se comporta como el de un solenoide de  $n$  espiras por unidad de longitud por el que circula una intensidad  $I$  tal que:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \vec{0} \quad \vec{J}_{S m} = \vec{M} \times \vec{n} \rightarrow \vec{J}_{S m} = M \vec{u}_\theta$$

$$I_L = \int_L \vec{J}_{S m} \cdot \vec{\tau} dl \rightarrow nLI = J_{S m} L$$

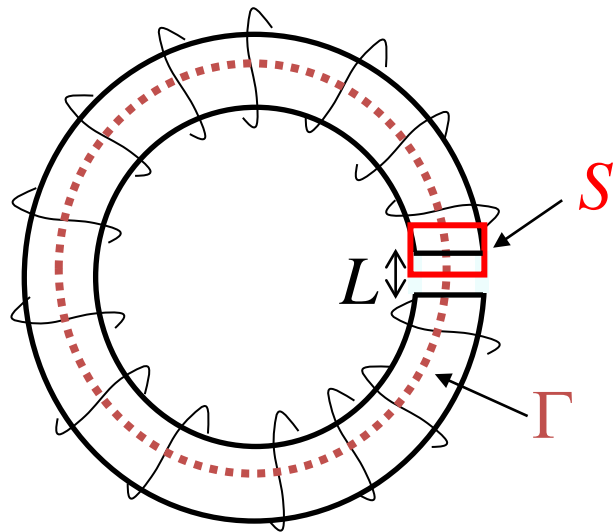
$$\rightarrow J_{S m} = nI = M \quad (\text{en A/m})$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

# Ejemplo: Material ferromagnético

Electroimán toroidal de  $N$  espiras *con entrehierro* (rendija) de longitud  $L$  (material de magnetización  $M$ ). Casi-continuidad de  $\mathbf{B}$  en hueco:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow B_h S_h = \phi_h = \phi_e = B_e S_e \quad \text{Entrehierro } e$$



$$B_h \simeq B_e$$

$$B_e = \mu_0 H_e \quad (\text{vacío})$$

$$B_h = \mu_0 (H_h + M_h)$$

$$H_e \gg H_h$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}^* \rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \rightarrow (2\pi R - L)H_h + LH_e = NI$$

*OJO: Si el material es NO lineal se tiene que:*

$$B_h = \mu_0 H_h + M_h$$

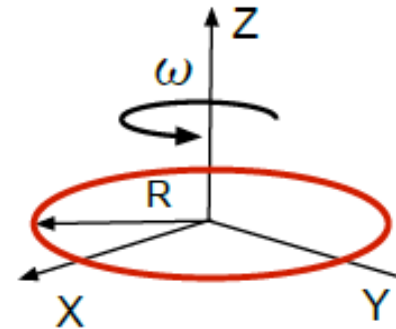
# Problemas

## • Problema 8.1

El anillo circular de radio  $R$  de la figura tiene carga eléctrica  $Q$  uniformemente distribuida y gira con velocidad angular  $\omega = \omega k$ , funcionando entonces como un anillo de corriente. Se pide:

- 1) Calcular la intensidad de corriente eléctrica  $I$  que crea el anillo girando, así como su momento magnético  $m$ .
- 2) Si se aplica un campo magnético uniforme  $B$ , determinar la fuerza y el momento mecánico  $\tau$  de ésta, sobre el anillo cuando (a)  $B = Bk$  y (b)  $B = B_x i + B_y j$ .

$$1) \quad I = \frac{Q\omega}{2\pi} ; \quad m = \frac{Q\omega R^2}{2} k$$



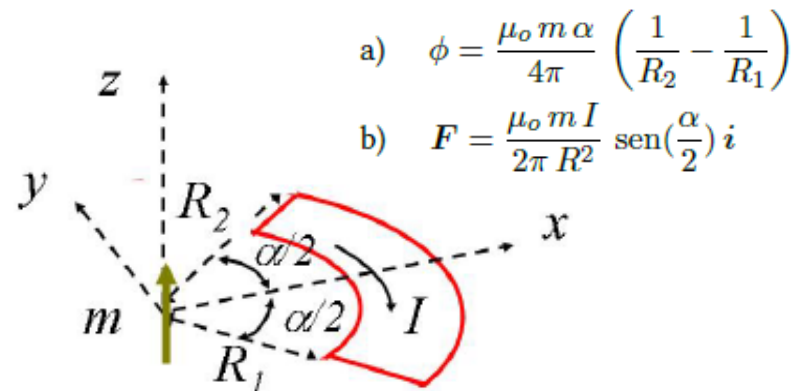
$$2a) \quad F = 0 ; \quad \tau = 0$$

$$2b) \quad F = 0 ; \quad \tau = \frac{q\omega R^2}{2} (B_x j - B_y i)$$

## • Problema 8.2

Un dipolo magnético de momento dipolar  $m = m k$  se ubica en el origen cerca de la espira que muestra la figura, definida por dos arcos de circunferencia de radios  $R_1$  y  $R_2$  unidos por dos tramos rectilíneos.

- a) Calcular el flujo  $\phi$  del campo magnético  $B_{dp}$  del dipolo a través de la superficie que define la espira.
- b) Si por la espira circula una corriente de intensidad  $I$  como se indica, determinar la fuerza debida a  $B_{dp}$  sobre el arco de espira de radio  $R_1$ .

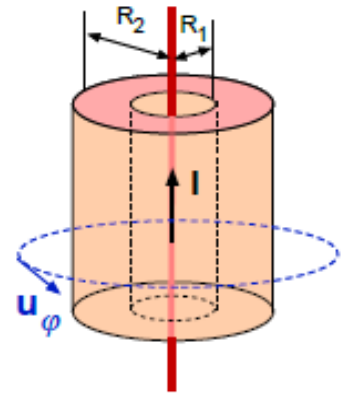


$$a) \quad \phi = \frac{\mu_0 m \alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$b) \quad F = \frac{\mu_0 m I}{2\pi R^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) i$$

## • Problema 8.3

Un hilo conductor muy largo por el que circula una corriente de intensidad  $I$  está en el eje de una corteza cilíndrica, también muy larga, de radio interior  $R_1$  y exterior  $R_2$  (ver figura). La cáscara cilíndrica está formada por un material magnético lineal de permeabilidad relativa  $\mu_r$ . Atendiendo a la simetría cilíndrica de la configuración, se piden, en todo punto del espacio, los vectores:



- Intensidad de campo magnético  $H$  (campo magnetizante).
- Inducción magnética, es decir, el campo  $B$ .
- Magnetización  $M$  en la corteza cilíndrica (en el exterior hay vacío).
- Las densidades superficial  $J_{sm}$  y volumétrica  $J_m$  de magnetización.

**Solución :**

$$a) \quad H = \frac{I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi$$

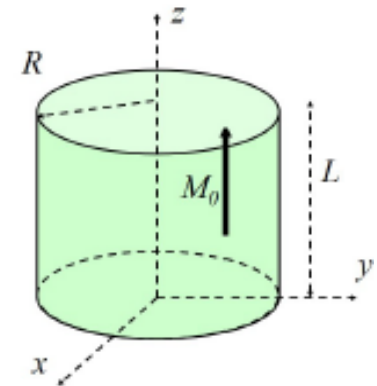
$$b) \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi \quad (0 < \rho < R_1) \quad ; \quad B = \frac{\mu_r \mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi \quad (R_1 < \rho < R_2) \quad ; \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi \quad (\rho > R_2)$$

$$c) \quad M = \frac{(\mu_r - 1) I}{2\pi \rho} \mathbf{u}_\varphi$$

$$d) \quad J_{sm}(R_1) = \frac{(\mu_r - 1) I}{2\pi R_1} \mathbf{k} \quad ; \quad J_{sm}(R_2) = -\frac{(\mu_r - 1) I}{2\pi R_2} \mathbf{k} \quad ; \quad J_m = 0$$

- **Problema 8.4**

El cilindro de radio  $R$  y altura  $L$  de la figura está constituido por un material magnético no lineal magnetizado permanentemente. La imanación se caracteriza por un vector de magnetización uniforme dado por  $\mathbf{M} = M_o \mathbf{k}$ . Calcular los campos, magnético  $\mathbf{B}$  y magnetizante  $\mathbf{H}$ , en cualquier punto del eje  $Z$  exterior al material (considerar las bases del cilindro en los planos  $z = -L/2$  y  $z = L/2$ ).



**Sugerencia:** establecer la analogía con un solenoide de igual radio y altura formado por un devanado de corriente (ver problema 7.7) estableciendo la relación entre  $NI/L$  y la densidad superficial de corriente de magnetización debida a  $M_o$ .

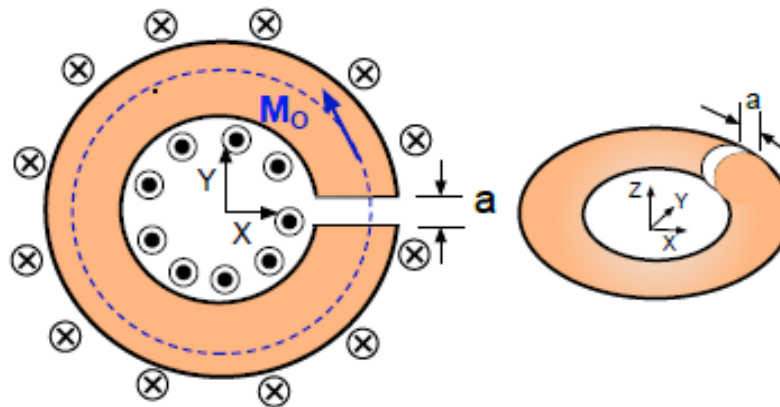
**Solución :**

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o M_o}{2} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \mathbf{k} \quad ; \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_o} \mathbf{B} - M_o \mathbf{k}$$

$$\text{Analogía: } M_o \leftrightarrow \frac{NI}{L} \quad ; \quad \mathbf{J}_{Sm}(R) \leftrightarrow \left( \frac{NI}{L} \right) \mathbf{u}_\varphi$$

- Problema 8.5

Una pieza toroidal de material ferromagnético no lineal de radio medio  $R$  se halla uniformemente imanada con imanación  $M = M_o u_\varphi$  en torno al eje  $OZ$ . El material se encuentra recubierto por un devanado de un hilo conductor por el que pasa una corriente  $I$  formando  $N$  espiras, como muestra la figura. En el material se ha practicado un pequeño corte transversal (entrehierro) de longitud  $a \ll 2\pi R$ . Determinar el campo  $H_m$  en el interior de material y  $H_a$  en el espacio del entrehierro. En el hueco se pueden despreciar efectos de borde (distorsión transversal de líneas de campo hacia el exterior) y suponer que la sección interior del toroide es muy pequeña.



Solución :

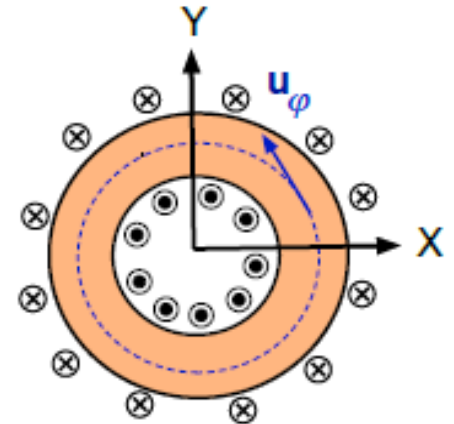
$$H_m = \left( \frac{NI - a M_o}{2\pi R} \right) u_\varphi \quad ; \quad H_a = \left( \frac{NI + (2\pi R - a) M_o}{2\pi R} \right) u_\varphi$$

# Problemas

## • Problema 8.6

El material imanado del toroide del problema anterior se reemplaza por un material magnético lineal de permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ , calcular:

- El campo  $H$  en el material y en el entrehierro.
- Se cierra el entrehierro y se pide el campo  $B$  en el interior del solenoide toroidal estrecho que resulta.



**Solución :**

$$\text{a) } H_a = \frac{N I}{2\pi R + (\mu_r - 1) a} u_\varphi \quad ; \quad H_m = \mu_r H_a$$

$$\text{b) } B = \frac{\mu_r \mu_0 N I}{2\pi R} u_\varphi$$

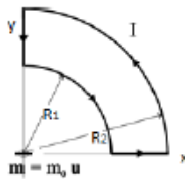
# Problemas (ejm. Examen, trabajo personal)

5) Se tiene un cilindro indefinido, de radio  $R=4d$ , hecho de un material magnético lineal de permeabilidad relativa  $\mu_r = 1 + r/d$ , siendo  $r$  la distancia al eje de simetría del cilindro, eje que coincide con en el eje  $Oz$ . En su interior el campo de inducción magnética es  $\vec{B} = B_0 (r/R) \vec{k}$ . La densidad superficial de corriente de magnetización en la superficie del cilindro es:

(Expresar el resultado en función de  $\mu_0$ ,  $d$  y  $B_0$ )

$$\vec{J}_{sm}(r=R) =$$

A) La espira de corriente  $I$  de la figura consta dos tramos rectilíneos, que yacen sobre los ejes  $Ox$  y  $Oy$ , y dos tramos circulares, de radios  $R_1 = R$  y  $R_2 = cR$ , como muestra. Se sitúa un dipolo magnético (prácticamente puntual) con su centro en el origen, dado por  $\vec{m} = m_0 \vec{u}$ .



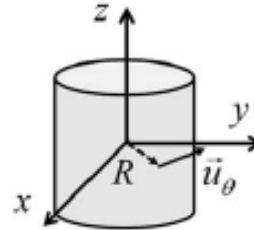
1) El campo  $\vec{B} = \vec{B}_2$  inducido en el origen sólo por el sector circular de mayor radio de la espira es:

- A)  $\frac{\mu_0 I}{8c} \frac{1}{R} \vec{k}$       C)  $\frac{\mu_0 I}{8c} \frac{1}{R} \vec{k}$   
 B)  $\frac{\mu_0 I}{8c} \frac{1}{R} \vec{k}$       D)  $\frac{\mu_0 I}{8c} \frac{1}{R} \vec{k}$   
 E) Ninguna de las anteriores.

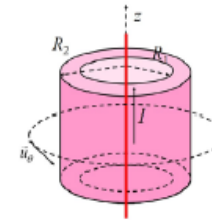
2) El campo  $\vec{B} = \vec{B}_0$  inducido por la espira de corriente en el origen es:

- A)  $-\frac{\mu_0 I}{8R} \frac{c-1}{c} \vec{k}$       C)  $-\frac{\mu_0 I}{8R} \frac{c-1}{c} \vec{k}$   
 B)  $-\frac{\mu_0 I}{8R} \frac{c-1}{c} \vec{k}$       D)  $-\frac{\mu_0 I}{8R} \frac{c-1}{c} \vec{k}$   
 E) Ninguna de las anteriores.

3) Si  $\vec{u} = (\vec{i} + \vec{j})/\sqrt{2}$ , el momento  $\vec{\tau}$  de la fuerza debida a  $\vec{B}_0$  sobre el dipolo magnético es:



B) Un hilo indefinido de corriente  $I$  se encuentra en el eje de una cáscara cilíndrica, también indefinida, de radios interior y exterior  $R_1 = R$  y  $R_2 = 3R$  respectivamente, rellena con un material lineal de permeabilidad magnética  $\mu$ , que varía con la distancia radial al hilo  $r$  según  $\mu = \mu_0 r/(2R)$ .



4) El campo  $\vec{B} = \vec{B}_2$  en el interior del material es:

- A)  $\frac{\mu_0 I}{4\pi R} \vec{u}_\theta$       C)  $\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$   
 B)  $\frac{\mu_0 I}{6\pi R} \vec{u}_\theta$       D)  $\frac{\mu_0 I}{24\pi R} \vec{u}_\theta$   
 E) Ninguna de las anteriores.

5) La corriente superficial de magnetización en la cara interna de la cáscara cilíndrica  $\vec{J}_{sm}(R_1)$  es:

- A)  $-\frac{I \vec{k}}{4\pi R}$       C)  $-\frac{I \vec{k}}{12\pi R}$   
 B)  $\frac{I \vec{k}}{4\pi R}$       D)  $\frac{3I \vec{k}}{2\pi R}$   
 E) Ninguna de las anteriores.

6) El flujo (en valor absoluto  $|\phi|$ ) del vector  $\vec{B}$  a través de la superficie del disco, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , definido por la intersección de la corteza material y el plano  $z=0$  es:

- A)  $|\phi| = 0$       C)  $|\phi| = 4\mu_0 I/R$   
 B)  $|\phi| = 2\mu_0 I/R$       D)  $|\phi| = 3\mu_0 I/R$