

MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

Dr. José Manuel Donoso

<http://plasmalab.aero.upm.es/~jmdv/>

Dpto. Física Aplicada, ETSIAE, Universidad Politécnica de Madrid

TOPICS: Fuerza de Lorentz, Ley de Biot-Savart, Campo creado por distribuciones de corrientes, Ley de Ampere

<i>Mag. Vacío I</i>	20-marzo	22-marzo	2+1	29
<i>Santa SEMANA EXÁMENES</i>	Del 23-marzo	al 1 abril		
			<i>Del 2 abril</i>	<i>al 5 abril</i>
<i>Mag. Vacío II</i>	8-abril	10-abril	1+3	26
<i>Mag. Vacío II</i>	10-abril	12-abril	0+1prob	22

Tema 7. MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

- 7.1 Densidad e Intensidad de Corriente.
- 7.2 Inducción Magnética de una Carga en Movimiento Rectilíneo y Uniforme (MRU).
- 7.3 Inducción Producida por una Distribución de Corriente: Ley de Biot-Savart.
- 7.4 Ley de Ampère.
- 7.5 Ecuaciones de la Magnetostática.
- 7.6 Potencial Vector.
- 7.7 Fuerza de Lorentz y su Aplicación al Movimiento de Cargas.
- 7.8 Fuerza y Momento de un Campo sobre un Circuito.
- 7.9 Fuerzas entre cargas y entre Circuitos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dv' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

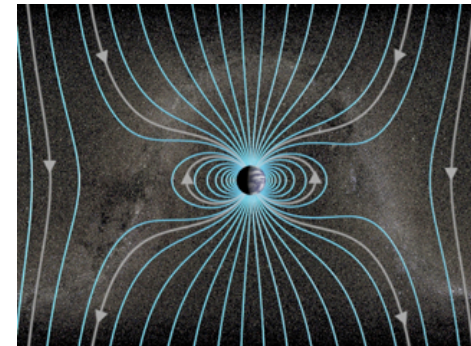
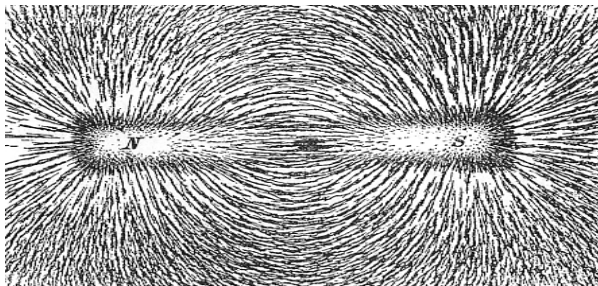
$$\vec{F} = I \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \times \vec{B}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int.}\Gamma} = \mu_0 \int_{S_c} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

6. MAGNETOSTÁTICA DEL VACÍO

Desde la Grecia Clásica se conocen las propiedades de minerales como la magnetita (Fe_3O_4) y su capacidad de atraer limaduras de hierro y como esas limaduras atraían a otras. A un cuerpo magnetizado se le denominó imán y a las regiones de un cuerpo en las cuales se concentra el magnetismo, polos magnéticos. La tierra es un imán y el uso de una aguja magnética para orientarse en la navegación está documentado desde el siglo XI. En el año 1600 Sir William Gilbert analizó la existencia de dos polos magnéticos en los imanes, uno designado como + y otro como -, concluyendo que polos iguales se repelen y polos distintos se atraen. En el siglo XVI se siguieron investigando los imanes y utilizando balanzas de torsión se encontró que las fuerzas de atracción o repulsión entre polos varían con el inverso del cuadrado de la distancia al igual que lo hacen las cargas eléctricas. Se encontró también que los polos magnéticos no tienen existencia de manera independiente, todo cuerpo magnético tiene dos polos (+ y -) o (Norte y Sur), opuestos uno al otro y de igual intensidad. En 1819 Hans Christian Ørsted descubrió que una aguja magnética se desviaba de su posición al circular una corriente eléctrica por un hilo conductor próximo (una corriente eléctrica generaba un campo magnético) con lo que por primera vez se relaciona electricidad y magnetismo. Este fenómeno se comenzó a estudiar en profundidad: Biot, Savart y Ampère encontraron interacciones entre circuitos recorridos por corrientes eléctricas. Faraday y Henry independientemente describieron la inducción en la cual la variación del flujo del campo magnético a través de una espira conductora producía una corriente eléctrica. Finalmente Maxwell desarrolló una teoría unificada para el

$$\vec{B}(\vec{r})$$



Web interesante para visualización de campos:

<http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/magnetostatics/index.htm>

FUERZA DE LORENTZ

- Fuerza que aparece sobre una carga q con velocidad \mathbf{v} en el seno de un campo electromagnético: (Observad que F_{mag} depende de la velocidad, relativa a un triedro de referencia $\hat{i}\hat{j}$)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Ecuación de dimensiones de la inducción magnética \mathbf{B} :

$$[\vec{B}] = [\vec{F}][q]^{-1}[\vec{v}]^{-1} = MT^{-2}I^{-1}, \text{ B en T (Tesla)}$$

- La componente magnética la fuerza no realiza trabajo, al ser perpendicular a la velocidad, luego, la fuerza magnética $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ no varia la E_c de la partícula (pero un campo \mathbf{B} variable con t sí induciría $\mathbf{E}(t)$ no electrostático que sí haría trabajo variando energía cinética)

$$dW = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} dt = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

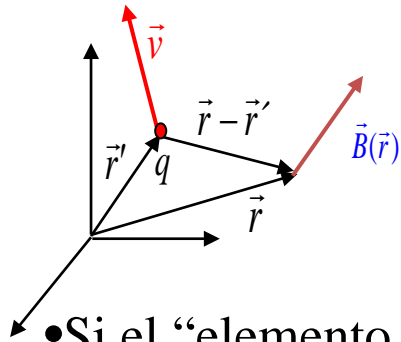
Nota: **Unificación** de interacción electromagnética, electromagnetismo, con las Ecuaciones de Maxwell. En formulación relativista \mathbf{E} y \mathbf{B} son elementos de un mismo campo tensorial, el electromagnético, recogido en el Tensor de Faraday, ver: https://es.wikipedia.org/wiki/Tensor_de_campo_electromagnético

Campo inducido por cargas móviles y corrientes:

- INDUCCIÓN MAGNÉTICA (CAMPO \mathbf{B}) CREADA POR UNA CARGA EN MRU. Aproximación de la ley de **Biot-Savart** para una carga móvil, permite desarrollo teórico formal similar al de la electrostática (*no es riguroso, la ley así aplicada a una carga puntual no es correcta, sólo vale para corrientes estacionarias, v y q puede interpretarse como elemento de corriente $v dq$*)

- Aproximación no relativista

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (\text{si } q \text{ en } \mathbf{r}' = 0)$$



- Si el “elemento de corriente” $q \mathbf{v}$ está en punto fuente \mathbf{r}' : el **CAMPO MAGNÉTICO**, que decae con la distancia al cuadrado como \mathbf{E} , en el punto de campo \mathbf{r} es: (observa la diferencia de órdenes de magnitud de campos)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mu_0 \epsilon_0 \left(\vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

$$\text{si } v \ll c, \quad c B \ll E$$

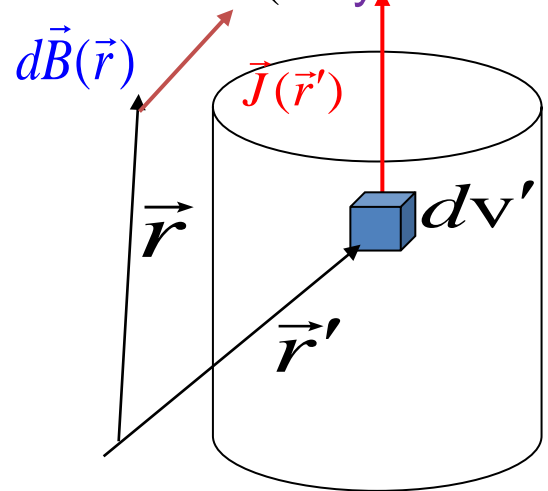
$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi 10^{-7} \text{ mkgC}^{-2}; \quad c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$$

$$[\mu_0] = [B][q]^{-1}[v]^{-1}[r]^2 = LMT^{-2}I^{-2}, \quad \mu_0 \text{ va en } H/m$$

Campo inducido por cargas móviles y corrientes: (Fuentes vectoriales de B)

- Extendiéndolo por superposición a campo creado por cargas en un volumen de conducción estacionaria y pasando al continuo: (Ley de Biot-Savart)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_j \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_j \mathbf{v}_j \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \text{ si } \vec{r}_j \approx \vec{r}' \text{ (posición - promedio, etc.)}$$



$$\vec{J}(\vec{r}) \equiv \sum_j \frac{q_j \vec{v}_j}{\delta v} \Rightarrow \sum_j q_j \vec{v}_j \Big|_{\delta v \rightarrow dv'} \rightarrow \vec{v}' dq' \rightarrow \vec{J}(\vec{r}') dv' \text{ , } \vec{r}_j \sim \vec{r}', \sum_j \rightarrow \int_V$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_s = \frac{\sum_j q_j \vec{v}_j}{\delta S} \text{ (densidad de corriente superficial en } A/m) \\ \text{Otras : } \left\{ \begin{array}{l} \sum_j q_j \vec{v}_j \rightarrow \vec{J}_s(\vec{r}') dS' \text{ (hoja o lámina de corriente)} \\ q\vec{v} \rightarrow dq\vec{v} = dq \frac{d\vec{l}'}{dt} = I d\mathbf{r}' \text{ (densidad de corriente en hilos)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- Extensible a corrientes superficiales o lineales (sí es correcto para corrientes estacionarias en láminas e hilos o circuitos de corriente):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V dv' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \text{ (Ley de Ampere)}$$

Cambios según distribución de corrientes : $dq \vec{v} \leftrightarrow dv' \vec{J}(\vec{r}') \leftrightarrow dS' \vec{J}_s(\vec{r}') \leftrightarrow d\vec{l}' I(\vec{r}')$
 Recordar: según distribución de carga : $dq \leftrightarrow dv' \rho(\vec{r}') \leftrightarrow dS' \sigma(\vec{r}') \leftrightarrow d\vec{l}' \lambda(\vec{r}')$

- Ley de Gauss para el campo magnético:
 (inexistencia de fuentes escalares de B:
 no hay monopolos magnéticos)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_{S \text{ cerr.}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Potencial Vector Magnético \mathbf{A}

- Dado que \mathbf{B} es solenoidal, se puede expresar como el rotor de un campo \mathbf{A} (potencial vector magnético):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

- De la Ley de Biot-Savart para \mathbf{B} se puede *elegir un \mathbf{A} identificándolo como sigue:*

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \left[\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \times \vec{J}(\vec{r}') = \nabla \times \underbrace{\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int_v dv' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)}_{\vec{A}(\vec{r})}$$

- O bien, aplicando la ley de Ampere, se puede *elegir un \mathbf{A} , también solenoidal*, que cumpla:

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

$$\text{eligiendo } \nabla \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}, \quad \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \text{ etc.}$$

$$\text{igual solución que } \left(\nabla^2 V = -\frac{\rho_e}{\epsilon_0} \right) \text{ identificando p.e. } A_x \leftrightarrow V \text{ y } \mu_0 J_x \leftrightarrow \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{vol} \frac{J_x(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{vol} dv' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

para corrientes en láminas, hilos... sustituir:

$$\vec{J}(\vec{r}') dv' \rightarrow \vec{J}_s(\vec{r}') dS' \rightarrow I d\vec{l}' \rightarrow dq \vec{v}$$

¿Qué **unidad** tiene el vector \mathbf{A} ?

Demuestra que $q \mathbf{A}$ tiene unidades de cantidad de movimiento $\mathbf{P}=m\mathbf{v}$

Probar que si U es un campo escalar, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}(U)$ es otro potencial vector posible para el mismo \mathbf{B} .

Ejemplos representativos (Problemas) prob. 7.3

Hilo de longitud finita (infinita) recorrido por una intensidad I (en cualquier punto)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r_{\perp}\vec{u}_r$$

$$\vec{r}' = y'\vec{j} \Rightarrow d\vec{r}' = dy'\vec{j}$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-L}^D \frac{I dy' x (-\vec{k})}{(x^2 + (y - y')^2)^{3/2}}$$

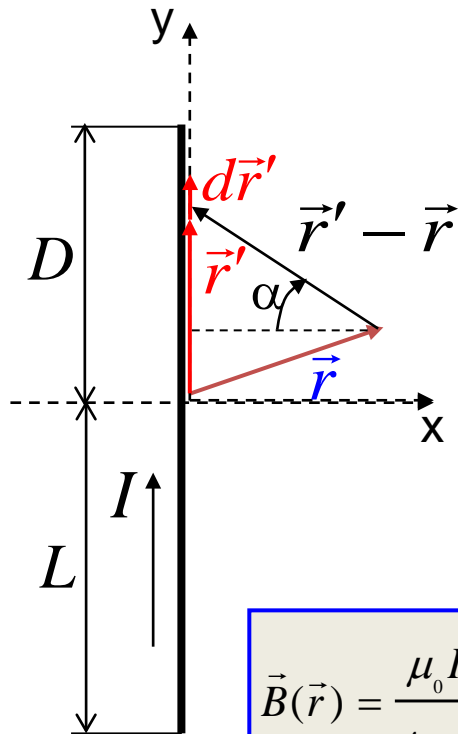
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y' - y}{x}; \quad dy' = \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{(x^2 + (y - y')^2)^{1/2}}; \quad \sin \alpha = \frac{y' - y}{(x^2 + (y - y')^2)^{1/2}}$$

Cambio:

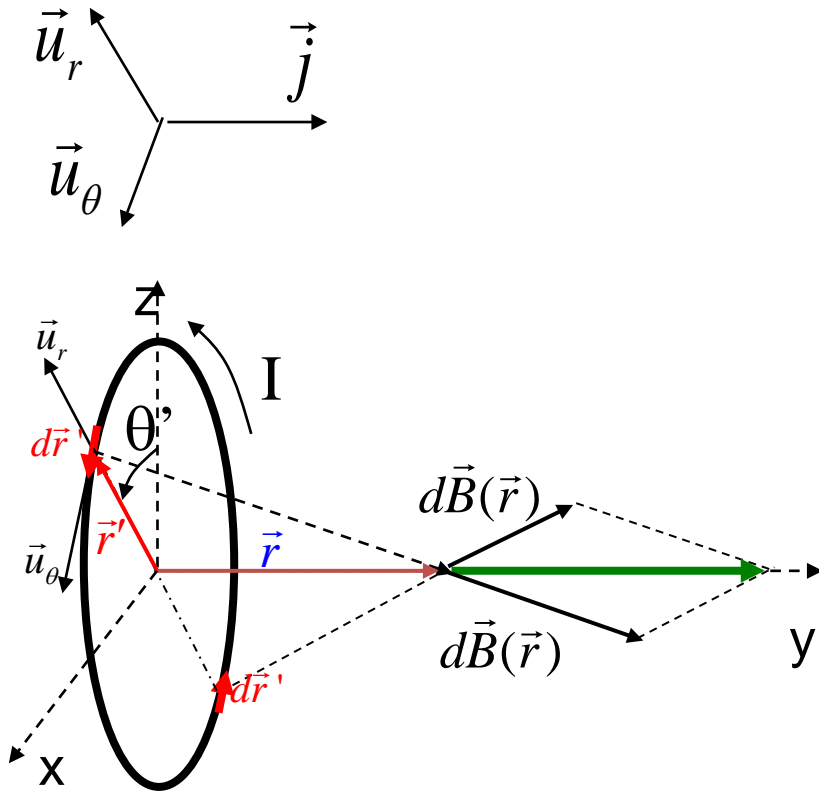
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \cos \alpha d\alpha (-\vec{k}) = \frac{\mu_0 I (-\vec{k})}{4\pi x} (\sin \alpha_{\max} - \sin \alpha_{\min})$$

para hilo infinito a distancia r : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_{\theta}$ (Recordar para hilo de carga $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_{\perp}$)



campo de espira circular en eje. (ver prob. 7.5,7.6,7.7)

Espira de radio R recorrida por una intensidad I
(en cualquier punto de su eje)



$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{r}' = R\vec{u}_r \quad \vec{r} = y\vec{j} \quad d\vec{r}' = R d\theta' \vec{u}_\theta$$

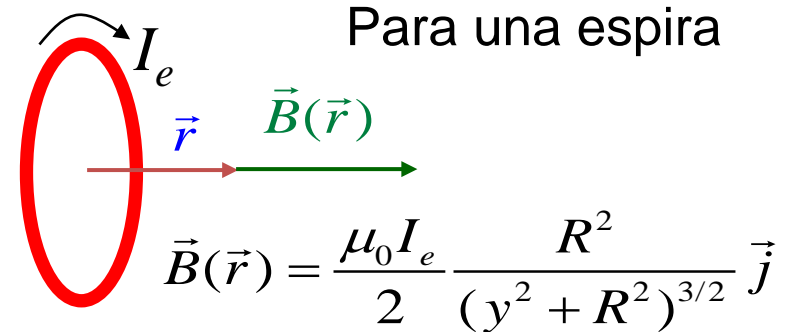
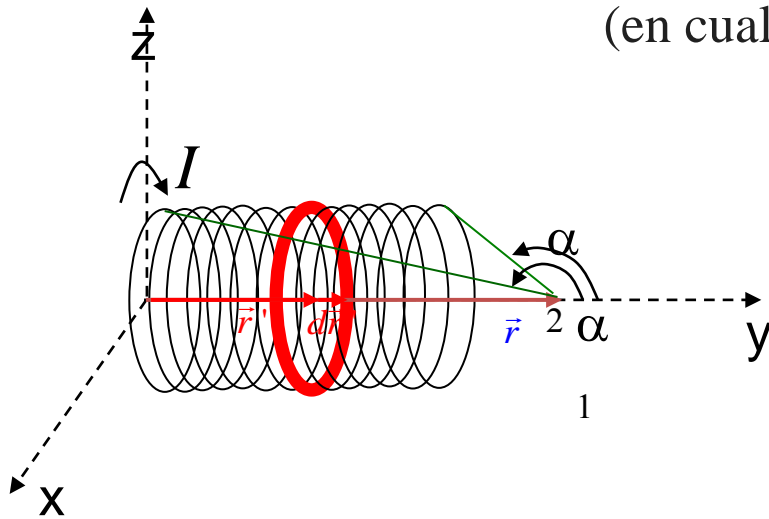
Sustituyendo y operando:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R d\theta' \vec{u}_\theta \times (y\vec{j} - R\vec{u}_r)}{(y^2 + R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 d\theta' \vec{j}}{(y^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u}_{eje}$$

Solenoide finito (problema 7.7)

Solenoide de longitud L y radio R con N espiras recorrido por una intensidad I (en cualquier punto de su eje)



Para un elemento diferencial de solenoide de espesor dy' por el que circula un diferencial de intensidad dI' :

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 dI'}{2} \frac{R^2}{((y - y')^2 + R^2)^{3/2}} \vec{j}$$

$$dI' = \frac{N}{L} dy' I$$

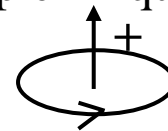
$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{R}{y - y'}; \quad -dy' = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0 N I}{2L} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha \vec{j} = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{j}$$

Ley de Ampere (B no es campo conservativo)

• La circulación de \mathbf{B} a lo largo de una curva cerrada-simple Γ que rodea un hilo recto e infinito de corriente I es $\mu_0 I$.

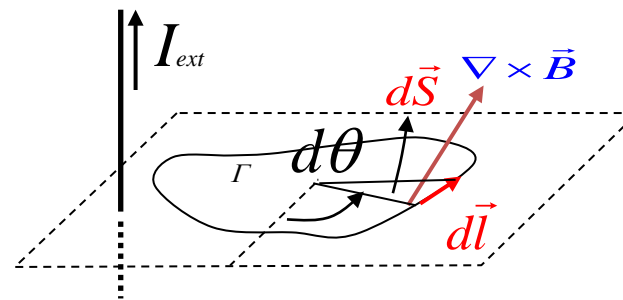
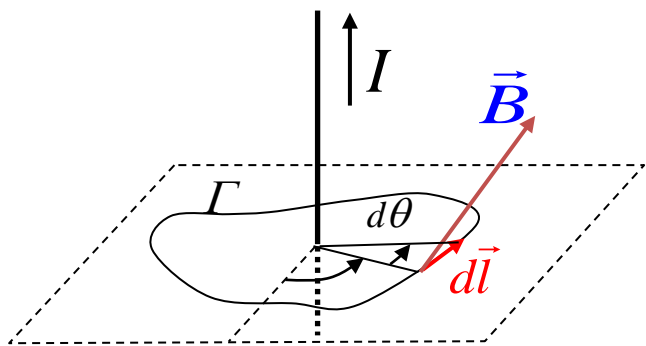
• En efecto, el campo a la distancia radial r del hilo es:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(-y\vec{i} + x\vec{j})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ cumple: } \nabla \wedge \vec{B} = 0 \text{ si } r = r_\perp \neq 0$$

• La circulación del vector \mathbf{B} es

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \cdot \underbrace{(dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta)}_{d\vec{l}} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\theta = \mu_0 I$$



• La circulación de \mathbf{B} , campo inducido por I , si el hilo de corriente es exterior al contorno abrazado por la curva, es nula, según el Teorema de Stokes (pues $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{0}$):

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\Gamma} d\vec{S} \cdot \nabla \wedge \vec{B} = 0, \text{ con } r_\perp \neq 0 \text{ (fuera del hilo)}$$

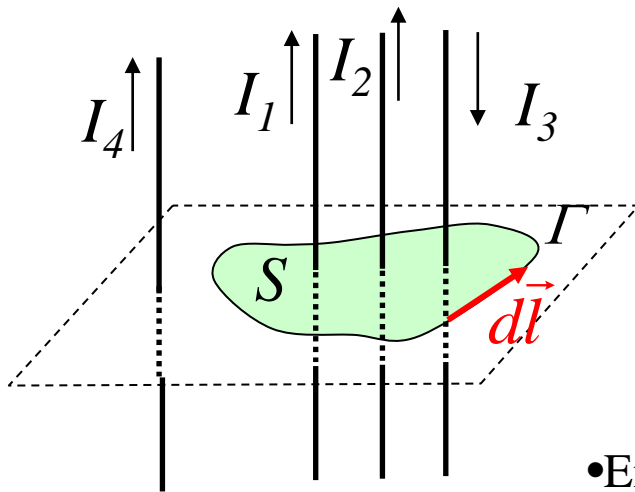
Ley de Ampere (B lo generan fuentes vectoriales, corrientes)

- Análogamente, por superposición si B es creado por distribuciones de hilos de corriente, a su circulación a lo largo de la curva cerrada sólo contribuyen las corrientes que abraza la curva, interiores al contorno.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_1 + I_2 - I_3) = \mu_0 I_{\text{int}} \quad ; \text{general: } \vec{J} = \sum_{j=1}^N \frac{I_j}{S_j} \vec{\tau}_j$$

- El **resultado es extensible, por superposición, a distribuciones** de corriente \mathbf{J} cualesquiera, pues \mathbf{J} puede verse como una distribución continua de hilos de corriente, siendo su flujo a través de una superficie S la corriente neta I que atraviesa S :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(I_1 + I_2 - I_3) = \mu_0 I_{\text{int}} = \mu_0 \int_{S_{\Gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



- La circulación de \mathbf{B} , que es el campo inducido por **TODA la distribución de corrientes**, es *proporcional a la corriente neta abrazada* por la curva cerrada-simple Γ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{int.}\Gamma} = \int_{S_{\Gamma}} \mu_0 \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\Gamma}} \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

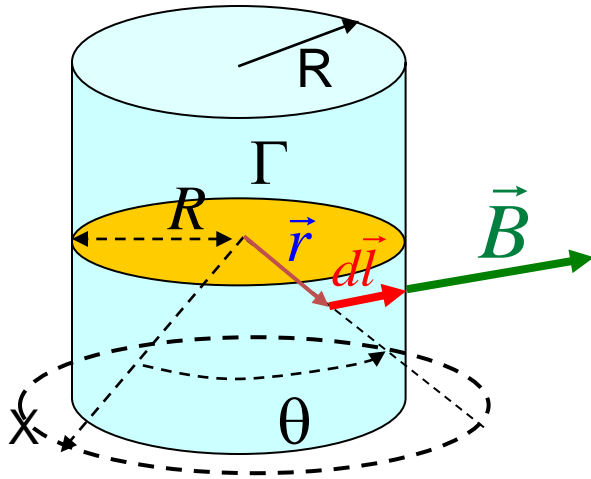
- En forma diferencial la **ley de Ampere** para la magnetostática:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \text{en situación estacionaria. la ecuación de continuidad de corriente } \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = \nabla \cdot (\mu_0 \vec{J}) \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Ejm. Cilindro de corriente (caso particular de 7.8, importante para J uniforme)

Hilo indefinido de radio R y densidad de corriente $J = C r$ (en cualquier punto)

Aplicando la Ley de Ampere. En el exterior del hilo ($r > R$):



$$\vec{B} = B \vec{u}_\theta, \quad d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = Br 2\pi$$

$$I(R) = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^R Cr' \vec{k} \cdot 2\pi r' dr' \vec{k} = 2\pi C \frac{R^3}{3}$$

$$Br 2\pi = \mu_0 2\pi C \frac{R^3}{3} \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 CR^3}{3r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

En el interior del hilo ($r < R$):

$$I = \int_0^R Cr' \vec{k} \cdot 2\pi r' dr' \vec{k} = 2\pi C \frac{R^3}{3}$$

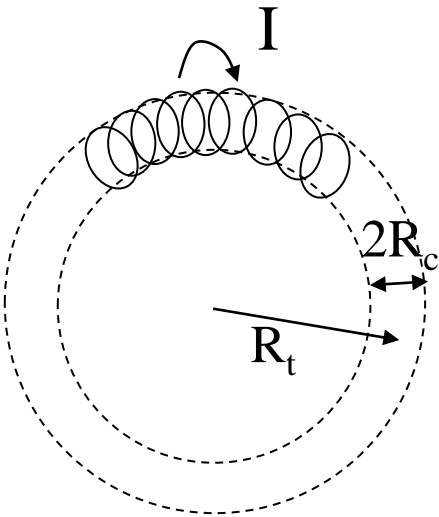
$$C = \frac{3I}{2\pi R^3}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_\theta \cdot r d\theta \vec{u}_\theta = Br 2\pi$$

$$I(r) = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^r Cr' \vec{k} \cdot 2\pi r' dr' \vec{k} = 2\pi C \frac{r^3}{3}$$

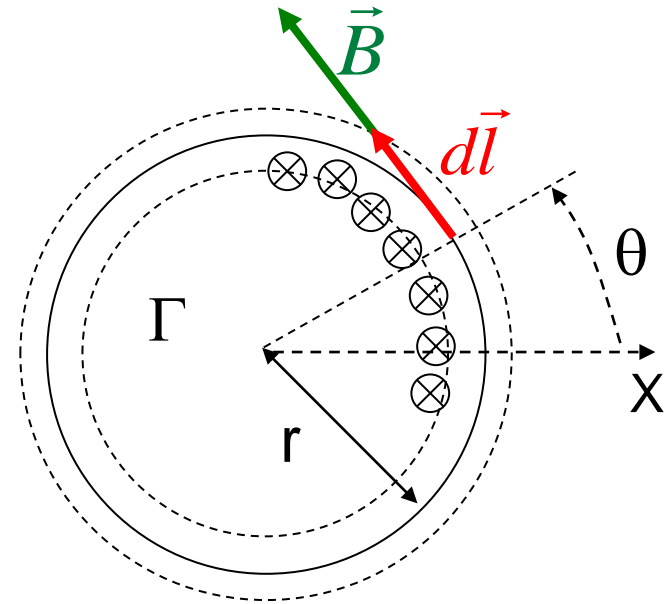
Problemas ejemplo. (extensión del problema 7.7)

Solenoides toroidales estrechos ($R_t \gg R_c$) con N espiras recorridas por una intensidad I



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$\vec{B} = B\vec{u}_{\theta} \quad d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_{\theta}$$



$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \vec{u}_{\theta} \cdot r d\theta \vec{u}_{\theta} = Br 2\pi \approx BR_t 2\pi$$

$$\mu_0 I_{curva} = -\mu_0 N I$$

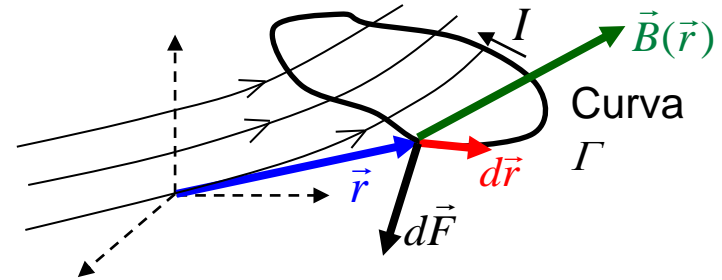
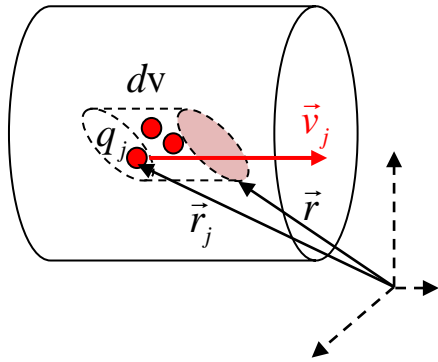
$$B = -\mu_0 \frac{N}{2\pi R_t} I$$

El sentido positivo va hacia afuera de la hoja

Fuerza y momento sobre elementos de corriente:

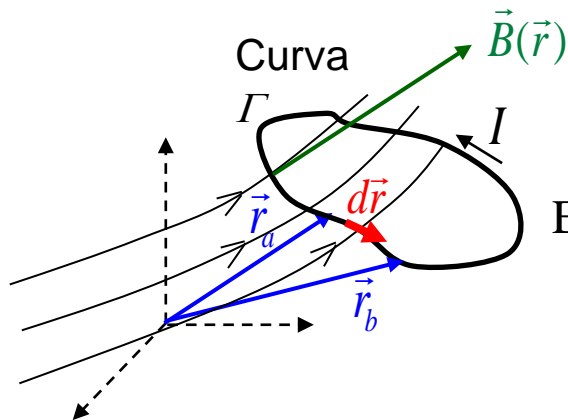
Fuerza de Lorentz magnética y momento *sobre un elemento de corriente o circuito*

$$d\vec{F} = \sum (q_j \vec{v}_j \times \vec{B}(\vec{r}_j)) \simeq (\sum q_j \vec{v}_j) \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) d\mathbf{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$



Para un hilo conductor y/ circuito:

$$\vec{J}d\mathbf{v} = I d\vec{r} \rightarrow d\vec{F} = I d\vec{r} \times \vec{B}$$



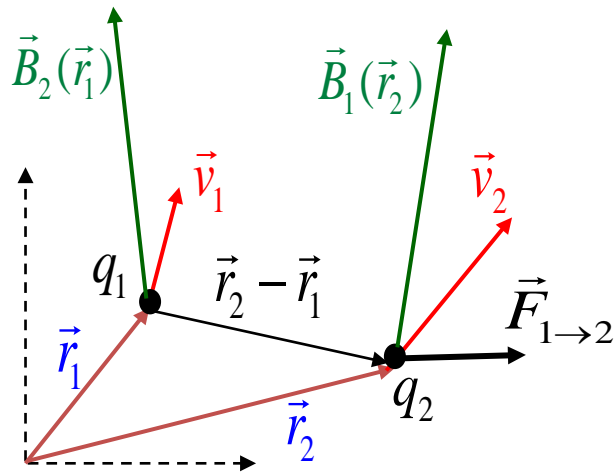
$$\mathbf{F} = I \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

El momento de la fuerza *depende del punto O si B no es uniforme:*

$$d\vec{\tau}_O = \vec{r} \times d\vec{F} \Rightarrow \vec{\tau}_O = I \oint_{\Gamma} \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

Problema ejemplo:

- **FUERZA ENTRE CARGAS EN MR.** (es sólo un ejercicio, en la aproximación no relativista, no se aplican transformaciones a los campos, *se pierde física* en el problema, no es correcto)
- Vector inducción magnética que crea la carga q_1 en la posición que ocupa q_2 : (Ver problema **6.1**) queda:



$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \vec{v}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Fuerza de q_1 sobre q_2 :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 (\vec{v}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2))$$

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \neq -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$$

- **Curiosidad:** En un plasma se crean corrientes y campos auto-consistentes que modifican el campo magnético externo (para confinar). Hay modelos para rayos-bola (ball lightning) que creen este fenómeno natural relacionado con plasmas en campo magnético con líneas que forman “nudos”, ver p.e. Nuestro artículo de divulgación

“The Riddle of Ball Lightning: A Review” <https://www.hindawi.com/journals/tswj/2006/948947/abs/>

- Pero también en un laboratorio de plasmas hay efectos de los campos sobre cargas aún no explicados debido a campos creados por cargas y efectos no lineales de transferencias de materia y/o energía y momento:

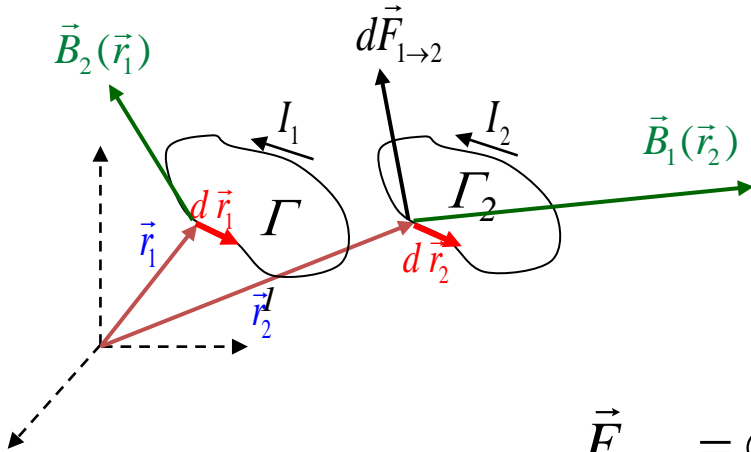
<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.4953901>

- Para ver aplicación de los plasmas y campos en propulsión iónica:

<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5005881>

INTERACCIÓN ENTRE DOS CIRCUITOS de corriente

- Éste resultado **sí** se corresponde con la Ley de Biot-Savart en aplicación correcta no relativista en corrientes estacionarias. (También se suele llamar a la fuerza entre elementos de circuitos como Fuerza de Ampere)



$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{d\vec{r}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\vec{r}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

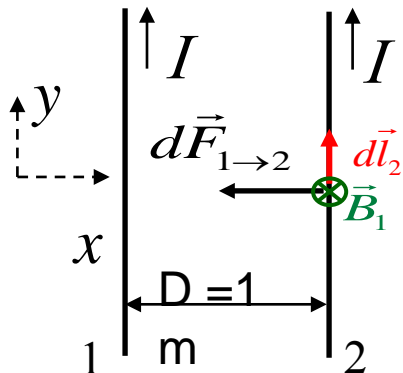
Fuerza sobre Γ_2 :

$$\vec{F}_{1\to 2} = \oint_{\Gamma_2} d\vec{F}_{1\to 2} = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

Fuerza sobre Γ_1 :

$$\vec{F}_{2\to 1} = \oint_{\Gamma_1} d\vec{F}_{2\to 1} = \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{1\to 2} = \oint_{\Gamma_2} d\vec{F}_{1\to 2} = \oint_{\Gamma_2} I_2 d\vec{r}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) \\ \vec{F}_{2\to 1} = \oint_{\Gamma_1} d\vec{F}_{2\to 1} = \oint_{\Gamma_1} I_1 d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$



•Definición de Amperio:

$$d\vec{F}_{1\to 2} = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2) = I_2 dy \vec{j} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi D} (-\vec{k}) = \frac{dy I^2 \mu_0}{2\pi D} (-\vec{i})$$

Da la fuerza de atracción por unidad de longitud (haced $I=1A, D=1m$:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi D}$$

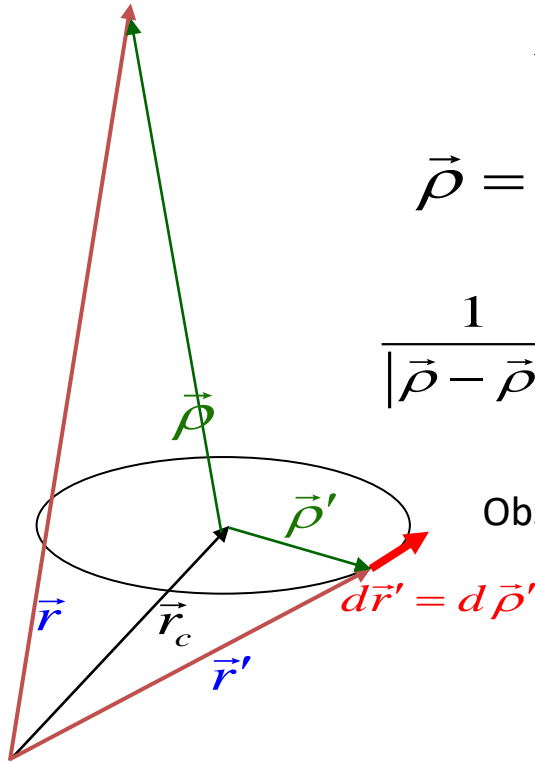
- Para una pequeña *ESPIRA* (no necesariamente plana ni circular) de corriente I con centro en \vec{r}_c y de *radio medio* mucho menor que la distancia ρ al punto de campo, el potencial vector magnético hasta su **aproximación dipolar** es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\rho}'}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|}$$

$$\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_c \quad \text{y} \quad \vec{\rho}' = \vec{r}' - \vec{r}_c \rightarrow \vec{r} - \vec{r}' = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$$

$$\frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|} \approx \frac{1}{|\vec{\rho}|} + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{|\vec{\rho}|^3} + \dots \approx \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{\rho^2} \right), \text{ para } \rho \gg \rho'$$

Observar que se opera igual que para V_{dip} en tema de dieléctricos.



$$\vec{A}(\vec{\rho}) \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \oint_{\Gamma} \overbrace{d\vec{\rho}'}^{=0} + \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}'}{\rho^3} d\vec{\rho}' \Rightarrow$$

$$\vec{A}_{dip} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} I \vec{\rho}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) d\vec{\rho}'$$

$$V_{dip} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \nabla \frac{1}{r}$$

Campo de espira de corriente lejana

- Nota: Con las identidades (diferenciando respecto a variables primadas, α constante):

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \rightarrow \begin{cases} (\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}') \times \vec{\alpha} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' - (\vec{\alpha} \cdot d\vec{\rho}') \vec{\rho}' \\ d[(\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') \vec{\rho}'] = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}') d\vec{\rho}' + (\vec{\alpha} \cdot d\vec{\rho}') \vec{\rho}' \end{cases}$$

- Sumando ambas y despejando e integrando por curva cerrada:

$$\underbrace{\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}'\right) d\vec{\rho}'}_{\text{en la integral de } \mathbf{A}} = \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{\rho}' \times d\vec{\rho}')}_{\text{Área diferencial en espira}} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} + \frac{1}{2} d\left[\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}'\right) \vec{\rho}'\right]$$

$$\oint_{\Gamma} d\left[\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \cdot \vec{\rho}'\right) \vec{\rho}'\right] = \oint_{\Gamma} d[u] = 0 \quad ; \text{ con } \vec{\alpha} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = -\nabla \frac{1}{\rho} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|}$$

- Se tienen \mathbf{A} y \mathbf{B} creados por un circuito lejano *en aproximación dipolar*:

$$\vec{A} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \times \nabla \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} \right]$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{donde } \vec{m} = I \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} \vec{\rho}' \times d\vec{\rho}' = I \vec{S} \quad (\text{en } \text{A m}^2)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\vec{m}}{r^3} + \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} \right]$$

$$(I \text{ por Superficie de la espira, en } \text{A m}^2) \quad \text{y} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}_{dip}$$

Notar que el campo \mathbf{E} de un dipolo electrostático y el campo \mathbf{B} dipolar tienen la misma expresión (formal)
¿puede este \mathbf{B} derivarse de un potencial escalar? ¿y este \mathbf{E} dipolar de un potencial vector? Sí...

- **Problema 7.1**

Una partícula puntual de carga q y masa m penetra en una región donde existen un campo eléctrico \mathbf{E} y un campo magnético \mathbf{B} , ambos uniformes. En el instante inicial $t = 0$ la partícula se halla en el origen de coordenadas con velocidad $\mathbf{v}_o = v_{ox} \mathbf{i} + v_{oy} \mathbf{j}$. Determinar la posición de la partícula en todo instante $t > 0$ si los campos son paralelos, dados por $\mathbf{E} = E \mathbf{i}$ y $\mathbf{B} = B \mathbf{i}$. Esbozar la curva de la trayectoria para $E = 0$. Nota: Basta plantear las ecuaciones dinámicas del movimiento e indicar en clase cómo se resolverían.

Solución :

$$x = v_{ox} t + \frac{q E}{2m} t^2 \quad ; \quad y = \frac{v_{oy}}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \quad ; \quad z = \frac{v_{oz}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) \quad \text{donde,} \quad \omega = \frac{q B}{m}$$

- **Problema 7.2**

Como en el caso anterior, determinar la posición de la carga puntual si ésta parte del reposo en el origen de coordenadas cuando los campos uniformes son perpendiculares. En este caso, también sin pérdida de generalidad, pueden considerarse $\mathbf{E} = E \mathbf{i}$ y $\mathbf{B} = B \mathbf{k}$. Demostrar que si $E = 0$, la energía cinética de la carga permanece constante en el tiempo cualquiera que sea B (si no actúan otras fuerzas sobre ella). Nota: Basta plantear las ecuaciones dinámicas del movimiento e indicar en clase cómo se resolverían.

Solución :

$$x = \frac{E}{\omega B} (1 - \cos(\omega t)) \quad ; \quad y = \frac{E}{\omega B} (\operatorname{sen}(\omega t) - \omega t) \quad ; \quad z = 0 \quad \text{con,} \quad \omega = \frac{q B}{m}$$

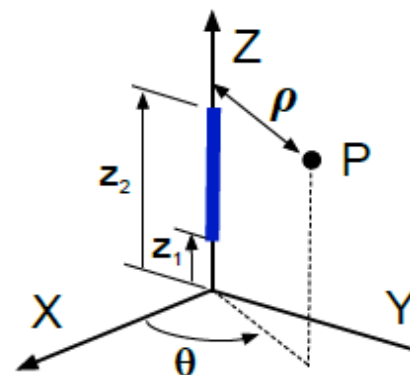
Problemas

• Problema 7.3

La figura adjunta muestra un tramo rectilíneo de un hilo conductor de un circuito por el que circula una corriente de intensidad I . El segmento de corriente yace sobre el eje OZ con extremos en las coordenadas z_1 y z_2 indicadas. Usando coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta = \varphi, z)$ se pide:

- Calcular el campo magnético B debido a este segmento de corriente en cualquier punto P del espacio.
- Obtener de la expresión anterior el campo creado por un hilo rectilíneo infinito de corriente I (límites $z_1 \rightarrow -\infty$ y $z_2 \rightarrow \infty$).

$$a) \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \left(\frac{z - z_1}{\sqrt{(z - z_1)^2 + \rho^2}} - \frac{z - z_2}{\sqrt{(z - z_2)^2 + \rho^2}} \right) u_\varphi$$

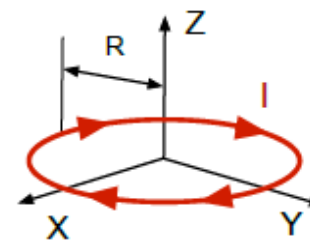


$$b) \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} u_\varphi$$

• Problema 7.4

Calcular el campo magnético B creado por el anillo circular de la figura de radio R y por el que circula una corriente I en:

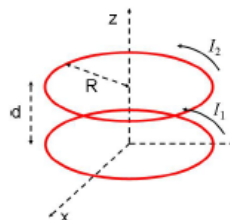
- Un punto P cualquiera del eje Z .
- En el centro geométrico del anillo.



• Problema 7.5

Usando los resultados del problema anterior se pide:

- Calcular el campo magnético B creado en un punto P del eje Z por dos anillos de corrientes I_1 e I_2 dispuestos como muestra la figura.
- Si las intensidades de corriente son tales que $I_1 = I_2 = I$ y circulan en sentidos opuestos, determinar en qué puntos del eje z se anula B .



$$a) \quad B(0, 0, z) = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

$$b) \quad B(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \mathbf{k}$$

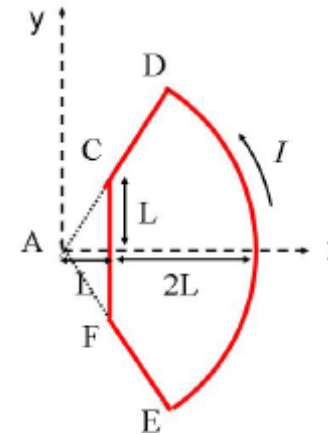
Problemas

• Problema 7.6

Calcular el campo magnético producido en el punto A por la espira $CFED$ recorrida por la intensidad I .

Solución :

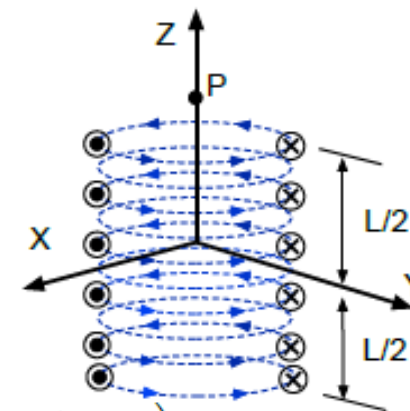
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \left(\frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \right) \mathbf{k}$$



• Problema 7.7

Un solenoide de longitud L está formado por el arrollamiento de un hilo conductor por el que circula una corriente de intensidad I , que forma un devanado prácticamente continuo de N espiras circulares de radio R , con densidad de espiras $n = N/L$ uniforme por unidad de longitud. Se pide calcular:

- El campo magnético \mathbf{B} en un punto cualquiera P del eje OZ .
- Si el solenoide puede considerarse de longitud infinita, el valor de \mathbf{B} en todo punto del espacio.



$$\text{a) } \mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\frac{z + L/2}{\sqrt{R^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{R^2 + (z - L/2)^2}} \right) \mathbf{k}$$

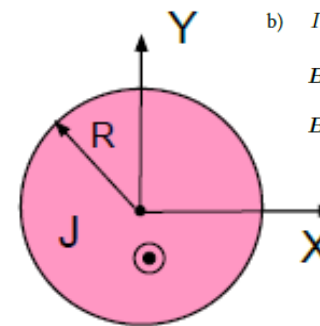
$$\text{b) } \mathbf{B} = \mu_0 n I \mathbf{k} \text{ dentro del solenoide y } \mathbf{B} = 0 \text{ fuera.}$$

Problemas

• Problema 7.8

El cilindro de material conductor muy largo, de sección transversal de radio R representado en la figura adjunta, es atravesado por una corriente que fluye paralela a su eje. Empleando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) se pide calcular la intensidad de corriente I y el campo B en todo punto del espacio en los siguientes casos:

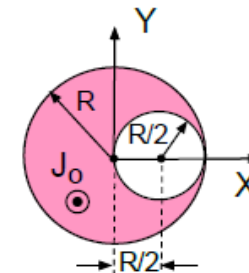
- Cuando la densidad de corriente $J = J_0 k$ es uniforme.
- Si $J = C \rho^n k$, donde C y $n > -2$ son constantes y ρ es la distancia al eje del cilindro.



$$\begin{aligned} \text{a) } I &= (\pi R^2) J_0 \\ B_i &= \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2} u_\varphi \quad (0 < \rho < R) \\ B_e &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} u_\varphi \quad (\rho > R) \\ \text{b) } I &= \frac{2\pi C R^{n+2}}{n+2} \\ B_i &= \frac{\mu_0 I \rho^{n+1}}{2\pi R^{n+2}} u_\varphi \quad (0 < \rho < R) \\ B_e &= \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} u_\varphi \quad (\rho > R) \end{aligned}$$

• Problema 7.9

El cilindro de la figura de radio R es muy largo y está relleno de un material conductor por el que circula una densidad de corriente uniforme $J_0 = J_0 k$ excepto por el hueco de radio $R/2$ practicado en su interior. Empleando coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) calcular el campo magnético B en todo punto del espacio.



$$\rho' = (x - R/2) i + y j \quad y, \quad u'_\varphi = k \times \frac{\rho'}{\rho'}$$

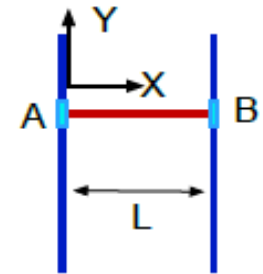
$$B_i = \frac{\mu_0 J_0 \rho}{2} u_\varphi ; \quad B_e = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2\rho} u_\varphi ; \quad B'_i = -\frac{\mu_0 J_0}{2} u'_\varphi ; \quad B'_e = -\frac{\mu_0 J_0 (R/2)^2}{2\rho'} u'_\varphi$$

- En el interior del hueco: $B_H = B_i + B'_i$
- En el material conductor: $B_C = B_i + B'_e$
- Fuera del cilindro: $B_E = B_e + B'_e$

Problemas

• Problema 7.11

La varilla AB tiene masa M , longitud L y puede deslizar sin fricción a lo largo de dos guías verticales como muestra la figura. Una corriente I circula del punto B al A y se pide calcular el valor del campo $B_o = B_o k$ para que la varilla AB ascienda con velocidad constante.

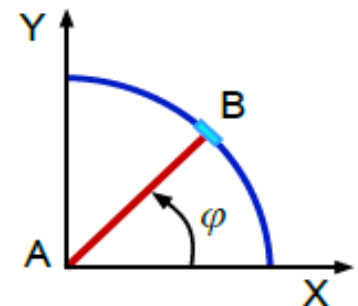


Solución :

$$B_o = \frac{M g}{I L}$$

• Problema 7.12

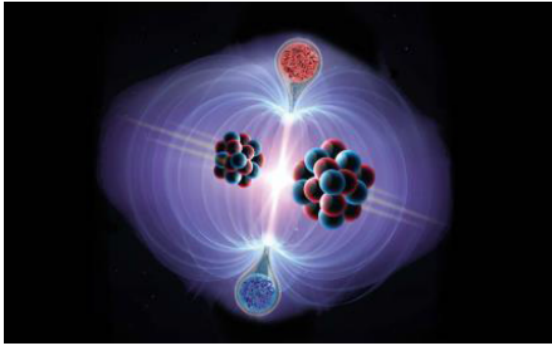
La varilla AB tiene masa M , longitud L , está articulada en el punto A y desliza sin fricción a lo largo de una guía circular como muestra la figura. Una corriente I circula del punto B al A y se pide calcular el valor del campo $B(\varphi) = B(\varphi) k$ para que la varilla AB gire con velocidad angular constante.



Solución :

$$B(\varphi) = \frac{M g}{I L} \cos \varphi$$

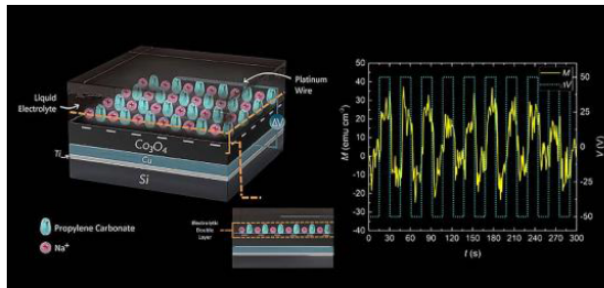
Buscando monopolos magnéticos



Un grupo internacional en el que participa el IFIC (CSIC-UV) está avanzando en la búsqueda de monopolos magnéticos. La investigación se desarrolla en el experimento MoEDAL del LHC. Para detectar monopolos magnéticos han utilizado un magnetómetro superconductor para escanear los módulos detectores expuestos a las colisiones de plomo-plomo del LHC en busca de señales de carga magnética atrapada. Al no encontrarse ninguna señal de este tipo, se excluyó la existencia de monopolos con una masa inferior a 75 GeV.

La colaboración MoEDAL utilizará ahora los detectores de trazas de plástico para impulsar la búsqueda de monopolos a masas y cargas más altas utilizando el conjunto de datos tomado durante el periodo 2015-2018. Se ha publicado en [Nature](#).

Sistemas magnetoiónicos reproducen funciones de aprendizaje y olvido del cerebro



Científicos de la UAB, el ICN2, el IMN-CNM-CSIC, el centro italiano CNR-SPIN y el sincrotrón ALBA han explorado cómo emular las sinapsis biológicas y las capacidades neuromórficas del aprendizaje de forma artificial mediante nuevos dispositivos fabricados con óxido de cobalto.

Estos dispositivos funcionan como un sistema de interruptores, de modo que la posición ON corresponde a la retención de información o *aprendizaje*, mientras que la posición OFF corresponde a la eliminación de información u *olvido*.

Para caracterizar la composición y el estado de oxidación de las capas del óxido de cobalto se realizaron espectros de absorción de rayos X (XAS) en [una de las líneas de luz](#) del sincrotrón ALBA. Estos hallazgos fueron cruciales para entender las diferencias en el movimiento magnetoiónico del oxígeno entre las capas. Se ha publicado en [Nanoscale](#).

Problemas (de autoevaluación, trabajo personal)

VERSIÓN 1 Física II – Examen final ordinario

Curso: 16/17

Fecha: 7/06/17

Para cada cuestión indique la respuesta en el recuadro en función de las variables que se solicita, si bien alguna de las variables puede ser innecesaria, entregue en una hoja adjunta todos los cálculos que justifiquen dicha respuesta.

P3. En el plano Oxy se tiene una espira cerrada OACO constituida por un cuarto de círculo de radio a y dos tramos rectos OA y OC paralelos a los ejes coordenados (véase Fig.).

1) Por la espira circula, gracias a una batería, una corriente estacionaria de valor $I=2I_0$ en sentido antihorario, siendo I_0 una constante. La componente z del campo de inducción magnética \vec{B} creado únicamente por el sector circular AC en el punto $P(0,0,2a)$ del eje Oz es:

(Expresar el resultado en función de μ_0 , I_0 y a)

$$B_z(P) =$$

2) Se aplica un campo magnético uniforme $\vec{B}_{ext} = 2B_0\vec{k}$, siendo B_0 una constante, el vector fuerza magnética que actúa debido a este campo sobre el tramo recto de la espira OA recorrido por la intensidad $I=2I_0$ es:

(Expresar el resultado en función de B_0 , I_0 y a)

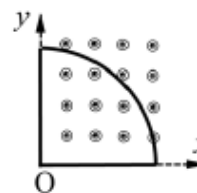
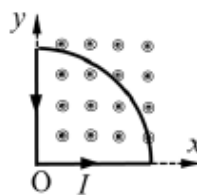
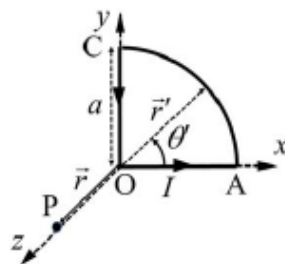
$$\vec{F} =$$

3) La batería deja de funcionar, y por tanto, desaparece la intensidad I . El flujo del campo magnético anterior $\vec{B}_{ext} = 2B_0\vec{k}$ a través de la espira es:

(Considere positivo el flujo correspondiente a un recorrido antihorario de la espira).

(Expresar el resultado en función de B_0 y a)

$$\phi =$$



Se rellena el espacio vacío existente entre los dos cilindros conductores ($a < r < b$, zona 2) con un material magnético lineal de permeabilidad relativa uniforme $\mu_r=4$, determinar:

4) La inducción magnética \vec{B}_2 en el material magnético (zona 2) en función de r :

A) $\vec{B}_2(r) = \frac{4\mu_0 I_1}{\pi r} \vec{u}_\theta$

C) $\vec{B}_2(r) = \frac{3\mu_0 I_1}{\pi r} \vec{u}_\theta$

B) $\vec{B}_2(r) = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \vec{u}_\theta$

D) $\vec{B}_2(r) = \frac{2\mu_0 I_1}{\pi r} \vec{u}_\theta$

4) La resistencia de la espira es R_0 . El campo magnético que se aplica ahora depende del tiempo t y es de la forma: $\vec{B}_{ext} = 8B_0(t/T)\vec{k}$, siendo T una constante. El valor de la intensidad de corriente inducida y su signo, considerando que el signo positivo es el correspondiente a un recorrido antihorario, es:

(Expresar el resultado en función de B_0 , a , R_0 y T)

$$I_{ind} =$$

VERSIÓN 1 Física II – Control nº 3

Curso: 16/17

Fecha: 19/05/17

Para cada cuestión se dan 5 respuestas. Marcar en la plantilla adjunta sólo la que se considere correcta.

En la figura se muestra la sección transversal de dos conductores cilíndricos indefinidos. El cilindro interior es macizo y tiene radio a (zona 1). El cilindro exterior es hueco, y tiene radio interior $b=2a$ y exterior $c=3a$ (zona 3). El cilindro interior transporta una intensidad de corriente eléctrica I_1 , y el exterior, una intensidad $I_3 = -2I_1$. La corriente I_1 va dirigida en el sentido del vector unitario \vec{k} (saliente de la hoja) y la corriente I_3 en el sentido opuesto. La densidad de corriente se distribuye uniformemente en las secciones transversales de los conductores. Si \vec{u}_θ es el vector unitario azimutal, determinar:

1) La densidad de corriente \vec{J}_3 en el cilindro hueco ($b < r < c$, zona 3):

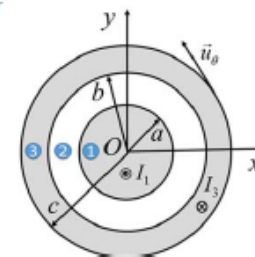
A) $\vec{J}_3 = -\frac{2I_1}{5\pi a^2} \vec{k}$

C) $\vec{J}_3 = -\frac{I_1}{6\pi a^2} \vec{k}$

B) $\vec{J}_3 = -\frac{3I_1}{7\pi a^2} \vec{k}$

D) $\vec{J}_3 = -\frac{I_1}{4\pi a^2} \vec{k}$

E) Ninguna de las anteriores.



2) La inducción magnética \vec{B}_3 en el cilindro hueco (zona 3) en función de r (distancia al eje Oz):

A) $\vec{B}_3(r) = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2 - 4a^2}{8a^2} \right) \vec{u}_\theta$

C) $\vec{B}_3(r) = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \left(\frac{1}{2} - \frac{3(r^2 - 9a^2)}{14a^2} \right) \vec{u}_\theta$

B) $\vec{B}_3(r) = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2 - 4a^2}{12a^2} \right) \vec{u}_\theta$

D) $\vec{B}_3(r) = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2 - 4a^2}{5a^2} \right) \vec{u}_\theta$

E) Ninguna de las anteriores.

3) La energía magnética por unidad de longitud dU_m / dz que almacena el campo en la zona del cilindro interior ($0 < r < a$, zona 1):

A) $dU_m / dz = \frac{2\mu_0 I_1^2}{5\pi}$

C) $dU_m / dz = \frac{\mu_0 I_1^2}{6\pi}$

B) $dU_m / dz = \frac{3\mu_0 I_1^2}{7\pi}$

D) $dU_m / dz = \frac{\mu_0 I_1^2}{16\pi}$